NICOLAE DINCULEANU

INTEGRAREA PE SPAȚII LOCAL COMPACTE

EDITURA ACADEMIEI REPUBLICII POPULARE ROMÂNE

INTEGRAREA PE SPAȚII LOCAL COMPACTE

Coperta de *Dumitru Negrescu*

N. DINCULEANU

INTEGRAREA PE SPAȚII LOCAL COMPACTE

EDITURA ACADEMIEI REPUBLICII POPULARE ROMÂNE
BUCUREȘTI, 1965

Prefața

Cartea de față este o continuare a tratatului de Analiză Matematică *de acad. Miron Nicolescu. În volumul III al acestui tratat este expusă teoria generală a măsurii și a integralei pe un spațiu abstract.*

Prezenta lucrare este dedicată teoriei integralei într-un caz special important: cazul spațiilor local compacte. Importanța acestui caz este justificată de următoarele considerente:

1. Spațiile local compacte sînt suficient de particulare pentru ca măsurile pe aceste spații să posede proprietăți speciale, care să le apropie mai mult de modelul clasic — măsura Lebesgue pe dreaptă. Particularitatea spațiilor local compacte constă în existența unei clase bogate de mulțimi cu proprietăți remarcabile — mulțimile compacte. Una dintre proprietățile importante ale spațiilor local compacte este existența unei familii local numărabile de părți compacte disjuncte, a căror reuniune diferă de spațiul întreg printr-o mulțime neglijabilă. Datorită acestei proprietăți, o serie de teoreme importante cum sînt: teorema lui Lebesgue-Nikodym și teorema lui Lebesgue-Fubini, sînt valabile pe spații local compacte fără nici o restricție asupra măsurilor, în timp ce în cazul spațiilor abstracte, aceste teoreme sînt demonstrate, general, numai pentru măsuri σ-finite.

2. Spațiile local compacte sînt în același timp destul de generale pentru ca o teorie a integralei dezvoltată pe asemenea spații să poată fi aplicată cu succes în cea mai mare parte a problemelor importante din analiza matematică — de exemplu în analiza armonică pe grupuri local compacte. Deoarece în analiza armonică se folosește în mod frecvent teorema lui Fubini, utilizarea în acest caz a teoriei generale a integralei pe spații abstracte ar impune condiția restrictivă ca măsura Haar să fie σ-finită, deci, cu o asemenea integrală, analiza armonică poate fi dezvoltată numai în cazul grupurilor local compacte numărabile la infinit.

3. Menționăm, în sfîrșit, că, așa cum a arătat S. Kakutani, integrarea pe spații abstracte poate fi redusă totdeauna la integrarea pe spații local compacte.

*

În mod obișnuit, plecînd de la o măsură — definită ca funcție de mulțime — se construiește integrala corespunzătoare, care este o funcțională liniară pe spațiul funcțiilor integrabile. O teoremă clasică a lui F. Riesz, extinsă apoi de S. Kakutani la cazul spațiilor compacte, arată că, reciproc, orice funcțională liniară și continuă pe spațiul funcțiilor continue este o integrală în raport cu o anumită măsură regulată. Această teoremă a permis identificarea măsurilor regulate cu funcționalele liniare și continue și a condus grupul N. Bourbaki la construirea unei vaste teorii a integralei pe spații local compacte plecînd de la definiția măsurii, nu ca funcție de mulțime, ci ca funcțională. Adoptarea acestui punct de vedere oferă numeroase avantaje.

*

În această carte am urmat îndeaproape punctul de vedere al lui N. Bourbaki, pe care l-am adaptat la cazul măsurilor vectoriale, definite ca operații liniare pe spațiul funcțiilor vectoriale $\mathcal{K}_E(T)$ cu valori într-un spațiu Banach F.

În cazul măsurilor majorate este suficient ca domeniul inițial de definiție să fie spațiul funcțiilor reale $\mathcal{K}(T)$ iar domeniul valorilor un spațiu Banach X, deoarece asemenea măsuri pot fi „prelungite" la spațiul $\mathcal{K}_E(T)$ cu valori în F, oricare ar fi spațiile Banach E și F astfel încît $X \subset \mathcal{L}(E, F)$.

Cartea conține trei părți. În prima parte se studiază măsurile vectoriale, integrala superioară, spațiile $\mathcal{L}^p$, funcții integrale, funcții măsurabile și proprietatea de ridicare a spațiului $\mathcal{L}^\infty$. Această primă parte este consacrată în cea mai mare parte măsurilor pozitive (cu excepția Cap. I).

Partea a II-a este consacrată în special măsurilor vectoriale. În această parte se studiază măsurile definite prin densitate, măsuri absolut continue și teoreme de tip Lebesgue-Nikodym cu aplicații la reprezentarea integrală a operațiilor liniare pe spațiile $\mathcal{L}^p$, sume de măsuri, imagini de măsuri, măsuri induse și măsuri pe spații produs. Prin utilizarea unei ridicări a spațiului $\mathcal{L}^\infty$, teoremele de tip Lebesgue-Nikodym și teoremele de reprezentare integrală a operațiilor liniare pe $\mathcal{L}^p$ sînt demonstrate în condiții foarte generale.

În partea a III-a se studiază măsurile pe grupuri local compacte: măsura Haar, produsul de convoluție (pentru funcții vectoriale), algebre grupale (de funcții și măsuri vectoriale), reprezentările grupului și ale algebrei grupale și analiza armonică pe grupuri comutative. Tot în această parte se studiază măsurile definite pe spații de cîmpuri de vectori, spațiile Lebesgue și Orlicz de cîmpuri de vectori și se dau teoreme de reprezentare integrală a operațiilor definite pe aceste spații.

*

Trebuie observat că majoritatea rezultatelor demonstrate de N. Bourbaki pentru integrala superioară rămîn valabile și pentru integrala superioară esențială. În schimb, o serie de rezultate importante, cum sînt cele privitoare la măsurile definite prin densități, imaginile de măsuri și restricțiile de măsuri, nu sînt în general valabile decît pentru integrala superioară esențială.

Pentru o enunțare unitară a tuturor acestor rezultate am efectuat o modificare în definirea integralei superioare : am numit integrală superioară ceea ce Bourbaki numește integrală superioară esențială. În conformitate cu aceasta am numit funcție neglijabilă, respectiv integrabilă, ceea ce Bourbaki numește funcție local neglijabilă, respectiv esențial integrabilă.

Cu aceste modificări, toate spațiile L^p se pot defini în mod unitar prin egalitatea $L^p = \mathcal{L}^p/\mathcal{N}$, fie că $1 \leqslant p < \infty$, fie că $p = \infty$, $\mathcal{N}$ fiind mulțimea funcțiilor neglijabile. De asemenea, inegalitatea lui Hölder $\int^* fg \, \mathrm{d}\mu \leqslant N_p(f) \, N_q(g)$ este adevărată pentru funcții $f \geqslant 0$ și $g \geqslant 0$, chiar și în cazul cînd $p = 1$ și $q = \infty$.

Teorema lui Lebesgue-Fubini nu este însă valabilă pentru funcții esențial integrabile. De aceea, în cadrul modificărilor menționate mai sus, teorema lui Lebesgue-Fubini se enunță în condiția — aparent restrictivă — ca funcțiile să se anuleze pe complementara reuniunii unui șir de mulțimi deschise integrabile. De altfel, restricții de acest fel se impun în unele propoziții relative la produsul de măsuri, chiar cu denumirile lui Bourbaki.

Menționăm, în sfîrșit, că majoritatea rezultatelor enunțate în această carte pentru măsuri cu valori în spații Banach se lasă ușor extinse pentru măsuri cu valori într-un spațiu vectorial cu topologia definită de o seminormă și apoi pentru măsuri cu valori în spații local convexe.

N. Dinculeanu

Tabla de materii

Pag.

PARTEA ÎNTÎI

CAPITOLUL I. MĂSURI PE SPAŢII LOCAL COMPACTE

§ 1. **Definiţia măsurii**

1. Spaţiul funcţiilor continue cu suport compact 17
2. Definiţia măsurii 21
3. Două metode de a defini o măsură 27

§ 2. **Proprietăţile măsurilor**

1. Integrarea funcţiilor scalare în raport cu o măsură vectorială 31
2. Măsuri definite pentru funcţii scalare 34
3. Măsuri scalare 39
4. Integrarea funcţiilor vectoriale în raport cu o măsură scalară 41
5. Măsuri pozitive 44
6. Măsuri cu valori scalare 48

§ 3. **Măsuri majorate**

1. Familii majorate de măsuri reale 52
2. Măsuri majorate 55
3. Măsuri mărginite 60

§ 4. **Suportul unei măsuri**

CAPITOLUL II. SPAŢIILE $\mathcal{L}^p$. FUNCŢII INTEGRABILE

§ 5. **Integrala superioară**

1. Funcţii semicontinue inferior 70
2. Integrala superioară a funcţiilor semicontinue inferior 72
3. Măsura exterioară a mulţimilor deschise 75
4. Integrala superioară a funcţiilor pozitive 77
5. Măsura exterioară a mulţimilor oarecare 87

Pag.

§ 6. Funcţii şi mulţimi neglijabile

1. Funcţii neglijabile pozitive 88
2. Proprietăţi adevărate aproape peste tot 90
3. Clase de funcţii echivalente 91
4. Funcţii definite aproape peste tot 92
5. Funcţii cu valori în $\overline{R}$ 93

§ 7. Spaţiile $\mathcal{L}^p$

1. Inegalităţile lui Hölder şi Minkowski 94
2. Seminormele N_p 97
3. Spaţiile $\mathcal{F}^p$ 101
4. Spaţiile $\mathcal{L}^p$ 106
5. Relaţii între spaţiile $\mathcal{L}^p_E(\mu)$ şi $\mathcal{L}^p_F(\mu)$ 108
6. Relaţii între spaţiile $\mathcal{L}^p_E(\mu)$ şi $\mathcal{L}^p_E(\nu)$ 110
7. Funcţii reale p-integrabile 111
8. Teorema lui Lebesgue 117
9. Relaţii între spaţiile $\mathcal{L}^p_E(\mu)$ şi $\mathcal{L}^q_E(\mu)$ 119
10. Mulţimi filtrante în L^p 120

§ 8. Funcţii integrabile

1. Definiţia funcţiilor integrabile în raport cu o măsură majorată 122
2. Integrarea în raport cu o măsură scalară 123
3. Integrarea funcţiilor scalare în raport cu o măsură majorată 126
4. Funcţii integrabile definite aproape peste tot 127
5. Proprietăţile funcţiilor integrabile 129
6. Trecerea la limită în integrale 131
7. Caracterizarea funcţiilor numerice integrabile 134
8. Mulţimi integrabile 137
9. Funcţii etajate integrabile 146
10. Integrarea funcţiilor vectoriale în raport cu măsuri vectoriale 151

CAPITOLUL III. FUNCŢII MĂSURABILE. SPAŢIUL $\mathcal{L}^\infty$

§ 9. Funcţii şi mulţimi măsurabile

1. Definiţia funcţiilor măsurabile 154
2. Funcţii compuse măsurabile 157
3. Funcţii vectoriale măsurabile 158
4. Funcţii numerice măsurabile 158
5. Mulţimi măsurabile 159
6. Funcţii măsurabile definite pe mulţimi măsurabile 162
7. Principiul localizării 163

Pag.

§ 10. Şiruri de funcţii măsurabile

1. Funcţii cu valori în spaţii metrice 164
2. Funcţii cu valori în spaţii Banach 169
3. Funcţii numerice 171

§ 11. Criterii de integrabilitate

1. Aditivitatea integralei superioare 176
2. Suportul funcţiilor p-integrabile 179
3. Criterii de integrabilitate 181
4. Calculul integralei superioare pentru anumite funcţii 184
5. Funcţii măsurabile definite local 187
6. Funcţii boreliene 191

§ 12. Spaţiul $\mathcal{L}^\infty$

1. Seminorma N_∞ 193
2. Spaţiul $\mathcal{F}^\infty$ 195
3. Spaţiul $\mathcal{L}^\infty$ 196

§ 13. Proprietatea de ridicare

1. Proprietatea de ridicare a lui $\mathcal{L}^\infty$ 198
2. Proprietatea de ridicare a spaţiilor de funcţii vectoriale 202
3. Funcţii cu proprietatea de ridicare 206

§ 14. Relaţii între spaţiile $\mathcal{L}^p$

1. Inegalitatea lui Hölder 211
2. Calculul seminormelor N_p 213
3. Relaţii între spaţiile $\mathcal{L}^r$ şi $\mathcal{L}^s$ 229

PARTEA A DOUA

CAPITOLUL IV. MĂSURI DEFINITE PRIN DENSITĂŢI

§ 15. Funcţii local integrabile. Măsuri definite prin densităţi

1. Funcţii local integrabile 237
2. Măsuri definite prin densităţi local integrabile 239
3. Funcţii operatoriale simplu măsurabile 241
4. Funcţii operatoriale simplu local integrabile 242
5. Măsuri definite prin densităţi simplu local integrabile 244
6. Funcţii operatoriale slab măsurabile 246
7. Funcţii operatoriale slab local integrabile 249
8. Măsuri definite prin densităţi slab local integrabile 250

Pag.

§ 16. Integrarea în raport cu o măsură definită prin densităţi

1. Familii filtrante de funcţii măsurabile 256
2. Integrala superioară în raport cu o măsură pozitivă definită prin densităţi 258
3. Integrarea în raport cu o măsură pozitivă definită prin densităţi 262
4. Integrarea în raport cu măsuri definite prin densităţi slab local integrabile 266
5. Integrarea în raport cu măsuri definite prin densităţi simplu local integrabile . . 271
6. Integrarea în raport cu măsuri definite prin densităţi local integrabile 273

§ 17. Proprietăţile măsurilor definite prin densităţi

1. Proprietăţi algebrice 276
2. Măsuri cu densităţi local integrabile şi baze pozitive 276
3. Măsuri cu densităţi operatoriale 281

§ 18. Măsuri absolut continue

1. Măsuri pozitive absolut continue 284
2. Teorema lui Lebesgue-Nikodym 287
3. Măsuri echivalente 290
4. Măsuri vectoriale absolut continue 293
5. Cazul $|\mathbf{gm}| = |\mathbf{g}|\,|\mathbf{m}|$ 298
6. Măsuri singulare 301
7. Măsuri difuze. Măsuri atomice 304
8. Operaţii liniare pe spaţiul $\mathcal{L}_E^p$ 307

CAPITOLUL V. SUME DE MĂSURI. IMAGINI DE MĂSURI

§ 19. Familii sumabile de măsuri

1. Familii sumabile de măsuri pozitive 321
2. Integrarea în raport cu suma unei familii de măsuri 323
3. Familii sumabile de măsuri vectoriale 327

§ 20. Imagini de măsuri

1. Definiţia imaginilor de măsuri 330
2. Integrala superioară în raport cu imaginea unei măsuri pozitive 332
3. Integrarea în raport cu imaginea unei măsuri pozitive 337
4. Integrarea în raport cu imaginea unei măsuri majorate 340
5. Proprietăţile imaginilor de măsuri 342
6. Aplicaţie. Măsura Lebesgue ca imagine a măsurilor difuze 347

§ 21. Măsuri induse

1. Definiţia măsurilor induse 354
2. Integrala superioară în raport cu o măsură indusă pozitivă 356
3. Integrarea în raport cu restricţia unei măsuri pozitive 358

Pag.

4. Proprietăţile măsurilor induse pozitive 360
5. Integrarea în raport cu restricţia unei măsuri majorate. 363
6. Proprietăţile restricţiilor de măsuri majorate 365

§ 22. **Produs de măsuri**

1. Definiţia măsurilor pe un spaţiu produs 366
2. Integrarea în raport cu produsul a două măsuri 372
3. Integrarea funcţiilor scalare în raport cu produsul a două măsuri vectoriale. 382
4. Proprietăţile produsului de măsuri 385
5. Integrarea în raport cu un produs finit de măsuri 398

PARTEA A TREIA

CAPITOLUL VI. MĂSURI PE GRUPURI LOCAL COMPACTE

§ 23. **Măsura Haar**

1. Grupuri topologice 403
2. Grupuri local compacte 405
3. Măsuri invariante. Măsura Haar 407
4. Proprietăţile măsurii Haar 414
5. Funcţia modulară 419

§ 24. **Produsul de convoluţie**

1. Convoluţia a două măsuri 427
2. Integrarea în raport cu convoluţia a două măsuri 432
3. Convoluţia unei măsuri cu o funcţie 434
4. Convoluţia unei măsuri mărginite cu funcţii mărginite 440
5. Convoluţia a două funcţii 445
6. Unitate aproximativă 450

§ 25. **Algebra grupală**

1. Algebra $\mathscr{M}^1$ 453
2. Algebra L_A^1 455
3. Algebre cu involuţie 458

§ 26. **Reprezentări**

1. Reprezentările grupului G 462
2. Reprezentările algebrei L^1 464
3. Reprezentări slab măsurabile 466

Pag.

4. Reprezentările regulate 474
5. Reprezentări de grupuri comutative 475
6. Grupul reprezentărilor 480

§ 27. **Analiză armonică pe grupuri comutative local compacte**

1. Grupul caracterelor 484
2. Transformata Fourier 486
3. Funcţii de tip pozitiv. Teorema lui Bochner 489
4. Formula de inversiune. Teorema lui Plancherel 498
5. Teorema lui Pontriaghin 508
6. Exemple 510

CAPITOLUL VII. SPAŢII DE CÎMPURI DE VECTORI

§ 28. **Spaţiile** $\mathcal{L}^p_{\mathcal{A}}$

1. Familii fundamentale 515
2. Cîmpuri de vectori continue 516
3. Proprietăţile cîmpurilor de vectori continue 517
4. Cîmpuri de vectori p -integrabile 522
5. Cîmpuri de vectori măsurabile 523
6. Spaţiul $\mathcal{L}^\infty_{\mathcal{A}}$ 528
7. Măsuri definite pe cîmpuri de vectori 528
8. Integrarea cîmpurilor de vectori 530
9. Cîmpuri de operaţii slab măsurabile şi slab local integrabile 532
10. Măsuri definite prin densităţi 536
11. Măsuri absolut continue 540
12. Operaţii liniare pe spaţiul $\mathcal{L}^p_{\mathcal{A}}$ 547

§ 29. **Spaţii Orlicz**

1. Spaţiile $O^\Phi_{\mathcal{A}}$ 552
2. Funcţii complementare în sensul lui Young 559
3. Seminormele $\| x \|_\Phi$ 563
4. Spaţiile $\mathcal{L}^\Phi_{\mathcal{A}}$ 566
5. Operaţii liniare pe spaţiul $\mathcal{L}^\Phi_{\mathcal{A}}$ 578

Bibliografie 587

PARTEA ÎNTÎI

MĂSURI PE SPAȚII LOCAL COMPACTE

§ 1. DEFINIȚIA MĂSURII

1. Spațiul funcțiilor continue cu suport compact

În tot cuprinsul cărții vom nota cu T un spațiu local compact.

Fie E un spațiu Banach. Norma unui element $x \in E$ va fi notată cu $|x|$. Vom nota prin $\mathcal{K}_E(T)$ spațiul vectorial al funcțiilor $\mathbf{f} : T \to E$ continue cu suport compact. Suportul funcției $\mathbf{f}$ este închiderea mulțimii $\{t \mid t \in T,\ \mathbf{f}(t) \neq 0\}$.

Pentru fiecare parte $A \subset T$, $\mathcal{K}_E(T, A)$ este subspațiul lui $\mathcal{K}_E(T)$ format din funcțiile cu suportul conținut în A.

$\mathcal{C}_E(T)$ sau $\mathcal{C}_E$ este spațiul funcțiilor *continue* $\mathbf{f} : T \to E$.

În cazul cînd T este compact, $\mathcal{K}_E(T) = \mathcal{C}_E(T)$. Dacă $E = R$, vom scrie respectiv $\mathcal{K}(T)$, $\mathcal{K}(T, A)$, $\mathcal{C}(T)$ în loc de $\mathcal{K}_R(T)$, $\mathcal{K}_R(T, A)$, $\mathcal{C}_R(T)$.

$\mathcal{K}_+(T)$ sau $\mathcal{K}_+$ este mulțimea funcțiilor *pozitive* continue cu suport compact definite pe T.

Spațiul $\mathcal{K}(T)$ este ordonat prin relația $f \leqslant g$:

$$f \leqslant g \text{ înseamnă } f(t) \leqslant g(t) \text{ pentru orice } t \in T.$$

Dacă $\mathbf{f} \in \mathcal{K}_E(T)$, atunci $|\mathbf{f}| \in \mathcal{K}_+(T)$, unde prin $|\mathbf{f}|$ notăm funcția $t \to |\mathbf{f}(t)|$.

Pentru fiecare funcție $\mathbf{f} \in \mathcal{K}_E(T)$ notăm

$$\|\mathbf{f}\| = \sup_{t \in T} |\mathbf{f}(t)|.$$

Aplicația $\mathbf{f} \to \|\mathbf{f}\|$ este o normă pe fiecare spațiu $\mathcal{K}_E(T, A)$, și definește pe acest spațiu *topologia convergenței uniforme* pe T.

Pe spațiul $\mathcal{K}_E(T)$ se poate considera și *topologia convergenței compacte*. Aceasta este topologia de spațiu local convex, definită de familia de seminorme

$$\|\mathbf{f}\|_K = \sup_{t \in K} |\mathbf{f}(t)|$$

cînd K parcurge mulțimea părților compacte ale lui T.

O altă topologie care se poate considera pe spațiul $\mathcal{K}_E(T)$ este topologia *limită inductivă a topologiilor convergenței uniforme, pe fiecare din*

subspațiile $\mathcal{K}_E(T, K)$, cînd K parcurge mulțimea părților compacte ale lui T.

Dacă $G \subset T$ este o mulțime deschisă, și dacă $f : G \to E$ este o funcție continuă cu suport compact, atunci f se poate prelungi la o funcție continuă pe întreg spațiul T, cu suportul compact conținut în G, dîndu-i valoarea 0 pe complementara lui G.

În acest fel se poate identifica spațiul $\mathcal{K}_E(G)$ cu subspațiul $\mathcal{K}_E(T, G)$ al lui $\mathcal{K}_E(T)$, și se poate considera că spațiul $\mathcal{K}_E(G)$ este el însuși un subspațiu al lui $\mathcal{K}_E(T)$.

Amintim următoarele două propoziții:

Propoziția 1. *Pentru orice mulțime compactă* $K \subset T$ *și orice mulțime deschisă* $G \supset K$, *există o funcție continuă* φ *pe* T, *cu valori în* $[0, 1]$, *astfel ca* $\varphi(t) = 1$ *pentru* $t \in K$ *și* $\varphi(t) = 0$ *pentru* $t \notin G$.

Propoziția 2. *Fie* $K \subset T$ *o mulțime compactă. Orice aplicație continuă* f *definită pe* K, *cu valori într-un spațiu Banach* E, *se poate prelungi la o funcție* $\bar{f}$ *definită pe* T *cu valori în* E, *continuă cu suport compact.*

Alte proprietăți ale funcțiilor continue cu suport compact, care vor fi utilizate mai departe, sînt date în propozițiile următoare.

Propoziția 3. *Pentru orice mulțime compactă* $K \subset T$, *și pentru orice acoperire finită* $(G_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ *a lui* K, *formată din mulțimi deschise, există o familie finită* $(f_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ *de aplicații continue ale lui* T *în* $[0, 1]$, *astfel încît*

$$\sum_{i=1}^{n} f_i(t) = 1 \quad \textit{pentru } t \in K,$$

$$\sum_{i=1}^{n} f_i(t) \leqslant 1 \quad \textit{pentru orice } t \in T$$

și pentru fiecare i, *suportul lui* f_i *este conținut în* G_i.

Să observăm mai întîi că există o familie finită $(V_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ de mulțimi deschise relativ compacte care acoperă pe K, astfel ca $\overline{V}_i \subset G_i$ pentru $i = 1, 2, \ldots, n$.

Într-adevăr, deoarece fiecare punct din T are un sistem fundamental de vecinătăți compacte, pentru fiecare punct $x \in K$ există o vecinătate deschisă relativ compactă U_x a sa astfel că $\overline{U}_x$ să fie conținută în toate mulțimile deschise G_i care conțin pe x. Vecinătățile deschise U_x constituie o acoperire a lui K; se poate extrage o acoperire finită $(U_{x_j})_{1 \leqslant j \leqslant m}$ a lui K. Pentru fiecare i, $1 \leqslant i \leqslant n$, luăm V_i reuniunea acelor mulțimi U_{x_j} care sînt conținute în G_i. Deoarece $\overline{V}_i$ este compactă, există o funcție continuă $g_i : T \to [0, 1]$ egală cu 1 pe $\overline{V}_i$ și nulă pe $\mathbf{C}G_i$. Avem, așadar, $\sum_{i=1}^{n} g_i(t) > 0$ pentru $t \in \overline{V}$, unde $V = \bigcup_{i=1}^{n} V_i$. Restricția funcției $\dfrac{1}{\sum_{i=1}^{n} g_i(t)}$ la mulțimea compactă $\overline{V}$ este continuă, deci poate fi prelungită la o funcție reală h continuă pe T. Avem

$$h(t) = \frac{1}{\sum_{i=1}^{n} g_i(t)} \quad \text{pentru } t \in \overline{V}.$$

Există de asemenea o funcție continuă $\varphi : T \to [0, 1]$, egală cu 1 pe K și nulă pe $\complement V$. Pentru fiecare i, $1 \leqslant i \leqslant n$, să punem

$$f_i(t) = g_i(t)\varphi(t)\, h(t).$$

Funcția f_i este definită pe T, are valori în $[0, 1]$, este continuă pe T și are suportul conținut în $\overline{V}_i \subset G_i$. Pentru $t \in K$ avem $\varphi(t) = 1$, deci

$$\sum_{i=1}^{n} f_i(t) = \sum_{i=1}^{n} g_i(t) \frac{1}{\sum_{i=1}^{n} g_i(t)} = 1.$$

Pentru $t \in V$ avem $\varphi(t) \leqslant 1$, deci

$$\sum_{i=1}^{n} f_i(t) \leqslant \sum_{i=1}^{n} g_i(t) \frac{1}{\sum_{i=1}^{n} g_i(t)} = 1.$$

Pentru $t \notin V$ avem $\varphi(t) = 0$, deci $\sum_{i=1}^{n} f_i(t) = 0 \leqslant 1$.

Funcțiile $(f_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ îndeplinesc condițiile cerute și propoziția este demonstrată.

Familia de funcții $(f_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ se numește *partiție continuă a unității pe K, subordonată acoperirii deschise $(G_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ a lui K.*

Propoziția 4. (Dini). *Fie $H \subset \mathcal{K}_+$ o mulțime filtrantă pentru relația $\leqslant$. Dacă $\sup_{g \in H} g \in \mathcal{K}_+$, atunci filtrul secțiunilor lui H converge uniform către anvelopa superioară $\sup_{g \in H} g$:*

$$\lim_{g \in H} g = \sup_{g \in H} g.$$

Să notăm $f = \sup_{g \in H} g$. Fie K suportul lui f. Fiecare funcție $g \in H$ are suportul conținut în K, deoarece $0 \leqslant g \leqslant f$.

Fie $\varepsilon > 0$; pentru orice punct $s \in K$, există o funcție g_s astfel ca $g_s(s) > f(s) - \varepsilon$. Deoarece funcțiile g_s și f sînt continue, există o vecinătate deschisă V_s a lui s astfel ca

$$g_s(t) > f(t) - \varepsilon \qquad \text{pentru } t \in V_s.$$

K fiind o mulțime compactă, există un număr finit de mulțimi deschise $V_1, \ldots, V_n$ care acoperă pe K și un număr finit de funcții $g_1, \ldots, g_n$ din H astfel ca pentru fiecare i să avem

$$g_i(t) > f(t) - \varepsilon \qquad \text{pentru } t \in V_i.$$

Dar H este filtrantă; există deci o funcție $g \in H$ astfel ca $g \geqslant g_i$ pentru $i = 1, 2, \ldots, n$. Atunci

$$g(t) > f(t) - \varepsilon \qquad \text{pentru orice } t \in T,$$

adică $g \geqslant f - \varepsilon$. Cum $g \leqslant f$, rezultă că f este limita uniformă a mulțimii filtrante H:

$$f = \lim_{g \in H} g$$

și propoziția este demonstrată.

Propoziția 5. *Fie $K \subset T$ o mulțime compactă, $\varphi : T \to [0, 1]$ o funcție continuă cu suport compact, egală cu 1 pe K, și o funcție $\mathbf{f} \in \mathcal{K}_E(T, K)$. Pentru orice număr $\varepsilon > 0$, există o familie finită $(\varphi_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ de aplicații ale lui T în $[0, 1]$, continue și cu suportul conținut în suportul lui φ, și o familie finită $(a_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ de elemente din E, astfel încît să avem*

$$\left| \mathbf{f}(t) - \sum_{i=1}^{n} a_i \varphi_i(t) \right| \leqslant \varepsilon \varphi(t) \text{ pentru orice } t \in T.$$

Mulțimea $U = \{t \in T \mid \varphi(t) > 0\}$ este deschisă, relativ compactă și $K \subset U$.

Fie $t \in \bar{U}$. Deoarece $\mathbf{f}$ este continuă, există o vecinătate deschisă V_t a lui t astfel ca $|\mathbf{f}(t) - \mathbf{f}(t')| < \frac{\varepsilon}{2}$ pentru orice $t' \in V_t$. Pentru $t', t'' \in V_t$ avem atunci $|\mathbf{f}(t') - \mathbf{f}(t'')| < \varepsilon$. Deoarece $\bar{U}$ este compactă, există o familie finită $(V_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ de mulțimi deschise care acoperă pe K, astfel ca pentru fiecare i să avem

$$|\mathbf{f}(t') - \mathbf{f}(t'')| < \varepsilon \qquad \text{oricare ar fi } t', t'' \in V_i.$$

Fie $(h_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ o partiție continuă a unității pe $\bar{U}$, subordonată acoperirii $(V_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ a lui $\bar{U}$. Avem

$$\sum_{i=1}^{n} h_i(t) = 1 \qquad \text{pentru } t \in \bar{U}.$$

Să punem $\varphi_i = h_i \varphi$, $1 \leqslant i \leqslant n$; funcțiile φ_i sînt aplicații continue ale lui T în $[0, 1]$, cu suportul conținut în $\bar{U} \cap V_i$ și $\sum_{i=1}^{n} \varphi_i = \varphi$.

În fiecare mulțime V_i să alegem un punct t_i, și să notăm $a_i = \mathbf{f}(t_i) \in E$. Dacă $t \in V_i$ avem

$$|\mathbf{f}(t)\varphi_i(t) - a_i\varphi_i(t)| = \varphi_i(t)\,|\mathbf{f}(t) - \mathbf{f}(t_i)| \leqslant \varepsilon\varphi_i(t).$$

Inegalitatea

$$|\mathbf{f}(t)\,\varphi_i(t) - a_i\,\varphi_i(t)| \leqslant \varepsilon\varphi_i(t)$$

este adevărată și dacă $t \notin V_i$, deoarece în acest caz $\varphi_i(t) = 0$. Ținînd seama de faptul că $\mathbf{f} = \mathbf{f} \sum_{i=1}^{n} \varphi_i$, deducem

$$\left| \mathbf{f}(t) - \sum_{i=1}^{n} a_i\varphi_i(t) \right| = \left| \sum_{i=1}^{n} \varphi_i(t)\,\mathbf{f}(t) - \sum_{i=1}^{n} a_i\varphi_i(t) \right| \leqslant \sum_{i=1}^{n} \left| \varphi_i(t)\,\mathbf{f}(t) - a_i\varphi_i(t) \right| \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{i=1}^{n} \varphi_i(t)\,\varepsilon = \varepsilon\,\varphi(t)$$

pentru orice $t \in T$. Propoziția este demonstrată.

Corolar. *Pentru orice mulțime compactă $K \subset T$ și orice vecinătate compactă U a lui K, spațiul $\mathcal{H}_E(T, U)$, al combinațiilor liniare $\sum_{i=1}^{n} a_i \varphi_i$, cu $a_i \in E$ și $\varphi_i \in \mathcal{K}_+(T, U)$, este dens în spațiul $\mathcal{K}_E(T, K)$ pentru topologia convergenței uniforme.*

Definiția 1. *Spunem că un subspațiu $\mathcal{H}$ al spațiului $\mathcal{K}_E(T)$ este bogat, dacă pentru orice mulțime compactă $K \subset T$ există o vecinătate relativ compactă U a lui K, astfel încît orice funcție $\mathbf{f}$ din $\mathcal{K}_E(T, K)$ se poate aproxima uniform prin funcții din $\mathcal{H}$, cu suportul conținut în U.*

Dacă T este compact, a spune că $\mathcal{H}$ este bogat, înseamnă că este dens în $\mathcal{C}_E(T)$. Dacă T nu este compact, orice spațiu bogat este dens în $\mathcal{K}_E(T)$, dar afirmația reciprocă nu este adevărată.

Cu această definiție corolarul 1 se poate enunța astfel:

Spațiul $\mathcal{H}_E(T)$ al combinațiilor liniare $\sum_{i=1}^{n} a_i \varphi_i$ cu $a_i \in E$ și $\varphi_i \in \mathcal{K}_+(T)$ este bogat.

Propoziția 6. *Spațiul $\mathcal{K}_E(T)$ este dens în spațiul $\mathcal{C}_E(T)$ pentru topologia convergenței compacte.*

Într-adevăr, fie $\mathbf{f} \in \mathcal{C}_E(T)$. Pentru orice mulțime compactă $K \subset T$ există o funcție $\varphi \in \mathcal{K}_+(T)$, astfel ca $\varphi(t) = 1$ pentru $t \in K$; atunci $\mathbf{g} = \mathbf{f}\varphi \in \mathcal{K}_E(T)$ și $\mathbf{f}(t) = \mathbf{g}(t)$ pentru $t \in K$. Așadar, funcția $\mathbf{f}$ se poate aproxima uniform, pe fiecare mulțime compactă, cu funcții $\mathbf{g}$ din $\mathcal{K}_E(T)$. Rezultă că spațiul $\mathcal{K}_E(T)$ este dens în spațiul $\mathcal{C}_E(T)$ pentru topologia convergenței uniforme pe mulțimile compacte.

2. Definiția măsurii

Fie E și F două spații Banach (ambele reale sau complexe). În particular, unul sau ambele spații E și F pot fi R sau C, iar C poate fi considerat spațiu Banach real sau complex.

Definiția 2. *Se numește măsură vectorială pe T în raport cu spațiile E și F, sau (E, F)-măsura pe T, orice aplicație liniară $\mathbf{m} : \mathcal{K}_E(T) \to F$ care are proprietatea că oricare ar fi mulțimea compactă $K \subset T$, restricția lui $\mathbf{m}$ la subspațiul $\mathcal{K}_E(T, K)$ este continuă pentru topologia convergenței uniforme.*

Valoarea $\mathbf{m}(\mathbf{f})$ a măsurii $\mathbf{m}$ pentru o funcție $\mathbf{f} \in \mathcal{K}_E(T)$ se numește *integrala lui $\mathbf{f}$ în raport cu $\mathbf{m}$* și se notează, încă, $\int \mathbf{f}\, d\mathbf{m}$ sau $\int \mathbf{f}(t)\, d\mathbf{m}(t)$.

A spune că operația $\mathbf{m} : \mathcal{K}_E(T) \to F$ este o măsură pe T, înseamnă că $\mathbf{m}$ verifică următoarele condiții:

1) $\mathbf{m}(\mathbf{f} + \mathbf{g}) = \mathbf{m}(\mathbf{f}) + \mathbf{m}(\mathbf{g})$ *pentru* $\mathbf{f}, \mathbf{g} \in \mathcal{K}_E(T)$;

2) $\mathbf{m}(\alpha\, \mathbf{f}) = \alpha\, \mathbf{m}(\mathbf{f})$ *pentru* $\mathbf{f} \in \mathcal{K}_E(T)$ și α scalar:

3) *pentru fiecare mulțime compactă $K \subset T$ există un număr $a_K > 0$ astfel încît să avem*

$$|\mathbf{m}(\mathbf{f})| \leqslant a_K \|\mathbf{f}\| \text{ pentru orice funcție } \mathbf{f} \in \mathcal{K}_E(T, K).$$

Cînd nu va fi pericol de confuzie asupra spațiilor E și F, în loc de (E, F)-măsură vom spune, mai simplu, măsură.

Se verifică imediat că mulțimea (E, F)-măsurilor pe T este un *spațiu vectorial* (real sau complex după cum E și F sînt considerate spații vectoriale reale sau complexe), pentru operațiile obișnuite $\mathbf{m}+\mathbf{n}$ și $\alpha\mathbf{m}$.

Dacă T este *compact*, a spune că $\mathbf{m}$ este o măsură, înseamnă că aplicația liniară $\mathbf{m} : \mathscr{C}_E(T) \to F$ este continuă pentru topologia convergenței uniforme. Spațiul $(E), F)$-măsurilor pe T coincide în acest caz cu spațiul $\mathscr{L}(\mathscr{C}_E, F)$ al aplicațiilor liniare și continue ale lui $\mathscr{C}_E$ în F. În particular, dacă $F = C$ (sau $F = R$), spațiul (E, C)- măsurilor pe T (respectiv spațiul (E, R)-măsurilor pe T) este dualul spațiului $\mathscr{C}_E(T)$.

Dacă T nu este compact, o măsură $\mathbf{m}$ nu este continuă, în general, pe întreg spațiul $\mathscr{K}_E(T)$, pentru topologia convergenței uniforme.

Observație. Dacă se consideră pe spațiul $\mathscr{K}_E(T)$ topologia *limită inductivă* a topologiilor convergenței uniforme, pe fiecare subspațiu $\mathscr{K}_E(T, K)$, cînd K parcurge mulțimea părților compacte ale lui T, atunci, a spune că $\mathbf{m}$ este o (E, F)-măsură, înseamnă că aplicația liniară $\mathbf{m} : \mathscr{K}_E(T) \to F$ este continuă pentru această topologie.

Pentru fiecare (E, F)-măsură $\mathbf{m}$ pe T notăm

$$\|\mathbf{m}\| = \sup_{\|\mathbf{f}\| \leqslant 1} |\mathbf{m}(\mathbf{f})|, \quad \mathbf{f} \in \mathscr{K}_E(T).$$

Următoarele proprietăți sînt imediate:

1) $0 \leqslant \|\mathbf{m}\| \leqslant +\infty$; $\|\mathbf{m}\| = 0$ *dacă și numai dacă* $\mathbf{m} = 0$;

2) $\|\alpha\,\mathbf{m}\| = |\alpha|\,\|\mathbf{m}\|$, α *scalar* *);

3) $\|\mathbf{m} + \mathbf{n}\| \leqslant \|\mathbf{m}\| + \|\mathbf{n}\|$.

Dacă T este *compact*, a spune că $\mathbf{m}$ este o măsură, înseamnă că $\|\mathbf{m}\| < +\infty$. Aplicația $\mathbf{m} \to \|\mathbf{m}\|$ este în acest caz o normă pe spațiul (E, F)-măsurilor pe T.

Exemple. 1) Pentru orice punct $t \in T$, aplicația $f \to f(t)$ a lui $\mathscr{K}(T)$ în R este o măsură pe T. Această măsură se notează ε_t și se numește măsura definită prin *masa unitate plasată în punctul* t.

Avem deci $\varepsilon_t(f) = f(t)$ pentru $f \in \mathscr{K}(T)$.

Dacă E este un spațiu Banach, aplicația $\mathbf{f} \to \mathbf{f}(t)$ a lui $\mathscr{K}_E(T)$ în E este de asemenea o măsură care se notează tot ε_t.

2) Fie $N \subset T$ o mulțime cu proprietatea că $N \cap K$ este o mulțime *finită*, oricare ar fi mulțimea compactă $K \subset T$ și fie $\alpha : T \to R$ o funcție astfel încît $N = \{t \in T \mid \alpha(t) \neq 0\}$. Pentru orice funcție $f \in \mathscr{K}(T)$ să notăm

$$\mu(f) = \sum_{t \in T} \alpha(t)\, f(t).$$

Suma din membrul drept este definită, deoarece numărul termenilor diferiți de 0 este finit. Se verifică ușor că aplicația $f \to \mu(f)$ este liniară. Pentru fiecare mulțime compactă $K \subset T$ să notăm

$$a_K = \sum_{t \in K} \alpha(t).$$

*) Se adoptă convenția $0 \cdot \infty = 0$. Conform acestei convenții, proprietatea 2) este adevărată și dacă $\alpha = 0$ și $\|\mathbf{m}\| = +\infty$.

Avem atunci

$$|\mu(f)| \leqslant a_K \|f\|, \text{ pentru } f \in \mathcal{K}(T, K)$$

deci μ este o măsură pe T.

Spunem că μ este o măsură *discretă, definită prin masele* $\alpha(t)$ *plasate în punctele* $t \in T$.

Dacă T este un spațiu discret, orice măsură $\mu : \mathcal{K}(T) \to R$ este discretă.

Într-adevăr, pentru fiecare $t \in T$ să notăm cu e_t funcția definită pe T prin $e_t(t) = 1$ și $e_t(s) = 0$ dacă $s \neq t$. Pentru orice funcție $f \in \mathcal{K}(T)$ avem atunci

$$f = \sum_{t \in T} f(t)\, e_t.$$

Dacă $\mu : \mathcal{K}(T) \to R$ este o măsură, notînd $\alpha(t) = \mu(e_t)$ avem

$$\mu(f) = \sum_{t \in T} f(t)\, \mu(e_t) = \sum_{t \in T} \alpha(t) f(t) \text{ pentru } f \in \mathcal{K}(T)$$

deci μ este o măsură discretă.

3) Mai general, fie $\alpha : T \to R$ o funcție astfel încît, pentru orice parte compactă $K \subset T$, să avem $a_K = \sum_{t \in K} |\alpha(t)| < +\infty$. Rezultă că mulțimea $\{t \in K \mid \alpha(t) \neq 0\}$ este cel mult numărabilă. Dacă pentru fiecare funcție $f \in \mathcal{K}(T)$ notăm

$$\mu(f) = \sum_{t \in T} \alpha(t) f(t),$$

atunci μ este o măsură pe T.

4) Fie $\mu : \mathcal{K}(T) \to R$ o măsură și $g : T \to R$ o funcție continuă. Pentru orice funcție $f \in \mathcal{K}(T)$, funcția fg este continuă și cu suport compact. Aplicația $f \to \mu(fg)$ a lui $\mathcal{K}(T)$ în R este o măsură. Într-adevăr, ea este liniară; dacă pentru fiecare mulțime compactă $K \subset T$, a_K verifică inegalitatea

$$|\mu(f)| \leqslant a_K \|f\| \text{ pentru } f \in \mathcal{K}(T, K),$$

atunci, notînd $b_K = a_K \|g\|$, avem

$$|\mu(fg)| \leqslant a_K \|f\| \|g\| = b_K \|f\| \text{ pentru } f \in \mathcal{K}(T, K)$$

deci aplicația $f \to \mu(fg)$ este o măsură. Această măsură se notează $g\mu$ și se numește produsul măsurii μ cu funcția g. Avem deci

$$(g\mu)(f) = \mu(fg) \text{ pentru } f \in \mathcal{K}(T).$$

Mai departe se va studia produsul unei măsuri prin funcții care nu sînt neapărat continue.

Propoziția 7. *Fie* H, E, F, G *patru spații Banach. Dacă* $u : H \to E$ *și* $v : F \to G$ *sînt aplicații liniare continue iar* $\mathbf{m} : \mathcal{K}_E(T) \to F$ *este o măsură, atunci aplicația* $\mathbf{n} : \mathcal{K}_H(T) \to G$ *definită prin egalitatea*

$$\mathbf{n}(\mathbf{f}) = v \circ \mathbf{m}(u \circ \mathbf{f}) \text{ pentru } \mathbf{f} \in \mathcal{K}_H(T)$$

este o măsură și $\|\mathbf{n}\| \leqslant |v|\, \|\mathbf{m}\|\, |u|$.

Liniaritatea aplicației $\mathbf{n}$ rezultă din liniaritatea aplicațiilor u, $\mathbf{m}$ și v. Fie $K \subset T$ o mulțime compactă și fie $a_K > 0$ astfel ca

$$|\mathbf{m}(\mathbf{g})| \leqslant a_K \|\mathbf{g}\| \text{ pentru orice } \mathbf{g} \in \mathcal{K}_E(T, K).$$

Pentru orice funcție $\mathbf{f} \in \mathcal{K}_H(T, K)$, avem $u \circ \mathbf{f} \in \mathcal{K}_E(T, K)$, și

$$\|u \circ \mathbf{f}\| = \sup_{t \in T} |u(\mathbf{f}(t))| \leqslant |u| \sup_{t \in T} |\mathbf{f}(t)| = |u| \, \|\mathbf{f}\|$$

deci

$$|v \circ \mathbf{m}(u \circ \mathbf{f})| \leqslant |v| \, |\mathbf{m}(u \circ \mathbf{f})| \leqslant |v| \, a_K \|u \circ \mathbf{f}\| \leqslant |v| \, |u| \, a_K \|\mathbf{f}\|$$

adică, notînd $b_K = |v| \, |u| \, a_K$,

$$|\mathbf{n}(\mathbf{f})| \leqslant b_K \|\mathbf{f}\| \text{ pentru } \mathbf{f} \in \mathcal{K}_H(T, K).$$

Aceasta înseamnă că $\mathbf{n}$ este o măsură. Avem apoi

$$|\mathbf{n}(\mathbf{f})| = |v \circ \mathbf{m}(u \circ \mathbf{f})| \leqslant |v| \, |\mathbf{m}(u \circ \mathbf{f})| \leqslant |v| \, \|\mathbf{m}\| \, \|u \circ \mathbf{f}\| \leqslant |v| \, \|\mathbf{m}\| \, |u| \, \|\mathbf{f}\|$$

de unde $\|\mathbf{n}\| \leqslant |v| \, \|\mathbf{m}\| \, |u|$.

Cu aceasta propoziția este demonstrată.

Corolarul 1. *Fie H, E, F trei spații Banach. Dacă $u : H \to E$ este o aplicație liniară continuă iar $\mathbf{m} : \mathcal{K}_E(T) \to F$ este o măsură, atunci aplicația $\mathbf{n} : \mathcal{K}_H(T) \to F$ definită prin egalitatea*

$$\mathbf{n}(\mathbf{f}) = \mathbf{m}(u \circ \mathbf{f}) \text{ pentru } \mathbf{f} \in \mathcal{K}_H(T)$$

este o măsură și $\|\mathbf{n}\| \leqslant |u| \, \|\mathbf{m}\| \leqslant +\infty$.

Într-adevăr, în propoziția 7 se ia $G = F$ și $v(y) = y$ pentru $y \in F$.

Corolarul 2. *Dacă $\mathbf{m} : \mathcal{K}_E(T) \to F$ este o măsură iar E_1 este un subspațiu Banach al lui E, atunci restricția $\mathbf{m}_1 : \mathcal{K}_{E_1}(T) \to F$ a lui $\mathbf{m}$ la subspațiul $\mathcal{K}_{E_1}(T)$ este o măsură și $\|\mathbf{m}_1\| \leqslant \|\mathbf{m}\| \leqslant +\infty$.*

Se ia în corolarul precedent $H = E_1$ și u aplicația canonică a lui E_1 în E, $u(x) = x$ pentru $x \in E_1$, și se observă că

$$\mathbf{m}_1(\mathbf{f}) = \mathbf{m}(u \circ \mathbf{f}) \text{ pentru } \mathbf{f} \in \mathcal{K}_{E_1}(T)$$

și $|u| = 1$.

Corolarul 3. *Dacă $\mathbf{m} : \mathcal{K}_E(T) \to F$ este o măsură, atunci, pentru orice $x \in E$, aplicația $\mathbf{m}_x : \mathcal{K}(T) \to F$ definită prin egalitatea*

$$\mathbf{m}_x(\varphi) = \mathbf{m}(\varphi x) \text{ pentru } \varphi \in \mathcal{K}(T)$$

este o măsură și $\|\mathbf{m}_x\| \leqslant \|\mathbf{m}\| \, |x|$. Avem

$$\mathbf{m}_{x+y} = \mathbf{m}_x + \mathbf{m}_y \text{ și } \mathbf{m}_{\alpha x} = \alpha \mathbf{m}_x, \; x, y \in E, \; \alpha \text{ scalar.}$$

Într-adevăr, aplicația $u(\alpha) = \alpha x$ a lui R în E este liniară și continuă, $|u| = |x|$, iar $\mathbf{m}_x(\varphi) = \mathbf{m}(u \circ \varphi)$. Se aplică deci corolarul 1. Egalitățile

$$\mathbf{m}_{x+y} = \mathbf{m}_x + \mathbf{m}_y \text{ și } \mathbf{m}_{\alpha x} = \alpha \mathbf{m}_x$$

se verifică fără dificultate.

Corolarul 4. *Fie E, F, G trei spații Banach. Dacă $v : F \to G$ este o aplicație liniară continuă iar $\mathbf{m} : \mathcal{K}_E(T) \to F$ este o măsură, atunci aplicația $\mathbf{n} : \mathcal{K}_E(T) \to G$ definită prin egalitatea*

$$\mathbf{n}(\mathfrak{f}) = v \circ \mathbf{m}(\mathfrak{f}) \text{ pentru } \mathfrak{f} \in \mathcal{K}_E(T)$$

este o măsură și $\|\mathbf{n}\| \leqslant |v| \, \|\mathbf{m}\|$.

Într-adevăr, în propoziția 7 se ia $H = E$ și $u(x) = x$ pentru $x \in H$.

Corolarul 5. *Dacă $\mathbf{m} : \mathcal{K}_E(T) \to F$ este o măsură, atunci pentru orice $z' \in F'$, aplicația $z' \circ \mathbf{m} : \mathcal{K}_E(T) \to C$ definită prin egalitatea*

$$(z' \circ \mathbf{m})(\mathfrak{f}) = < \mathbf{m}(\mathfrak{f}), z' > \text{ pentru } \mathfrak{f} \in \mathcal{K}_E(T)$$

este o măsură. Avem $\|z' \circ \mathbf{m}\| \leqslant |z'| \, \|\mathbf{m}\|$ *și* $\|\mathbf{m}\| = \sup_{|z'| \leqslant 1} \|z' \circ \mathbf{m}\|$.

Se ia, în corolarul 4, $G = C$ și $v = z'$. Avem apoi

$$\|\mathbf{m}\| = \sup_{\|\mathfrak{f}\| \leqslant 1} |\mathbf{m}(\mathfrak{f})| = \sup_{\|\mathfrak{f}\| \leqslant 1} \sup_{|z'| \leqslant 1} |< \mathbf{m}(\mathfrak{f}), z' > | =$$

$$= \sup_{|z'| \leqslant 1} \sup_{\|\mathfrak{f}\| \leqslant 1} |(z' \circ \mathbf{m})(\mathfrak{f})| = \sup_{|z'| \leqslant 1} \|z' \circ \mathbf{m}\|.$$

Corolarul 6. *Dacă $\mathbf{m} : \mathcal{K}_E(T) \to F$ este o măsură, atunci pentru orice $x \in E$ și orice $z' \in F'$, aplicația $z' \circ \mathbf{m}_x : \mathcal{K}(T) \to C$ definită prin egalitatea*

$$(z' \circ \mathbf{m}_x)(\varphi) = < \mathbf{m}(\varphi x), z' > \text{ pentru } \varphi \in \mathcal{K}(T)$$

este o măsură. Avem $\|z' \circ \mathbf{m}_x\| < |z'| \, \|\mathbf{m}\| \, |x|$ *și* $z' \circ \mathbf{m}_x = (z' \circ \mathbf{m})_x$.

Într-adevăr,

$$(z' \circ \mathbf{m})_x(\varphi) = (z' \circ \mathbf{m})(\varphi x) = < \mathbf{m}(\varphi x), z' > = < \mathbf{m}_x(\varphi), z' > = (z' \circ \mathbf{m}_x)(\varphi)$$

de unde $(z' \circ \mathbf{m})_x = z' \circ \mathbf{m}_x$. Restul afirmațiilor rezultă din proporția 7 sau din corolarele 3 și 5.

Vom spune că o aplicație $x \to \bar{x}$ a unui spațiu vectorial X în X este o *involuție*, dacă îndeplinește următoarele condiții:

1) $\overline{x + y} = \bar{x} + \bar{y}$;

2) $\overline{\alpha x} = \bar{\alpha} \, \bar{x}$, α scalar ($\bar{\alpha}$ conjugatul complex al lui α);

3) $\bar{\bar{x}} = x$.

Dacă X este o algebră se impune în plus condiția:

4) $\overline{xy} = \bar{y} \, \bar{x}$.

Dacă X este un spațiu normat, vom presupune, fără altă specificație, că involuția este izometrică:

5) $|\bar{x}| = |x|$.

Dacă X este spațiul numerelor complexe, aplicația $\alpha \to \bar{\alpha}$, unde $\bar{\alpha}$ este conjugatul complex al lui α, este o involuție de algebră Banach.

Dacă X este un spațiu vectorial real, proprietatea 2) se scrie $\overline{\alpha x} = \alpha \bar{x}$, deci, în acest caz, involuția este o aplicație liniară.

Fie E și F două spații Banach cu involuție. Pentru orice funcție $\mathfrak{f}: T \to E$ vom nota cu $\overline{\mathfrak{f}}: T \to E$ funcția definită prin egalitatea

$$\overline{\mathfrak{f}}(t) = \overline{\mathfrak{f}(t)}, \text{ pentru } t \in T.$$

Aplicația $\mathfrak{f} \to \overline{\mathfrak{f}}$ este o involuție pe spațiul aplicațiilor lui T în E. Avem $|\overline{\mathfrak{f}}| = |\mathfrak{f}|$ și $\|\overline{\mathfrak{f}}\| = \|\mathfrak{f}\|$. Dacă $\mathfrak{f}$ este continuă, atunci $\overline{\mathfrak{f}}$ este continuă iar $\mathfrak{f}$ și $\overline{\mathfrak{f}}$ au același suport.

Lemă. *Pentru fiecare aplicație liniară și continuă $U: E \to F$, aplicația $\bar{U}: E \to F$ definită prin egalitatea*

$$\bar{U}x = \overline{U\bar{x}}, \text{ pentru } x \in E,$$

este liniară și continuă și $|\bar{U}| = |U|$. Aplicația $U \to \bar{U}$ este o involuție pe spațiul $\mathcal{L}(E, F)$.

Se verifică imediat că $\bar{U}$ este liniară. Avem apoi

$$|\bar{U}x| = |\overline{U\bar{x}}| = |U\bar{x}| \leqslant |U|\,|\bar{x}| = |U|\,|x|,$$

deci $|\bar{U}| \leqslant |U|$, deci $\bar{U} \in \mathcal{L}(E, F)$.

Deoarece $\bar{\bar{U}} = U$, deducem apoi $|U| = |\bar{\bar{U}}| \leqslant |\bar{U}|$, deci $|\bar{U}| = |U|$. Celelalte proprietăți ale involuției $U \to \bar{U}$ se verifică fără dificultate.

Observație. Egalitatea $\bar{U}x = \overline{U\bar{x}}$ este echivalentă cu egalitatea

$$\overline{Ux} = \bar{U}\bar{x}.$$

Propoziția 8. *Fie E și F două spații Banach cu involuție. Dacă $\mathfrak{m}: \mathcal{K}_E(T) \to F$ este o măsură, atunci aplicația $\overline{\mathfrak{m}}: \mathcal{K}_E(T) \to F$ definită prin egalitatea*

$$\overline{\mathfrak{m}}(\mathfrak{f}) = \overline{\mathfrak{m}(\bar{f})}, \text{ pentru } \mathfrak{f} \in \mathcal{K}_E(T),$$

este o măsură și $\|\overline{\mathfrak{m}}\| = \|\mathfrak{m}\| \leqslant +\infty$. Aplicația $\mathfrak{m} \to \overline{\mathfrak{m}}$ este o involuție pe spațiul măsurilor $\mathfrak{m}: \mathcal{K}_E(T) \to F$.

Se verifică ușor că $\overline{\mathfrak{m}}$ este liniară. Fie $K \subset T$ o mulțime compactă și $a_K > 0$ astfel încît

$$|\mathfrak{m}(\mathfrak{f})| < a_K \|\mathfrak{f}\|, \text{ pentru } \mathfrak{f} \in \mathcal{K}_E(T, K).$$

Pentru orice funcție $\mathfrak{f} \in \mathcal{K}_E(T, K)$ avem atunci

$$|\overline{\mathfrak{m}}(\mathfrak{f})| = |\overline{\mathfrak{m}(\bar{\mathfrak{f}})}| = |\mathfrak{m}(\bar{\mathfrak{f}})| < a_K \|\bar{\mathfrak{f}}\| = a_K \|\mathfrak{f}\|,$$

deci $\overline{\mathfrak{m}}$ este o măsură.

Proprietățile de involuție ale aplicației $\mathfrak{m} \to \overline{\mathfrak{m}}$ se verifică fără dificultate, și de asemenea egalitatea $\|\overline{\mathfrak{m}}\| = \|\mathfrak{m}\|$.

Observații. Pentru orice măsură $\mathfrak{m}: \mathcal{K}_E(T) \to F$ și orice funcție $\mathfrak{f} \in \mathcal{K}_E(T)$ avem

$$\overline{\mathfrak{m}(\mathfrak{f})} = \overline{\mathfrak{m}}(\bar{\mathfrak{f}}).$$

3. Două metode de a defini o măsură

Propoziția 9. *Fie $(G_\alpha)_{\alpha\in A}$ o familie de mulțimi deschise care acoperă pe T și pentru fiecare $\alpha\in A$ fie $\mathbf{m}_\alpha : \mathcal{K}_E(G_\alpha)\to F$ o măsură vectorială pe G_α. Dacă pentru fiecare pereche (α,β) de indici, restricțiile măsurilor $\mathbf{m}_\alpha$ și $\mathbf{m}_\beta$ la subspațiul $\mathcal{K}_E(G_\alpha\cap G_\beta)$ sînt egale, există o măsură $\mathbf{m}:\mathcal{K}_E(T)\to F$ și numai una, a cărei restricție la spațiul $\mathcal{K}_E(G_\alpha)$ este egală cu $\mathbf{m}_\alpha$, oricare ar fi $\alpha\in A$.*

a) Fie $\mathbf{f}\in\mathcal{K}_E(T)$ o funcție oarecare și K suportul său. Există o familie finită $(G_{\alpha_i})_{1\leqslant i\leqslant n}$ care acoperă pe K. Fie $(\varphi_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ o partiție continuă a unității pe K, subordonată acoperirii $(G_{\alpha_i})_{1\leqslant i\leqslant n}$: fiecare funcție φ_i are valori în $[0,1]$, are suportul compact conținut în G_{α_i}, iar $\sum_{i=1}^{n}\varphi_i(t)=1$ pentru $t\in K$. Atunci

$$\mathbf{f}=\sum_{i=1}^{n}\mathbf{f}\,\varphi_i$$

iar $\mathbf{f}\,\varphi_i\in\mathcal{K}_E(G_{\alpha_i})$. Să punem

$$\mathbf{m}(\mathbf{f})=\sum_{i=1}^{n}\mathbf{m}_{\alpha_i}(\mathbf{f}\,\varphi_i).$$

Să arătăm că $\mathbf{m}(\mathbf{f})$ nu depinde decît de $\mathbf{f}$. Într-adevăr, fie $(G_{\beta_j})_{1\leqslant j\leqslant m}$ o altă acoperire finită deschisă a lui K și fie $(\psi_j)_{1\leqslant j\leqslant m}$ o partiție continuă a unității pe K, subordonată acoperirii $(G_{\beta_j})_{1\leqslant j\leqslant m}$; fiecare funcție ψ_j are valori în $[0,1]$, are suportul compact conținut în G_{β_j} și $\sum_{j=1}^{m}\psi_j(t)=1$ pentru $t\in K$. Atunci

$$\mathbf{f}=\sum_{j=1}^{m}\mathbf{f}\,\psi_j$$

și $\mathbf{f}\psi_j\in\mathcal{K}_E(G_{\beta_j})$.

Pentru fiecare i avem

$$\mathbf{f}\,\varphi_i=\sum_{j=1}^{m}\mathbf{f}\,\varphi_i\,\psi_j\in\mathcal{K}_E(G_{\alpha_i})$$

deci

$$\mathbf{m}_{\alpha_i}(\mathbf{f}\,\varphi_i)=\sum_{j=1}^{m}\mathbf{m}_{\alpha_i}(\mathbf{f}\,\varphi_i\,\psi_j)$$

de unde

$$\sum_{i=1}^{n}\mathbf{m}_{\alpha_i}(\mathbf{f}\,\varphi_i)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}\mathbf{m}_{\alpha_i}(\mathbf{f}\,\varphi_i\,\psi_j).$$

De asemenea, pentru fiecare j avem

$$\mathbf{f}\,\psi_j=\sum_{i=1}^{n}\mathbf{f}\,\varphi_i\,\psi_j\in\mathcal{K}_E(G_{\beta_j})$$

deci

$$\mathbf{m}_{\beta_j}(\mathbf{f}\,\psi_j) = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{m}_{\beta_j}(\mathbf{f}\,\varphi_i\,\psi_j)$$

de unde

$$\sum_{j=1}^{m} \mathbf{m}_{\beta_j}(\mathbf{f}\,\psi_j) = \sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n} \mathbf{m}_{\beta_j}(\mathbf{f}\,\varphi_i\,\psi_j).$$

Dar pentru fiecare pereche de indici (i, j), funcția $\mathbf{f}\,\varphi_i\,\psi_j$ aparține spațiului $\mathcal{K}_E(G_{\alpha_i} \cap G_{\beta_j})$, iar restricțiile măsurilor $\mathbf{m}_{\alpha_i}$ și $\mathbf{m}_{\beta_j}$ la acest spațiu coincid :

$$\mathbf{m}_{\alpha_i}(\mathbf{f}\,\varphi_i\,\psi_j) = \mathbf{m}_{\beta_j}(\mathbf{f}\varphi_i\,\psi_j).$$

Rezultă

$$\sum_{i=1}^{n} \mathbf{m}_{\alpha_i}(\mathbf{f}\,\varphi_i) = \sum_{j=1}^{m} \mathbf{m}_{\beta_j}(\mathbf{f}\,\psi_j).$$

Așadar, egalitatea

$$\mathbf{m}(\mathbf{f}) = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{m}_{\alpha_i}(\mathbf{f}\,\varphi_i)$$

definește pe $\mathbf{m}(\mathbf{f})$ fără ambiguitate.

Am definit astfel o aplicație $\mathbf{m} : \mathcal{K}_E(T) \to F$.

b) Restricția lui $\mathbf{m}$ la $\mathcal{K}_E(G_\alpha)$ coincide cu $\mathbf{m}_\alpha$. Într-adevăr, dacă $\mathbf{f} \in \mathcal{K}_E(G_\alpha)$, suportul lui K este acoperit de familia formată numai din G_α; dacă $\varphi : T \to [0,1]$ are suportul compact conținut în G_α și $\varphi(t) = 1$ pentru $t \in K$, avem $\mathbf{f} = \mathbf{f}\,\varphi$ și

$$\mathbf{m}(\mathbf{f}) = \mathbf{m}_\alpha(\mathbf{f}\,\varphi) = \mathbf{m}_\alpha(\mathbf{f}).$$

c) Aplicația $\mathbf{m}$ este liniară. Fie $\mathbf{f}, \mathbf{g} \in \mathcal{K}_E(T)$. Există o mulțime compactă K ce conține suportul ambelor funcții. Dacă $(G_{\alpha_i})_{1 \leqslant i \leqslant n}$ este o acoperire finită a lui K și $(\varphi_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ este o partiție corespunzătoare a unității pe K, avem

$$\mathbf{m}(\mathbf{f}) = \sum_i \mathbf{m}_{\alpha_i}(\mathbf{f}\,\varphi_i),$$

$$\mathbf{m}(\mathbf{g}) = \sum_i \mathbf{m}_{\alpha_i}(\mathbf{g}\,\varphi_i),$$

Dar

$$\mathbf{f} + \mathbf{g} = \sum_i (\mathbf{f} + \mathbf{g})\,\varphi_i,$$

deci

$$\mathbf{m}(\mathbf{f} + \mathbf{g}) = \sum_i \mathbf{m}_{\alpha_i}[(\mathbf{f} + \mathbf{g})\,\varphi_i] = \sum_i \mathbf{m}_{\alpha_i}(\mathbf{f}\,\varphi_i + \mathbf{g}\,\varphi_i) =$$

$$= \sum_i \mathbf{m}_{\alpha_i}(\mathbf{f}\,\varphi_i) + \sum_i \mathbf{m}_{\alpha_i}(\mathbf{g}\,\varphi) = \mathbf{m}(\mathbf{f}) + \mathbf{m}(\mathbf{g}).$$

Omogenitatea $\mathbf{m}(c\mathbf{f}) = c\mathbf{m}(\mathbf{f})$, ($c$ scalar), se demonstrează în mod asemănător.

d) Să arătăm că $\mathbf{m}$ este o măsură. Fie $K \subset T$ o mulțime compactă, $(G_{\alpha_i})_{1 \leqslant i \leqslant n}$ o acoperire finită a lui K și $(\varphi_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ o partiție continuă a unității pe K subordonată acestei acoperiri. Pentru fiecare i, fie K_i suportul funcției φ_i. Deoarece $\mathbf{m}_{\alpha_i}$ este o măsură, există un număr $a_i >$ o astfel ca

$$|\mathbf{m}_{\alpha_i}(\mathbf{g})| \leqslant a_i \|\mathbf{g}\| \text{ pentru } \mathbf{g} \in \mathcal{K}(T, K_i).$$

Pentru orice funcție $\mathbf{f} \in \mathcal{K}_E(T, K)$ avem deci

$$|\mathbf{m}_{\alpha_i}(\mathbf{f}\varphi_i)| \leqslant a_i \|\mathbf{f}\varphi_i\| \leqslant a_i \|\mathbf{f}\|$$

și deci

$$|\mathbf{m}(\mathbf{f})| \leqslant \left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right) \|\mathbf{f}\|.$$

Rezultă că restricția lui $\mathbf{m}$ la spațiul $\mathcal{K}_E(T, K)$ este continuă, adică $\mathbf{m}$ este o măsură.

e) Rămîne de demonstrat unicitatea lui $\mathbf{m}$. Fie $\mathbf{m}' : \mathcal{K}_E(T) \to F$ o măsură astfel încît pentru fiecare $\alpha \in A$, restricția sa la spațiul $\mathcal{K}_E(G_\alpha)$ să fie egală cu $\mathbf{m}_\alpha$. Să arătăm că $\mathbf{m}' = \mathbf{m}$. Fie $\mathbf{f} \in \mathcal{K}_E(T)$, fie K suportul lui $\mathbf{f}$, $(G_{\alpha_i})_{1 \leqslant i \leqslant n}$ o acoperire finită a lui K și $(\varphi_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ o partiție continuă a unității pe K, subordonată acestei acoperiri. Avem

$$\mathbf{f} = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{f}\varphi_i$$

și $\mathbf{f}\varphi_i \in \mathcal{K}_E(G_{\alpha_i})$ pentru fiecare i. Atunci

$$\mathbf{m}'(\mathbf{f}) = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{m}'(\mathbf{f}\varphi_i) = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{m}_{\alpha_i}(\mathbf{f}\varphi_i) = \mathbf{m}(\mathbf{f})$$

deci $\mathbf{m}' = \mathbf{m}$.

Cu aceasta, propoziția este demonstrată.

Corolar. (Principiul localizării). *Fie $(G_\alpha)_{\alpha \in A}$ o familie de mulțimi deschise, $\mathbf{m}$, $\mathbf{n} : \mathcal{K}_E(T) \to F$ două măsuri pe T. Dacă pentru fiecare $\alpha \in A$, restricțiile măsurilor $\mathbf{m}$ și $\mathbf{n}$ la spațiul $\mathcal{K}_E(G_\alpha)$ sînt egale, atunci restricțiile lui $\mathbf{m}$ și $\mathbf{n}$ la spațiul $\mathcal{K}_E(\bigcup_{\alpha \in A} G_\alpha)$ sînt de asemenea egale. Dacă, în plus, familia $(G_\alpha)_{\alpha \in A}$ acoperă pe T, atunci $\mathbf{m}$ și $\mathbf{n}$ sînt egale.*

Propoziția 10. *Fie $\mathcal{H}_E$ un subspațiu bogat al spațiului $\mathcal{K}_E(T)$. O aplicație liniară $\mathbf{n} : \mathcal{H}_E \to F$ se poate prelungi la o măsură $\mathbf{m} : \mathcal{K}_E(T) \to F$, dacă și numai dacă pentru orice parte compactă $K \subset T$, restricția lui $\mathbf{n}$ la subspațiul funcțiilor din $\mathcal{H}_E$ care au suportul în K, este continuă pentru topologia convergenței uniforme. Prelungirea este atunci unică.*

Să presupunem mai întîi că $\mathbf{m} : \mathcal{K}_E(T) \to F$ este o măsură, a cărei restricție la spațiul $\mathcal{H}_E$ este egală cu $\mathbf{n}$. Pentru fiecare parte compactă $K \subset T$ există un număr a_K astfel ca

$$|\mathbf{m}(\mathbf{f})| \leqslant a_K \|\mathbf{f}\| \text{ pentru } \mathbf{f} \in \mathcal{K}_E(T, K).$$

În particular, relația precedentă este adevărată pentru funcțiile din $\mathscr{H}_E$ cu suportul în K. Aceasta înseamnă că restricția $\mathbf{n}$ a lui $\mathbf{m}$ la $\mathscr{H}_E$ este continuă pe subspațiul $\mathscr{H}_E \cap \mathscr{K}_E(T, K)$, pentru topologia convergenței uniforme.

Reciproc, fie $\mathbf{n} : \mathscr{H}_E \to F$ o aplicație liniară cu proprietatea din enunț. Fie $K \subset T$ o parte compactă și fie U o vecinătate compactă a lui K astfel ca spațiul $\mathscr{H}_E(U) = \mathscr{H}_E \cap \mathscr{K}_E(T, U)$ să fie dens în $\mathscr{K}_E(T, K)$ pentru topologia convergenței uniforme. Cum $\mathbf{n}$ este continuă pe $\mathscr{H}_E(U)$ pentru această topologie, se poate prelungi în mod unic la o aplicație liniară și continuă $\mathbf{n}_U : \overline{\mathscr{H}_E(U)} \to F$. Deoarece $\mathscr{K}_E(T, K) \subset \overline{\mathscr{H}_E(U)}$, să notăm cu $\mathbf{m}_{K,U}$ restricția lui $\mathbf{n}_U$ la $\mathscr{K}_F(T, K)$.

Aplicația $\mathbf{m}_{K,U} : \mathscr{K}_E(T, K)$ nu depinde de U, ci numai de K. Dacă U' și U'' sînt două vecinătăți compacte ale lui K astfel ca $\mathscr{H}_E(U')$ și $\mathscr{H}_E(U'')$ să fie dense în $\mathscr{K}_E(T, K)$, atunci $U = U' \cup U''$ este o vecinătate compactă a lui K și $\mathscr{H}_E(U)$ este de asemenea dens în $\mathscr{K}_E(T, K)$. Deoarece $\overline{\mathscr{H}_E(U')} \subset \overline{\mathscr{H}_E(U)}$ și $\overline{\mathscr{H}_E(U'')} \subset \overline{\mathscr{H}_E(U)}$, rezultă că $\mathbf{n}_{U'}$ este restricția lui $\mathbf{n}_U$ la $\mathscr{H}_E(U')$ și $\mathbf{n}_{U''}$ este restricția lui $\mathbf{n}_U$ la $\mathscr{H}_E(U'')$. Rezultă atunci că $\mathbf{m}_{K,U'} = \mathbf{m}_{K,U}$ și $\mathbf{m}_{K,U''} = \mathbf{m}_{K,U}$ de unde $\mathbf{m}_{K,U'} = \mathbf{m}_{K,U''}$ și deci $\mathbf{m}_{K,U}$ este independentă de U.

Să notăm cu $\mathbf{m}_K$ aplicația liniară a lui $\mathscr{K}_E(T, K)$ în F, definită mai sus.

Pentru două mulțimi compacte K' și K'' astfel încît $K' \subset K''$, restricția lui $\mathbf{m}_{K''}$ la subspațiul $\mathscr{K}_E(T, K')$ coincide cu $\mathbf{m}_{K'}$, deoarece dacă U este o vecinătate compactă a lui K'' astfel încît $\mathscr{K}_E(T, K'') \subset \overline{\mathscr{H}_E(U)}$, atunci $\mathscr{K}_E(T, K') \subset \overline{\mathscr{H}_E(U)}$ și deci restricția lui $\mathbf{m}_{K'',U}$ la spațiul $\mathscr{K}_E(T, K')$ coincide cu restricția $\mathbf{m}_{K',U}$ a lui $\mathbf{n}_U$ la $\mathscr{K}_E(T, K')$.

Pentru orice funcție $\mathbf{f} \in \mathscr{K}_E(T)$ să notăm

$$\mathbf{m}(\mathbf{f}) = \mathbf{m}_K(\mathbf{f}),$$

unde K este o mulțime compactă oarecare în afara căreia $\mathbf{f}$ se anulează. Din cele de mai sus rezultă că $\mathbf{m}(\mathbf{f})$ nu depinde de K. Deoarece $\mathbf{m}_K$ este liniară pe $\mathscr{K}_E(T, K)$, deducem că $\mathbf{m}(\alpha \mathbf{f}) = \alpha\, \mathbf{m}(\mathbf{f})$ pentru orice scalar α. Dacă $\mathbf{f}, \mathbf{g} \in \mathscr{K}_E(T)$, există o mulțime compactă K în afara căreia se anulează ambele funcții . Deoarece $\mathbf{m}$ este liniară pe $\mathscr{K}_E(T, K)$, deducem că $\mathbf{m}(\mathbf{f} + \mathbf{g}) = \mathbf{m}(\mathbf{f}) + \mathbf{m}(\mathbf{g})$. Așadar, aplicația $\mathbf{m} : \mathscr{K}_E(T) \to K$, definită mai sus, este liniară.

Deoarece pentru orice parte compactă $K \subset T$, restricția lui $\mathbf{m}$ la $\mathscr{K}_E(T, K)$ coincide cu $\mathbf{m}_K$, iar $\mathbf{m}_K$ este continuă pe $\mathscr{K}_E(T, K)$ pentru topologia convergenței uniforme, rezultă că $\mathbf{m}$ este o măsură.

Restricția lui $\mathbf{m}$ la spațiul $\mathscr{H}_E$ coincide cu $\mathbf{n}$: dacă $\mathbf{f} \in \mathscr{H}_E \cap \mathscr{K}_E(T, K)$, atunci $\mathbf{m}(\mathbf{f}) = \mathbf{m}_K(\mathbf{f})$ iar $\mathbf{m}_K(\mathbf{f}) = \mathbf{n}(\mathbf{f})$, deci $\mathbf{m}(\mathbf{f}) = \mathbf{n}(\mathbf{f})$.

Dacă $\mathbf{m}'$ este o altă măsură a cărei restricție la $\mathscr{H}_E$ este egală cu $\mathbf{n}$, rezultă că $\mathbf{m}$ și $\mathbf{m}'$ coincid pe fiecare spațiu $\overline{\mathscr{H}_E(U)}$ și deci $\mathbf{m} = \mathbf{m}'$. Cu aceasta propoziția este complet demonstrată.

Corolar. *Fie* $\mathbf{m}_1, \mathbf{m}_2 : \mathscr{K}_E(T) \to F$ *două măsuri. Dacă*

$$\mathbf{m}_1(\varphi x) = \mathbf{m}_2(\varphi x)$$

pentru orice funcție $\varphi \in \mathscr{K}_+(T)$ *și orice* $x \in E$, *atunci* $\mathbf{m}_1 = \mathbf{m}_2$.

Într-adevăr, avem

$$\mathbf{m}_1\left(\sum_{i=1}^{n} \varphi_i\, x_i\right) = \mathbf{m}_2\left(\sum_{i=1}^{n} \varphi_i\, x_i\right)$$

pentru orice funcție $\sum \varphi_i x_i$ cu $x_i \in E$ și $\varphi_i \in \mathcal{K}_+(T)$. Cum spațiul $\mathcal{K}_E$ al acestor funcții este bogat (corolarul propoziției 5) rezultă că $\mathbf{m}_1(\mathbf{f}) = \mathbf{m}_2(\mathbf{f})$ pentru orice funcție $\mathbf{f} \in \mathcal{K}_E(T)$, deci $\mathbf{m}_1 = \mathbf{m}_2$.

În particular : *dacă* $\mathbf{m}_1$, $\mathbf{m}_2 : \mathcal{K}(T) \to F$ *sînt două măsuri care verifică egalitatea*

$$\mathbf{m}_1(\varphi) = \mathbf{m}_2(\varphi) \text{ pentru } \varphi \in \mathcal{K}_+(T),$$

atunci

$$\mathbf{m}_1 = \mathbf{m}_2.$$

§ 2. PROPRIETĂȚILE MĂSURILOR

1. Integrarea funcțiilor scalare în raport cu o măsură vectorială

Fie E și F două spații Banach, ambele fiind considerate reale sau complexe.

Propoziția 1. *Fiecărei măsuri* $\mathbf{m} : \mathcal{K}_E(T) \to F$ *îi corespunde o măsură* $\mu : \mathcal{K}(T) \to \mathcal{L}(E, F)$ *și una singură care verifică egalitatea*

$$\mu(\varphi)\, x = \mathbf{m}(\varphi\, x) \text{ pentru orice } \varphi \in \mathcal{K}(T) \text{ și } x \in E.$$

Aplicația $\mathbf{m} \to \mu$ *este biunivocă, liniară și* $\|\mu\| \leqslant \|\mathbf{m}\| \leqslant +\infty$.

a) Pentru fiecare mulțime compactă $K \subset T$ să alegem un număr $a_K > 0$, astfel încît să avem

$$|\mathbf{m}(\mathbf{f})| \leqslant a_K \|\mathbf{f}\| \text{ pentru orice funcție } \mathbf{f} \in \mathcal{K}_E(T, K).$$

Pentru orice funcție $\varphi \in \mathcal{K}(T)$ și orice $x \in E$ avem $\varphi x \in \mathcal{K}_E(T)$. Să punem

$$\mathbf{m}_x(\varphi) = \mathbf{m}(\varphi\, x).$$

Pentru fiecare funcție $\varphi \in \mathcal{K}(T)$ fixată, aplicația $\mu(\varphi) : E \to F$ definită prin egalitatea

$$\mu(\varphi)\, x = \mathbf{m}_x(\varphi) = \mathbf{m}(\varphi\, x), \text{ pentru } x \in E$$

este liniară, cum se verifică ușor. Aplicația liniară $\mu(\varphi)$ este și continuă deoarece, notînd cu K suportul lui φ, avem

$$|\mu(\varphi)\, x| = |\mathbf{m}(\varphi\, x)| \leqslant a_K \|\varphi\, x\| = a_K \|\varphi\| \, |x|$$

pentru orice $x \in E$. Așadar $\mu(\varphi) \in \mathcal{L}(E, F)$. Aplicația $\mu : \mathcal{K}(T) \to \mathcal{L}(E, F)$ este liniară și pentru orice mulțime compactă $K \subset T$ avem

$$|\mu(\varphi)| = \sup_{|x| \leqslant 1} |\mu(\varphi) x| \leqslant a_K \|\varphi\| \text{ oricare ar fi } \varphi \in \mathcal{K}(T, K).$$

Așadar μ este o măsură, și din modul în care a fost definită rezultă că avem

$$\mu(\varphi)\, x = \mathbf{m}(\varphi\, x) \text{ pentru } \varphi \in \mathcal{K}(T) \text{ și } x \in E.$$

b) Corespondența $\mathbf{m} \to \mu$ astfel stabilită este biunivocă. Într-adevăr, dacă pentru două măsuri $\mathbf{m}$, $\mathbf{m}'$: $\mathcal{K}_E(T) \to F$, corespunde aceeași măsură $\mu : \mathcal{K}(T) \to \mathcal{L}(E,F)$, atunci pentru orice funcție $\varphi \in \mathcal{K}(T)$ și orice $x \in E$ avem

$$\mu(\varphi)\, x = \mathbf{m}'(\varphi x) = \mathbf{m}(\varphi x).$$

Din corolarul propoziției 9, § 1, rezultă atunci că $\mathbf{m}' = \mathbf{m}$, deci corespondența $\mathbf{m} \to \mu$ este biunivocă.

c) Fie $\mathbf{m}, \mathbf{m}' : \mathcal{K}_E(T) \to F$ două măsuri și fie $\mu, \mu' : \mathcal{K}(T) \to \mathcal{L}(E, F)$ măsurile corespunzătoare care verifică egalitățile

$$\mu(\varphi)\, x = \mathbf{m}(\varphi x) \text{ și } \mu'(\varphi)\, x = \mathbf{m}'(\varphi x)$$

pentru $\varphi \in \mathcal{K}(T)$ și $x \in E$. Atunci

$$(\mu + \mu')(\varphi)\, x = [\mu(\varphi) + \mu'(\varphi)]\, x = \mu(\varphi)\, x + \mu'(\varphi)\, x =$$

$$= \mathbf{m}(\varphi x) + \mathbf{m}'(\varphi x) = (\mathbf{m} + \mathbf{m}')(\varphi x).$$

Fie $\nu : \mathcal{K}(T) \to \mathcal{L}(E, F)$ măsura corespunzătoare măsurii $\mathbf{m} + \mathbf{m}'$:

$$\nu(\varphi)\, x = (\mathbf{m} + \mathbf{m}')(\varphi x) \text{ pentru } \varphi \in \mathcal{K}(T) \text{ și } x \in E.$$

Rezultă că

$$(\mu + \mu')(\varphi)\, x = \nu(\varphi)\, x \text{ pentru } \varphi \in \mathcal{K}(T) \text{ și } x \in E$$

deci

$$(\mu + \mu')(\varphi) = \nu(\varphi) \text{ pentru } \varphi \in \mathcal{K}(T)$$

de unde

$$\mu + \mu' = \nu.$$

Așadar corespondența $\mathbf{m} \to \mu$ este aditivă. Omogenitatea se demonstrează în același mod.

d) Rămîne de verificat relația

$$\|\mu\| \leqslant \|\mathbf{m}\|.$$

Pentru orice funcție $\varphi \in \mathcal{K}(T)$ și orice $\varepsilon > 0$, există $x \in E$ cu $|x| = 1$ și

$$|\mu(\varphi)| < |\mu(\varphi)x| + \varepsilon.$$

Atunci

$$|\mu(\varphi)| - \varepsilon < |\mu(\varphi)\, x| = |\mathbf{m}(\varphi x)| \leqslant \|\mathbf{m}\|\, \|\varphi x\| = \|\mathbf{m}\|\, \|\varphi\|.$$

ε fiind arbitrar, deducem

$$|\mu(\varphi)| \leqslant \|\mathbf{m}\|\, \|\varphi\|$$

de unde

$$\|\mu\| \leqslant \|\mathbf{m}\| \leqslant +\infty.$$

Cu aceasta propoziția este demonstrată.

Corolar. *Dacă E și F sînt spații Banach cu involuție, și dacă măsurii $\mathbf{m}: \mathcal{K}_E(T) \to F$ îi corespunde măsura $\mu: \mathcal{K}(T) \to \mathcal{L}(E, F)$, atunci măsurii $\overline{\mathbf{m}}$ îi corespunde măsura $\overline{\mu}$.*

Într-adevăr, avem

$$\overline{\mathbf{m}}(\mathbf{f}) = \overline{\mathbf{m}(\overline{\mathbf{f}})}, \text{ pentru } \mathbf{f} \in \mathcal{K}_E(T)$$

$$\mathbf{m}(\varphi x) = \mu(\varphi)\, x, \text{ pentru } \varphi \in \mathcal{K}(T) \text{ și } x \in E$$

și

$$\overline{\mu}(\varphi) = \overline{\mu(\overline{\varphi})}, \text{ pentru } \varphi \in \mathcal{K}(T).$$

Fie $\nu: \mathcal{K}(T) \to \mathcal{L}(E, F)$ măsura unică ce verifică egalitatea

$$\overline{\mathbf{m}}(\varphi x) = \nu(\varphi)\, x, \text{ pentru } \varphi \in \mathcal{K}(T) \text{ și } x \in E.$$

Atunci, pentru orice $\varphi \in \mathcal{K}(T)$ și orice $x \in E$, avem

$$\nu(\varphi)\, x = \overline{\mathbf{m}}(\varphi x) = \overline{\mathbf{m}(\varphi \overline{x})} = \overline{\mu(\varphi)\, \overline{x}} = \overline{\mu}(\varphi)\, \overline{\overline{x}} = \overline{\mu}(\varphi)\, x,$$

deci $\overline{\mu}(\varphi) = \nu(\varphi)$ pentru orice $\varphi \in \mathcal{K}(T)$, adică $\overline{\mu} = \nu$. Așadar,

$$\overline{\mathbf{m}}(\varphi x) = \overline{\mu}(\varphi)\, x, \text{ pentru } \varphi \in \mathcal{K}(T) \text{ și } x \in E.$$

Observații 1°. Există măsuri $\mu: \mathcal{K}(T) \to \mathcal{L}(E, F)$ care nu se pot obține ca în propoziția 1 din măsuri $\mathbf{m}: \mathcal{K}_E(T) \to F$. Vom vedea mai departe că dacă măsura $\mathbf{m}: \mathcal{K}(T) \to \mathcal{L}(E, F)$ are o proprietate suplimentară (de a fi majorată), atunci poate fi „prelungită" la o măsură $\mathbf{m}: \mathcal{K}(T) \to F$ care să verifice egalitatea

$$\mathbf{m}(\varphi x) = \mu(\varphi)\, x, \qquad \varphi \in \mathcal{K}(T), \qquad x \in R.$$

2°. Dacă E este spațiu Banach complex, atunci pentru orice funcție $\varphi \in \mathcal{K}_C(T)$ și orice $x \in E$ avem $\varphi x \in \mathcal{K}_E(T)$. Continuînd demonstrația ca mai sus, deducem că măsurii $\mathbf{m}: \mathcal{K}_E(T) \to F$ îi corespunde în mod unic o măsură $\mu': \mathcal{K}_C(T) \to \mathcal{L}(E, F)$ care verifică egalitatea

$$\mu'(\varphi)\, x = \mathbf{m}(\varphi x) \text{ pentru orice } \varphi \in \mathcal{K}_C(T) \text{ și } x \in E.$$

De altfel măsura μ' se poate obține prin prelungirea măsurii μ de la $\mathcal{K}(T)$ la $\mathcal{K}_C(T)$, așa cum va fi arătat mai departe.

Din cauza corespondenței biunivoce $\mathbf{m} \to \mu$, vom identifica, pînă la urmă, măsura $\mathbf{m}$ cu măsura corespunzătoare μ. Pentru funcțiile $\varphi \in \mathcal{K}(T)$, integrala $\int \varphi \mathrm{d}\mu$ va fi notată, de asemenea, cu $\int \varphi\, \mathrm{d}\mathbf{m}$, și va fi numită *integrala funcției scalare φ în raport cu măsura vectorială* $\mathbf{m}$.

Egalitatea din enunțul propoziției se scrie atunci :

$$\mathbf{m}(\varphi)\, x = \mathbf{m}(\varphi\, x) \text{ sau } \int \varphi x \, d\mathbf{m} = x \int \varphi \, d\mathbf{m}, \text{ pentru } \varphi \in \mathcal{K}(T) \text{ și } x \in E.$$

Trebuie observat că dacă $\varphi \in \mathcal{K}(T)$, integrala $\int \varphi \, d\mathbf{m}$ este un element din $\mathcal{L}(E, F)$, în timp ce, dacă $\mathbf{f} \in \mathcal{K}_E(T)$, integrala $\int \mathbf{f} \, d\mathbf{m}$ este un element din F.

2. Măsuri definite pentru funcții scalare

Fie X un spațiu Banach.

Propoziția 2. *Fie* $\mu : \mathcal{K}_+ \to X$ *o aplicație care verifică următoarele trei condiții :*

1) $\mu(\varphi_1 + \varphi_2) = \mu(\varphi_1) + \mu(\varphi_2)$, *pentru* $\varphi_1, \varphi_2 \in \mathcal{K}_+$;

2) $\mu(\alpha\, \varphi) = \alpha\, \mu(\varphi)$, *pentru* $\alpha \geqslant 0$ *și* $\varphi \in \mathcal{K}_+$;

3) *pentru orice mulțime compactă* $K \subset T$, *există un număr* $a_K > 0$ *astfel încît să avem*

$$|\mu(\varphi)| \leqslant a_K \|\varphi\| \text{ pentru } \varphi \in \mathcal{K}_+(T, K).$$

Atunci μ *se poate prelungi în mod unic la spațiul* $\mathcal{K}(T)$ *ca o măsură* $\mathbf{m} : \mathcal{K}(T) \to X$. *Corespondența* $\mu \to \mathbf{m}$ *este liniară.*

Fie f o funcție oarecare din $\mathcal{K}(T)$. Funcția f se poate scrie ca diferență de funcții *pozitive*, din $\mathcal{K}_+(T)$. Dacă

$$f = \varphi_1 - \psi_1 = \varphi_2 - \psi_2, \text{ cu } \varphi_1, \varphi_2, \psi_1, \psi_2 \in \mathcal{K}_+(T),$$

atunci $\varphi_1 + \psi_2 = \varphi_2 + \psi_1$. Din proprietatea 1) deducem :

$$\mu(\varphi_1) + \mu(\psi_2) = \mu(\varphi_2) + \mu(\psi_1)$$

de unde

$$\mu(\varphi_1) - \mu(\varphi_2) = \mu(\psi_1) - \mu(\psi_2).$$

Dacă $f = \varphi - \psi$ cu φ și ψ din $\mathcal{K}_+$, punem, prin definiție,

$$\mathbf{m}(f) = \mu(\varphi) - \mu(\psi).$$

Din cele de mai sus rezultă că $\mathbf{m}(f)$ nu depinde de modul particular în care f se scrie ca diferență de funcții pozitive din $\mathcal{K}_+$, ci depinde numai de f.

Pentru funcțiile φ din $\mathcal{K}_+$ avem $\varphi = \varphi - 0$, deci

$$\mathbf{m}(\varphi) = \mu(\varphi) - \mu(0) = \mu(\varphi).$$

Așadar, $\mathbf{m}$ este o prelungire a lui μ de la $\mathcal{K}_+$ la $\mathcal{K}(T)$. Să arătăm că $\mathbf{m}$ este o măsură.

Fie $f, g \in \mathcal{K}(T)$. Să scriem

$$f = f^+ - f^- \quad \text{și} \quad g = g^+ - g^-.$$

Funcțiile f^+, f^-, g^+, g^- sînt din $\mathcal{K}_+$ și

$$f + g = (f^+ + g^+) - (f^- + g^-).$$

Atunci

$$\mathbf{m}(f+g) = \mu(f^+ + g^+) - \mu(f^- + g^-) = \mu(f^+) + \mu(g^+) -$$
$$- \mu(f^-) - \mu(g^-) = \mu(f^+) - \mu(f^-) + \mu(g^+) - \mu(g^-) = \mathbf{m}(f) + \mathbf{m}(g).$$

Dacă $\alpha \geqslant 0$, atunci $\alpha f = \alpha f^+ - \alpha f$ și

$$\mathbf{m}(\alpha f) = \mu(\alpha f^+) - \mu(\alpha f^-) = \alpha\mu(f^+) - \alpha\mu(f^-) =$$
$$= \alpha(\mu(f^+) - \mu(f^-)) = \alpha\,\mathbf{m}(f).$$

Dacă $\alpha < 0$, atunci $\alpha f = \alpha f^+ - \alpha f^- = (-\alpha)f^- - (-\alpha)f^+$, deci

$$\mathbf{m}(\alpha f) = \mu[(-\alpha)f^-] - \mu[(-\alpha)f^+] =$$
$$= -\alpha(\mu(f^-) - \mu(f^+)) = \alpha(\mu(f^+) - \mu(f^-)) = \alpha\,\mathbf{m}(f).$$

Așadar $\mathbf{m}$ este liniară.

Fie $K \subset T$ o mulțime compactă și $f \in \mathcal{K}(T, K)$. Avem

$$f = f^+ - f^-, \quad |f| = f^+ + f^- \text{ și } f^+ \leqslant |f|, f^- \leqslant |f|.$$

Atunci

$$|\mathbf{m}(f)| = |\mu(f^+) - \mu(f^-)| \leqslant |\mu(f^+)| + |(f^-)| \leqslant$$
$$\leqslant a_K \|f^+\| + a_K \|f^-\| \leqslant 2\, a_K \|f\|$$

deci $\mathbf{m}$ este o măsură pe T.

Dacă $\mathbf{n} : \mathcal{K}(T) \to X$ este o măsură care verifică egalitatea

$$\mathbf{n}(\varphi) = \mu(\varphi) \text{ pentru } \varphi \in \mathcal{K}_+(T),$$

atunci

$$\mathbf{n}(f) = \mathbf{n}(f^+ - f^-) = \mathbf{n}(f^+) - \mathbf{n}(f^-) = \mu(f^+) - \mu(f^-) = \mathbf{m}(f)$$

pentru orice $f \in \mathcal{K}(T)$, deci $\mathbf{n} = \mathbf{m}$. Rezultă că prelungirea lui μ la $\mathcal{K}(T)$, ca o măsură, este unică.

Liniaritatea corespondenței $\mu \to \mathbf{m}$ rezultă din faptul că dacă $\mathbf{m}$, $\mathbf{n} : \mathcal{K}(T) \to X$ sînt două măsuri ale căror restricții la $\mathcal{K}_+(T)$ sînt μ și ν, atunci restricția lui $\mathbf{m} + \mathbf{n}$ la $\mathcal{K}_+(T)$ este $\mu + \nu$ iar restricția lui $\alpha\,\mathbf{m}$ la $\mathcal{K}_+(T)$ este $\alpha\mu$. Cu aceasta, propoziția este demonstrată.

Observație. Se va arăta mai departe că pentru aplicațiile $\mu : \mathcal{K}_+(T) \to R$, este suficient să fie *aditive* și *pozitive* pentru a putea fi prelungite la $\mathcal{K}(T)$ ca măsuri.

Propoziția 3. *Dacă X este un spațiu Banach complex iar $\mu : \mathcal{K}(T) \to X$ este o măsură, atunci μ se poate prelungi în mod unic la întreg spațiul $\mathcal{K}_C(T)$ ca o măsură $\mathbf{m} : \mathcal{K}_C(T) \to X$. Corespondența $\mu \to \mathbf{m}$ este liniară, și $\|\mu\| \leqslant \|\mathbf{m}\| \leqslant 2\|\mu\| < +\infty$. Dacă, în plus, X este un spațiu Banach cu involuție, corespondența $\mu \to \mathbf{m}$ păstrează involuția pe spațiile de măsuri.*

Fie $f \in \mathcal{K}_C(T)$ o funcție oarecare. Funcția f se poate scrie în mod unic sub forma

$$f = f_1 + i\, f_2 \text{ cu } f_1,\ f_2 \in \mathcal{K}(T).$$

Punem prin definiție:

$$\mathbf{m}(f) = \mu(f_1) + i\ \mu(f_2).$$

Dacă $f \in \mathcal{K}(T)$, atunci $f = g + i0$, deci

$$\mathbf{m}(f) = \mu(f) + i\ \mu(0) = \mu(f).$$

Așadar, $\mathbf{m}$ este o prelungire a lui μ de la $\mathcal{K}(T)$ la $\mathcal{K}_C(T)$. Dacă $f = f_1 + i f_2$ și $g = g_1 + i g_2$ iar f_1, f_2, g_1, g_2 sînt din $\mathcal{K}(T)$, atunci

$$f + g = (f_1 + g_1) + i(f_2 + g_2)$$

deci

$$\mathbf{m}(f+g) = \mu(f_1 + g_1) + i\mu(f_2 + g_2) = \mu(f_1) + \mu(g_1) + i\,\mu(f_2) +$$

$$+ i\mu(g_2) = \mu(f_1) + i\,\mu(f_2) + \mu(g_1) + i\,\mu(g_2) = \mathbf{m}(f) + \mathbf{m}(g).$$

Dacă $z = \alpha + i\beta$ cu α și β reali, atunci

$$zf = (\alpha + i\beta)(f_1 + if_2) = (\alpha f_1 - \beta f_2) + i\,(\beta f_1 + \alpha f_2)$$

deci

$$\mathbf{m}(zf) = \mu(\alpha f_1 - \beta f_2) + i\mu(\beta f_1 + \alpha f_2) =$$

$$= \alpha\mu(f_1) - \beta\mu(f_2) + i(\beta\mu(f_1) + \alpha\mu(f_2)) =$$

$$= (\alpha + i\beta)(\mu(f_1) + i\mu(f_2)) = z\mathbf{m}(f).$$

Așadar $\mathbf{m}$ este o aplicație liniară (complexă) a lui $\mathcal{K}_C(T)$ în X.

Fie $K \subset T$ o mulțime compactă și fie $a_K > 0$ astfel încît să avem

$$|\mu(\varphi)| \leqslant a_K \|\varphi\| \quad \text{pentru } \varphi \in \mathcal{K}(T, K).$$

Pentru orice funcție $f = f_1 + i f_2$ din $\mathcal{K}_C(T, K)$ cu f_1 și f_2 din $\mathcal{K}(T)$, avem $|f_1| \leqslant |f|$ și $|f_2| \leqslant |f|$, deci $f_1, f_2 \in \mathcal{K}(T, K)$. Atunci

$$|\mathbf{m}(f)| = |\mu(f_1) + i\,\mu(f_2)| \leqslant |\mu(f_2)| + |\mu(f_2)| \leqslant$$

$$\leqslant a_K \|f_1\| + a_K \|f_2\| \leqslant 2\, a_K \|f\|.$$

Așadar $\mathbf{m}$ este o măsură.

Pentru $f \in \mathcal{K}(T)$ avem

$$|\mu(f)| = |\mathbf{m}(f)| \leqslant \|\mathbf{m}\|\ \|f\|$$

deci

$$\|\mu\| \leqslant \|\mathbf{m}\|.$$

Pentru $f = f_1 + if_2$ avem

$$|\mathbf{m}(f)| = |\mu(f_1) + i\mu(f_2)| \leqslant |\mu(f_1)| + |\mu f(_2)| \leqslant$$
$$\leqslant \|\mu\| \, \|f_1\| + \|\mu\| \, \|f_2\| \leqslant 2\|\mu\| \, \|f\|$$

deci $\|\mathbf{m}\| \leqslant 2\|\mu\|$.

Dacă $\mathbf{m}' : \mathcal{K}_C(T) \to X$ este o măsură care prelungește pe μ, pentru orice funcție $f = f_1 + if_2$ cu f_1 și f_2 din $\mathcal{K}(T)$ avem

$$\mathbf{m}'(f) = \mathbf{m}'(f_1) + i\mathbf{m}'(f_2) = \mu(f_1) + i\mu(f_2) = \mathbf{m}(f)$$

deci $\mathbf{m}' = \mathbf{m}$.

Dacă $\mathbf{m}$, $\mathbf{n} : \mathcal{K}_C(T) \to X$ sînt două măsuri ale căror restricții la $\mathcal{K}(T)$ sînt μ și ν, iar $\alpha \in C$, atunci restricțiile la $\mathcal{K}(T)$ ale măsurilor $\mathbf{m} + \mathbf{n}$ și $\alpha\mathbf{m}$ sînt respectiv $\mu + \nu$ și $\alpha\mu$. Așadar corespondența $\mathbf{m} \to \mu$ este liniară. Dacă $x \to \overline{x}$ este o involuție pe X și dacă lui μ îi corespunde $\mathbf{m}$, atunci măsurii $\overline{\mu}$ îi corespunde $\overline{\mathbf{m}}$, adică dacă $\overline{\mu}(\varphi) = \overline{\mu(\varphi)}$ pentru $\varphi \in \mathcal{K}(T)$, atunci $\overline{\mathbf{m}}(f) = \overline{\mathbf{m}(f)}$ pentru $f \in \mathcal{K}_C(T)$. Cu aceasta propoziția este demonstrată.

Observații. 1°. Dacă X nu este un spațiu complex, atunci măsura $\mu : \mathcal{K}(T) \to X$ se extinde la o măsură $\mathbf{m} : \mathcal{K}_C(T) \to X_C$, unde X_C este spațiul Banach $\{(x + iy) \mid x, y \in X\}$, cu adunarea

$$(x + iy) + (x' + iy') = (x + x') + i(y + y'),$$

înmulțirea cu scalari

$$(\alpha + i\beta)(x + iy) = (\alpha x - \beta y) + i(\alpha y + \beta x)$$

și norma

$$|x + iy| = \sqrt{|x|^2 + |y|^2}.$$

2°. Dacă $X = C$, se va arăta mai departe că $\|\mathbf{m}\| = \|\mu\|$ (v. cololarul teoremei 1).

Pentru funcțiile $f \in \mathcal{K}_C(T)$, integrala $\int f \mathrm{d}\mathbf{m}$ va fi notată de asemenea, $\int f \mathrm{d}\mu$, și va fi numită *integrala funcției complexe f în raport cu măsura* μ.

Propoziția 4. *Fie $H \subset \mathcal{K}_+$ o mulțime filtrantă pentru relația $\leqslant$ și $\mathbf{m} : \mathcal{K}(T) \to X$ o măsură definită pentru funcții scalare. Dacă $\sup_{g \in H} g \in \mathcal{K}_+$, atunci aplicația $g \to \mathbf{m}(g)$ are limită în X după filtrul secțiunilor lui H și*

$$\lim_{g \in H} \mathbf{m}(g) = \mathbf{m}(\sup_{g \in H} g) = \mathbf{m}(\lim_{g \in H} g).$$

Să notăm $f = \sup_{g \in H} g = \lim_{g \in H} g$ (propoziția 4, § 1), limita fiind în sensul convergenței uniforme. Fie K suportul lui f. Deoarece $0 \leqslant g \leqslant f$ pentru orice $g \in H$, rezultă că $H \subset \mathcal{K}(T, K)$. Restricția măsurii $\mathbf{m}$ la suspațiul $\mathcal{K}(T, K)$ fiind continuă pentru topologia convergenței uniforme, deducem că

$$\lim_{g \in H} \mathbf{m}(g) = \mathbf{m}(f) = \mathbf{m}(\sup_{g \in H} g) = \mathbf{m}(\lim_{g \in H} g)$$

și propoziția este demonstrată.

Corolar. *Fie* $\mathbf{m} : \mathcal{K}(T) \to X$ *o măsură definită pentru funcții scalare. Pentru orice funcție* $f \in \mathcal{K}_+$, *avem*

$$\mathbf{m}(f) = \lim_{\substack{g \in \mathcal{K}_+ \\ g \leqslant f}} \mathbf{m}(g).$$

Într-adevăr, mulțimea $H = \{g \mid g \in \mathcal{K}_+,\ g \leqslant f\}$ este filtrantă pentru relația $\leqslant$ și $\sup_{g \in H} g = f \in \mathcal{K}_+$.

Propoziția 5. *Fie* $\mu : \mathcal{K}(T) \to \mathcal{L}(E,F)$ *o măsură,* $\varphi_i \in \mathcal{K}(T)$ *și* $x_i \in E$, $i = 1, 2, \ldots, n$. *Dacă* $\sum_{i=1}^{n} \varphi_i(t)\, x_i \equiv 0$, *atunci*

$$\sum_{i=1}^{n} \mu(\varphi_i)\, x_i = 0.$$

Dacă $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 0$, egalitatea $\sum_{i=1}^{n} \mu(\varphi_i)\, x_i = 0$ este evident adevărată. Să presupunem deci că spațiul real generat de elementele $x_1, x_2, \ldots, x_n$ este diferit de $\{0\}$. Fie $y_1, y_2, \ldots y_m$ o bază a acestui spațiu. Atunci fiecare element x_i se scrie $x_i = \sum_{j=1}^{m} \alpha_{ij} y_j$, $\alpha_{ij} \in R$, deci

$$\sum_{i=1}^{n} \varphi_i\, x_i = \sum_{i=1}^{n} \varphi_i \sum_{j=1}^{m} \alpha_{ij}\, y_j = \sum_{j=1}^{m} \left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_{ij}\, \varphi_i \right) y_j = \sum_{j=1}^{m} \psi_j\, y_j,$$

unde funcțiile $\psi_j = \sum \alpha_{ij} \varphi_i$ aparțin spațiului $\mathcal{K}(T)$. Din egalitatea

$$\sum_{i=1}^{n} \varphi_i(t)\, x_j \equiv 0$$

rezultă

$$\sum_{j=1}^{m} \psi_j(t)\, y_j \equiv 0.$$

Deoarece elementele $y_1, \ldots, y_m$ sînt liniar independente, rezultă că pentru fiecare $t \in T$ avem $\psi_1(t) = 0, \ldots, \psi_m(t) = 0$, adică $\psi_1 = \psi_2 = \ldots = \psi_m = 0$. Atunci $\mu(\psi_j) = 0$, $j = 1, 2, \ldots, m$, deci

$$\sum_{i=1}^{n} \mu(\varphi_i)\, x_i = \sum_{i=1}^{n} \mu(\varphi_i) \sum_{j=1}^{m} \alpha_{ij}\, y_j = \sum_{j=1}^{m} \mu\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_{ij}\, \varphi_i \right) y_j = \sum_{j=1}^{m} \mu(\psi_j)\, y_j = 0$$

și propoziția este demonstrată.

Corolar. *Fie* $\mu : \mathcal{K}(T) \to \mathcal{L}(E, F)$ *o măsură. Dacă*

$$\sum_{i=1}^{n} \varphi_i\, x_i = \sum_{j=1}^{m} \psi_j\, y_j,$$

unde $\varphi_i, \psi_j \in \mathcal{K}(T)$ *și* $x_i, y_j \in E$, *atunci*

$$\sum_{i=1}^{n} \mu(\varphi_i)\, x_i = \sum_{j=1}^{m} \mu(\psi_j)\, y_j.$$

Într-adevăr,

$$\sum_{i=1}^{n} \varphi_i(t)\, x_i - \sum_{j=1}^{m} \psi_j(t)\, y_j \equiv 0,$$

deci

$$\sum_{i=1}^{n} \mu(\varphi_i)\, x_i - \sum_{j=1}^{m} \mu(\psi_j\, y_j = 0,$$

de unde rezultă egalitatea de demonstrat.

3. Măsuri scalare

Măsurile $\mu : \mathcal{K}(T) \to C$, definite pentru funcții reale, cu *valori complexe* se numesc *măsuri complexe.*

Măsurile $\mu : \mathcal{K}(T) \to R$, definite pentru funcții reale cu *valori reale*, se numesc *măsuri reale.*

Măsurile reale și măsurile complexe se numesc *măsuri scalare.*

Orice măsură reală este în același timp o măsură complexă, deoarece $R \subset C$. Așadar, măsurile scalare pot fi totdeauna considerate cu valori în C.

Pentru orice măsură reală μ avem $\overline{\mu} = \mu$.

Se numește *măsură pozitivă* orice măsură scalară μ care are *valori pozitive pentru funcțiile pozitive* :

$$\mu(\varphi) \geqslant 0 \text{ pentru } \varphi \geqslant 0, \quad \varphi \in \mathcal{K}(T).$$

Orice măsură pozitivă μ este o măsură reală.

Într-adevăr, dacă $\varphi \in \mathcal{K}(T)$, atunci φ se poate scrie $\varphi = \varphi_1 - \varphi_2$ cu φ_1 și φ_2 din $\mathcal{K}_+(T)$. Atunci $\mu(\varphi_1) \geqslant 0$ și $\mu(\varphi_2) \geqslant 0$ deci

$$\mu(\varphi) = \mu(\varphi_1) - \mu(\varphi_2) \in R.$$

Din propoziția 3 rezultă că toate măsurile $\mu : \mathcal{K}(T) \to C$ se pot prelungi în mod unic la măsuri $m : \mathcal{K}_C(T) \to C$. De aceea, identificînd o măsură $\mu : \mathcal{K}(T) \to C$ cu prelungirea sa $m : \mathcal{K}_C(T) \to C$, măsurile $m : \mathcal{K}_C(T) \to C$ definite pentru funcțiile complexe, vor fi numite tot *măsuri scalare.* Printre măsurile complexe $m : \mathcal{K}_C(T) \to C$, *măsurile reale* sînt caracterizate prin proprietatea de *a lua valori reale pentru funcțiile reale*, iar *măsurile pozitive* sînt caracterizate prin proprietatea de a avea *valori pozitive* pentru *funcțiile pozitive.* Dacă μ este o măsură complexă, avem $\overline{\mu(f)} = \overline{\mu}(\overline{f})$, pentru $f \in \mathcal{K}_C(T)$. Dacă μ este reală, avem $\mu(f) = \mu(\overline{f})$, pentru $f \in \mathcal{K}_C(T)$.

Vom însemna cu $\mathcal{M}_C$ spațiul măsurilor complexe, cu $\mathcal{M}(T)$ spațiul măsurilor reale și cu $\mathcal{M}_+(T)$ mulțimea măsurilor pozitive pe T.

Se verifică imediat că dacă μ și ν sînt două măsuri pozitive pe T iar $\alpha \geqslant 0$, atunci $\mu + \nu$ și $\alpha\mu$ sînt de asemenea măsuri pozitive pe T. Rezultă că $\mathcal{M}_+(T)$ este un *con convex* în spațiul vectorial $\mathcal{M}(T)$.

Fiind date două *măsuri reale* μ și ν pe T, se definește relația $\mu \leqslant \nu$ prin inegalitatea:

$$\mu(\varphi) \leqslant \nu(\varphi) \text{ pentru orice funcție } \varphi \geqslant 0 \text{ din } \mathcal{K}(T).$$

Rezultă că o măsură μ este pozitivă dacă și numai dacă $\mu \geqslant 0$, și că $\mu \leqslant \nu$ dacă și numai dacă $\nu - \mu$ este o măsură pozitivă.

Se verifică ușor că relația $\mu \leqslant \nu$ este o *relație de ordine* pe $\mathcal{M}(T)$, compatibilă cu structura de spațiu vectorial a lui $\mathcal{M}(T)$:

1) $\mu \leqslant \mu$ pentru orice $\mu \in \mathcal{M}(T)$;

2) $\mu \leqslant \nu$ și $\nu \leqslant \mu \Rightarrow \mu = \nu$ (conform corolarului propoziției 10, § 1);

3) $\mu \leqslant \nu$ și $\nu \leqslant \lambda \Rightarrow \mu \leqslant \lambda$;

4) $\mu \leqslant \nu \Rightarrow \mu + \lambda \leqslant \nu + \lambda$;

5) $\mu \geqslant 0$ și $\alpha \geqslant 0 \Rightarrow \alpha\mu \geqslant 0$.

Așadar, $\mathcal{M}(T)$ este un spațiu vectorial ordonat, pentru relația $\mu \leqslant \nu$.

Propoziția 6. *Orice măsură complexă m pe T se poate scrie în mod unic sub forma*

$$m = \mu + i\nu,$$

unde μ și ν sînt măsuri reale pe T.

Pentru orice funcție *reală* $\varphi \in \mathcal{K}(T)$ să punem

$$\mu(\varphi) = \operatorname{Re}[m(\varphi)], \quad \nu(\varphi) = \operatorname{Im}[m(\varphi)].$$

Numerele reale $\mu(\varphi)$ și $\nu(\varphi)$ sînt unic determinate de egalitatea

$$m(\varphi) = \mu(\varphi) + i\nu(\varphi).$$

Se verifică ușor că μ și ν sînt funcționale liniare reale pe $\mathcal{K}(T)$, deoarece funcțiile $z \to \operatorname{Re}(z)$ și $z \to \operatorname{Im}(z)$ sînt liniare.

Fie $K \subset T$ o mulțime compactă și $a_K > 0$ astfel ca

$$|m(\varphi)| \leqslant a_K \|\varphi\| \text{ pentru orice } \varphi \in \mathcal{K}(T, K).$$

Deoarece

$$|\mu(\varphi)| \leqslant |m(\varphi)| \text{ și } |\nu(\varphi)| \leqslant |m(\varphi)|$$

avem

$$|\mu(\varphi)| \leqslant a_K \|\varphi\| \text{ și } |\nu(\varphi)| \leqslant a_K \|\varphi\|$$

pentru orice funcție $\varphi \in \mathcal{K}(T, K)$. Așadar, μ și ν sînt măsuri reale pe T.

Egalitatea

$$m(\varphi) = \mu(\varphi) + i\nu(\varphi)$$

valabilă pentru funcții *reale*, se menține și pentru funcții complexe deoarece prelungirea de la $\mathcal{K}(T)$ la $\mathcal{K}_c(T)$ este o operație liniară.

Corolar. *Dacă $m = \mu + i\nu$, atunci $\overline{m} = \mu - i\nu$.*

4. Integrarea funcțiilor vectoriale în raport cu o măsură scalară

Teorema 1. *Pentru orice măsură reală (respectiv complexă)* $\mu : \mathcal{K}(T) \to C$ *și orice spațiu Banach real (respectiv complex)* E, *există o măsură* $\mathbf{m} : \mathcal{K}_E(T) \to E$ *și numai una care verifică egalitatea*

$$\mathbf{m}(\varphi x) = \mu(\varphi)\, x \quad \textit{pentru orice} \quad \varphi \in \mathcal{K}(T) \ \textit{și} \ x \in E.$$

Dacă E *este un spațiu Banach cu involuție, atunci*

$$\overline{\mathbf{m}}(\varphi x) = \overline{\mu}(\varphi)\, x, \ \textit{pentru} \ \varphi \in \mathcal{K}(T) \ \textit{și} \ x \in E.$$

Corespondența $\mu \to \mathbf{m}$ *este biunivocă, liniară și* $\|\mathbf{m}\| = \|\mu\|$.

Să notăm cu $\mathcal{H}_E$ mulțimea combinațiilor liniare de forma $\mathfrak{g} = \sum_{i=1}^{n} \varphi_i\, x_i$ de funcții φ_i din $\mathcal{K}(T)$ cu coeficienții x_i din E. Pentru fiecare asemenea funcție $\mathfrak{g} = \sum_{i=1}^{n} \varphi_i\, x_i$ să punem

$$\mathbf{n}(\mathfrak{g}) = \sum_{i=1}^{n} \mu(\varphi_i)\, x_i \in E.$$

Din corolarul propoziției 5 rezultă că $\mathbf{n}(\mathfrak{g})$ nu depinde de forma particulară în care $\mathfrak{g}$ se scrie ca o combinație liniară de funcții din $\mathcal{K}(T)$ cu coeficienți din E, ci depinde numai de $\mathfrak{g}$.

Am definit astfel o aplicație $\mathbf{n} : \mathcal{H}_E \to E$, care, în particular, verifică egalitatea

$$\mathbf{n}(\varphi x) = \mu(\varphi)\, x \ \text{pentru} \ \varphi \in \mathcal{K}(T) \ \text{și} \ x \in E.$$

Se verifică ușor că aplicația $\mathbf{n}$ este liniară.

Să arătăm că aplicația liniară $\mathbf{n}$ îndeplinește condițiile propoziției 10, § 1.

Fie $K \subset T$ o mulțime compactă și $\mathfrak{g} = \sum_{i=1}^{n} \varphi_i\, x_i$ o funcție din $\mathcal{H}_E$ cu suportul în K. Fie $a_K > 0$ astfel încît

$$|\mu(\varphi)| \leqslant a_K \|\varphi\| \ \text{pentru} \ \varphi \in \mathcal{K}(T,\ K).$$

Există un element $z' \in E'$ cu $|z'| = 1$ astfel încît

$$|\mathbf{n}(\mathfrak{g})| = <\mathbf{n}(\mathfrak{g}),\ z'>.$$

Avem

$$<\mathbf{n}(\mathfrak{g}), z'> = <\sum_i \mu(\varphi_i)\ x_i,\ z'> = \sum_i \mu(\varphi_i) <x_i, z'> =$$

$$= \sum_i \mu_i(\varphi_i <x_i, z'>) = \mu(\sum_i <\varphi_i x_i, z'>) = \mu(<\sum_i \varphi_i x_i, z'>) =$$

$$= \mu(<\mathfrak{g}, z'>)$$

deci

$$|\mathbf{n}(\mathfrak{g})| = <\mathbf{n}(\mathfrak{g}), z'> = \mu(<\mathfrak{g}, z'>) \leqslant$$

$$\leqslant a_K \|<\mathfrak{g}, z'>\| \leqslant a_K \|\mathfrak{g}\|\, |z'| = a_K \|\mathfrak{g}\|.$$

Așadar

$$\mathbf{n}(\mathbf{g}) \| \leqslant a_K \| \mathbf{g} \| \quad \text{pentru orice} \quad \mathbf{g} \in \mathscr{H}_E \cap \mathscr{X}_E(T, K)$$

adică $\mathbf{n}$ este continuă pe $\mathscr{H}_E \cap \mathscr{X}_E(T, K)$ pentru topologia convergenței uniforme.

Conform propoziției 10, § 1, există atunci o măsură $\mathbf{m} : \mathscr{X}_E(T) \to E$ și numai una, a cărei restricție la spațiul $\mathscr{H}_E$ este egală cu $\mathbf{n}$. Pentru $\varphi \in \mathscr{X}(T)$ și $x \in E$ avem

$$\mathbf{m}(\varphi x) = \mathbf{n}(\varphi x) = \mu(\varphi)\, x.$$

Dacă o altă măsură $\mathbf{m}' : \mathscr{X}_E(T) \to E$ verifică egalitatea

$$\mathbf{m}'(\varphi x) = \mu(\varphi)\, x \quad \text{pentru} \quad \varphi \in \mathscr{X}(T) \quad \text{și} \quad x \in E,$$

atunci avem $\mathbf{m}'(\mathbf{g}) = \mathbf{n}(\mathbf{g})$ pentru orice $\mathbf{g} \in \mathscr{H}_E$ și deci $\mathbf{m}' = \mathbf{m}$.

Dacă μ și ν sînt două măsuri scalare cărora le corespund măsurile $\mathbf{m}$ și $\mathbf{n}$, atunci măsurile $\mu + \nu$ și $\alpha\mu$, α scalar, le corespund respectiv măsurile $\mathbf{m} + \mathbf{n}$ și $\alpha\mathbf{m}$.

Într-adevăr,

$$\mathbf{m}(\varphi x) = \mu(\varphi)\, x, \text{ și } \mathbf{n}(\varphi x) = \nu(\varphi)\, x$$

pentru $x \in E$ și $\varphi \in \mathscr{X}(T)$. Atunci

$$(\mathbf{m} + \mathbf{n})(\varphi x) = \mathbf{m}(\varphi x) + \mathbf{n}(\varphi x) = \mu(\varphi)\, x + \nu(\varphi)\, x = (\mu + \nu)(\varphi)\, x$$

și

$$(\alpha\mathbf{m})(\varphi x) = \alpha\mathbf{m}(\varphi x) + \alpha\mu(\varphi)\, x = (\alpha\mu)(\varphi)\, x.$$

Așadar, aplicația $\mu \to \mathbf{m}$ este liniară. Dacă E este cu involuție, avem

$$\overline{\mathbf{m}}(\varphi x) = \overline{\mathbf{m}(\varphi \bar{x})} = \overline{\mu(\varphi)\, \bar{x}} + \bar{\mu}(\varphi) \quad \text{pentru} \quad \varphi\, \mathscr{X}(T) \quad \text{și} \quad x \in E.$$

Rămîne de verificat egalitatea $\| \mu \| = \| \mathbf{m} \|$.

Pentru orice funcție $\varphi \in \mathscr{X}(T)$ și $x \in E$ cu $|x| = 1$ avem

$$|\mu(\varphi)| = |\mu(\varphi)|\,|x| = |\mu(\varphi)\, x| = |\mathbf{m}(\varphi x)| \leqslant \| \mathbf{m} \|\, \| \varphi x \| = \| \mathbf{m} \|\, \| \varphi \|$$

de unde

$$\| \mu \| \leqslant \| \mathbf{m} \| \leqslant + \infty.$$

Reciproc, fie $\mathbf{f} \in \mathscr{X}_E(T)$ o funcție oarecare și fie K suportul lui $\mathbf{f}$. Fie U o vecinătate compactă a lui K. Fie $\varepsilon > 0$. Există o funcție $\mathbf{g} = \sum_{i=1}^{n} \varphi_i x_i$ cu $\varphi_i \in \mathscr{X}(T, U)$ și $x_i \in E$, astfel încît

$$|\mathbf{f}(t) - \mathbf{g}(t)| \leqslant \min\left(\frac{\varepsilon}{a_U}, \varepsilon\right).$$

Atunci, pe de o parte $\| \mathbf{g} \| \leqslant \| \mathbf{f} \| + \varepsilon$, iar pe de altă parte $\mathbf{f} - \mathbf{g} \in \mathscr{X}(T, U)$, deci

$$|\mathbf{m}(\mathbf{f} - \mathbf{g}) < a_U \| \mathbf{f} - \mathbf{g} \| < \varepsilon$$

de unde

$$|\mathbf{m}(\mathbf{f})| < |\mathbf{m}(\mathbf{g})| + \varepsilon.$$

Fie $z' \in F'$ cu $|z'| = 1$, astfel ca

$$< \mathbf{m}(\mathbf{g}),\ z' > = |\mathbf{m}(\mathbf{g})|.$$

Avem

$$|\mathbf{m}(\mathbf{f})| - \varepsilon < |\mathbf{m}(\mathbf{g})| = < \mathbf{m}(\mathbf{g}),\ z' > = \mu(< \mathbf{g},\ z' >) \leqslant$$

$$\leqslant \|\mu\| \| < \mathbf{g},\ z' > \| < \|\mu\| \|\mathbf{g}\| < \|\mu\| (\|\mathbf{f}\| + \varepsilon).$$

ε fiind arbitrar, rezultă

$$|\mathbf{m}(\mathbf{f})| \leqslant \|\mu\| \|\mathbf{f}\|$$

și deci $\|\mathbf{m}\| \leqslant \|\mu\|$. Ținînd seamă și de inegalitatea contrară demonstrată mai sus, rezultă $\|\mu\| = \|\mathbf{m}\|$. Cu aceasta propoziția este demonstrată.

Corolar. *Dacă* $\mu : \mathcal{K}(T) \to C$ *este o măsură scalară și dacă* $m : \mathcal{K}_C(T) \to C$ *este măsura care prelungește pe* μ *de la* $\mathcal{K}(T)$ *la* $\mathcal{K}_C(T)$, *atunci* $\|m\| = \|\mu\|$.

Într-adevăr, măsura m verifică egalitatea

$$m(\varphi z) = \mu(\varphi) z \text{ pentru } \varphi \in \mathcal{K}(T) \text{ și } z \in C.$$

Datorită corespondenței $\mu \to \mathbf{m}$, se identifică măsura $\mu : \mathcal{K}(T) \to C$ cu măsura $\mathbf{m} : \mathcal{K}_E(T) \to E$. Pentru funcțiile $\mathbf{f} \in \mathcal{K}_E(T)$, integrala $\int \mathbf{f}\, d\mathbf{m}$ se notează de asemenea $\int \mathbf{f} d\mu$ *și se numește integrala funcției vectoriale* $\mathbf{f}$ *în raport cu măsura scalară* μ. Egalitatea din enunț se scrie atunci

$$\mu(\varphi x) = \mu(\varphi)\, x \text{ sau } \int \varphi x\, d\mu = x \int \varphi\, d\mu$$

pentru $\varphi \in \mathcal{K}(T)$ și $x \in E$.

Teorema 2. *Fie* $\mu : \mathcal{K}(T) \to C$ *o măsură reală (respectiv complexă),* E *și* F *două spații Banach reale (respectiv complexe). Pentru orice aplicație liniară și continuă* $U : E \to F$ *avem*

$$U\left(\int \mathbf{f} d\mu\right) = \int U(\mathbf{f}(t))\, d\mu(t), \quad \mathbf{f} \in \mathcal{K}_E(T).$$

Pentru orice funcție $\mathbf{g} = \sum \varphi_i x_i$ din $\mathcal{H}_E(T)$ cu $\varphi_i \in \mathcal{K}(T)$ și $x_i \in E$ avem

$$U\left(\int \mathbf{g}\, d\mu\right) = U\left(\sum_{i=1}^{n} \mu(\varphi_i)\, x_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \mu(\varphi)\, U x_i =$$

$$= \mu\left(\sum_{i=1}^{n} \varphi_i U x_i\right) = \mu\left(U \sum_{i=1}^{n} \varphi_i x_i\right) = \int U(\mathbf{g}(t))\, d\mu(t)$$

iar

$$U \circ \mathbf{g} = \sum_{i=1}^{n} \varphi_i U x_i \in \mathcal{H}_F(T).$$

Fie $\mathbf{f} \in \mathcal{K}_E(T)$ o funcție oarecare și fie K suportul său. Fie V o vecinătate compactă a lui K și fie $(\mathbf{g}_n)$ un șir de funcții din $\mathcal{K}_E$ cu suportul în V, uniform convergent către $\mathbf{f}$. Atunci funcțiile $U \circ \mathbf{g}_n$ sînt din $\mathcal{K}_E(T)$, au suportul conținut în V și converg uniform către $U \circ \mathbf{f}$. Deoarece μ este continuă pe $\mathcal{K}_E(T, V)$ și $\mathcal{K}_F(T, V)$ pentru topologia convergenței uniforme, trecînd la limită în egalitățile

$$U\left(\int \mathbf{g}_n \, d\mu\right) = \int U(\mathbf{g}_n(t)) \, d\mu(t)$$

obținem

$$U\left(\int \mathbf{f} \, d\mu\right) = \int U(\mathbf{f}(t)) \, d\mu(t).$$

Corolar. *Fie $\mu : \mathcal{K}(T) \to C$ o măsură reală (respectiv complexă) și E un spațiu Banach real (respectiv complex). Pentru orice $z' \in F'$ avem*

$$< \int \mathbf{f} \, d\mu, \; z' > = \int < \mathbf{f}, z' > d\mu, \; \mathbf{f} \in \mathcal{K}_E(T).$$

5. Măsuri pozitive

Vom demonstra mai întîi o propoziție ajutătoare.

Propoziția 7. *O funcțională aditivă $\mu : \mathcal{K}(T) \to R$ este pozitivă dacă și numai dacă este crescătoare.*

Să presupunem mai întîi că μ este pozitivă :

$$\mu(\varphi) \geqslant 0 \quad \text{pentru} \quad \varphi \geqslant 0 \quad \text{din } \mathcal{K}(T)$$

și să arătăm că μ este crescătoare :

$$\mu(\varphi) \leqslant \mu(\psi) \quad \text{dacă} \quad \varphi \leqslant \psi.$$

Într-adevăr, dacă $\varphi \leqslant \psi$, $(\varphi, \psi \in \mathcal{K}(T))$, atunci $\psi - \varphi \geqslant 0$ deci $\mu(\psi - \varphi) \geqslant 0$. Dar

$$\mu(\psi) = \mu(\psi - \varphi + \varphi) = \mu(\psi - \varphi) + \mu(\varphi)$$

deci

$$\mu(\psi - \varphi) = \mu(\psi) - \mu(\varphi)$$

și deci

$$\mu(\psi) - \mu(\varphi) \geqslant 0$$

de unde

$$\mu(\varphi) \leqslant \mu(\psi).$$

Reciproc, presupunînd că μ este crescătoare, rezultă că dacă $\varphi \geqslant 0$, $\varphi \in \mathcal{K}(T)$, atunci $\mu(\varphi) \geqslant \mu(0) = 0$, deci μ este pozitivă.

Corolarul 1. *Orice măsură pozitivă μ pe T este crescătoare.*

Corolarul 2. *Dacă μ este o măsură pozitivă pe T, atunci*

$$\|\mu\| = \sup_{\substack{f \in \mathcal{X}(T) \\ 0 \leqslant f \leqslant 1}} \mu(f) \leqslant +\infty .$$

Într-adevăr, avem evident

$$\sup_{\substack{f \in \mathcal{X} \\ 0 \leqslant f \leqslant 1}} \mu(f) \leqslant \sup_{\substack{g \in \mathcal{X} \\ |g| \leqslant 1}} |\mu(g)| = \|\mu\|.$$

Reciproc, fie $g \in \mathcal{X}$ cu $|g| \leqslant 1$. Deoarece μ este crescătoare, din relația $-|g| \leqslant g \leqslant |g|$ rezultă

$$-\mu(|g|) \leqslant \mu(g) \leqslant \mu(|g|),$$

deci

$$|\mu(g)| \leqslant \mu(|g|) \leqslant \sup_{\substack{f \in \mathcal{X} \\ 0 \leqslant f \leqslant 1}} \mu(f)$$

și deci

$$\|\mu\| \leqslant \sup_{\substack{f \in \mathcal{X} \\ 0 \leqslant f \leqslant 1}} \mu(f).$$

Corolarul 3. *Dacă μ și ν sînt două măsuri pozitive pe T și dacă $\mu \leqslant \nu$, atunci $\|\mu\| \leqslant \|\nu\|$.*

Într-adevăr, pentru orice funcție $f \geqslant 0$ din $\mathcal{X}$ avem $\mu(f) \leqslant \nu(f)$. Luînd în această inegalitate marginea superioară pentru $f \in \mathcal{X}$, $0 \leqslant f \leqslant 1$, obținem $\|\mu\| \leqslant \|\nu\|$.

Propoziția următoare arată că pentru măsurile pozitive condiția de continuitate din definiția 1 este superfluă.

Propoziția 8. *Orice funcțională liniară și pozitivă $\mu : \mathcal{X}(T) \to R$, este o măsură pozitivă pe T.*

Fie $K \subset T$ o mulțime compactă oarecare și fie $\varphi_0 : T \to [0, 1]$ o funcție continuă cu suport compact, astfel că $\varphi_0(t) = 1$ pentru orice $t \in K$. Pentru orice funcție $\varphi \in \mathcal{X}(T, K)$ avem

$$\|\varphi\| \varphi_0 \leqslant \varphi \leqslant \|\varphi\| \varphi_0 .$$

Funcționala μ fiind pozitivă, este crescătoare, deci

$$-\|\varphi\| \mu(\varphi_0) \leqslant \mu(\varphi) \leqslant \|\varphi\| \mu(\varphi_0)$$

de unde

$$|\mu(\varphi)| \leqslant \mu(\varphi_0) \|\varphi\|.$$

Luînd $a_K = \mu(\varphi_0)$, rezultă că

$$|\mu(\varphi)| \leqslant a_K \|\varphi\| \text{ pentru orice } \varphi \in \mathcal{X}(T, K)$$

și deci μ este o măsură pozitivă pe T și propoziția este demonstrată.

Ca orice măsură definită pe $\mathcal{K}(T)$, măsurile pozitive sînt unic determinate de valorile luate pe $\mathcal{K}_+(T)$. Măsurile pozitive au o proprietate suplimentară :

Propoziția 9. *Orice funcțională* $\mu : \mathcal{K}_+(T) \to R$ *aditivă și pozitivă, se poate prelungi în mod unic la o măsură pozitivă pe* T.

Pentru orice funcție $f \in \mathcal{K}(T)$ scriem $f = \varphi - \psi$ cu $\varphi, \psi \in \mathcal{K}_+(T)$ și definim

$$m(f) = \mu(\varphi) - \mu(\psi).$$

Se arată ca în demonstrația propoziției 2 că m nu depinde decît de f, prelungește pe μ și este *aditivă* pe $\mathcal{K}(T)$. Rezultă că m este o funcțională *pozitivă* :

$$m(f) \geqslant 0, \text{ pentru } f \in \mathcal{K}_+(T)$$

deci este crescătoare (propoziția 7). Rămîne să arătăm că m este *omogenă*. Să remarcăm mai întîi că dacă $f = \varphi - \psi$ cu $\varphi, \psi \in \mathcal{K}_+$, atunci $-f = \psi - \varphi$, deci

$$m(-f) = \varphi(\psi) - \mu(\varphi) = -m(f).$$

Fie $f \in \mathcal{K}(T)$. Pentru orice număr natural n avem

$$m(nf) = m(f + f + \ldots + f) = m(f) + m(f) + \ldots + m(f) = n \cdot m(f)$$

și

$$m(-nf) = m(n(-f)) = n \cdot m(-f) = n(-m(f)) = -n \cdot m(f).$$

Dacă p și q sînt două numere întregi și $q \neq 0$, atunci

$$qm\left(\frac{p}{q} f\right) = m\left(q \frac{p}{q} f\right) = m(pf) = pm(f)$$

deci

$$m\left(\frac{p}{q} f\right) = \frac{p}{q} m(f).$$

Așadar, pentru orice număr rațional r avem

$$m(rf) = rm(f).$$

Fie α un număr real oarecare. Există două șiruri (r_n) și (s_n) de numere raționale, convergente către α, astfel încît pentru fiecare n să avem

$$r_n \leqslant \alpha \leqslant s_n.$$

Dacă f este pozitivă, avem

$$r_n f \leqslant \alpha f \leqslant s_n f$$

și deoarece m este crescătoare, deducem

$$r_n m(f) = m(r_n f) \leqslant m(\alpha f) \leqslant m(s_n f) = s_n m(f)$$

și

$$\lim_{n \to \infty} r_n m(f) = \lim_{n \to \infty} s_n m(f) = \alpha m(f).$$

Trecînd la limita în inegalitățile precedente deducem că

$$\alpha m(f) = m(\alpha f).$$

Dacă $f = f_1 - f_2$ cu f_1 și f_2 din $\mathcal{K}_+(T)$, atunci

$$\alpha f = \alpha f_1 - \alpha f_2$$

iar αf_1 și αf_2 sînt ambele pozitive sau ambele negative. Atunci

$$m(\alpha f) = m(\alpha f_1) - m(\alpha f_2) = \alpha m(f_1) - \alpha m(f_2) = \\ = \alpha(m(f_1) - m(f_2)) = \alpha m(f).$$

Cu aceasta propoziția este demonstrată.

Observație. De obicei, prelungirea m a lui μ se notează tot cu μ.

Propoziția 10. *Fie μ o măsură pozitivă pe T. Pentru orice mulțime $H \subset \mathcal{K}_+$ filtrantă pentru relația $\leqslant$, funcția pozitivă $g \to \mu(g)$ are limită (finită sau $+\infty$) după filtrul secțiunilor lui H și*

$$\lim_{g \in H} \mu(g) = \sup_{g \in H} \mu(g).$$

Dacă $\sup_{g \in H} g \in \mathcal{K}_+$, *atunci*

$$\lim_{g \in H} \mu(g) = \mu(\lim_{g \in H} g) = \mu(\sup_{g \in H} g).$$

Să notăm $a = \sup_{g \in H} \mu(g)$. Avem $0 \leqslant a \leqslant \infty$. Fie $\alpha < a$. Există o funcție $g_\alpha \in H$ astfel ca $\alpha < \mu(g_\alpha) \leqslant a$. Atunci, pentru orice funcție $g \geqslant g_\alpha$ din H avem $\mu(g) \geqslant \mu(g_\alpha)$, deci $\alpha < \mu(g) \leqslant a$. Așadar, fiecare vecinătate a lui a conținea imaginea prin μ a unei secțiuni $S(g_\alpha) = \{g \mid g \in H, g \geqslant g_\alpha\}$ a lui H. Aceasta înseamnă că funcția μ are limita a, după filtrul secțiunilor lui H:

$$\lim_{g \in H} \mu(g) = a = \sup_{g \in H} \mu(g).$$

Corolarul 1. *Fie μ o măsură pozitivă pe T. Pentru orice funcție $f \geqslant 0$ definită pe T avem*

$$0 \leqslant \lim_{\substack{g \in \mathcal{K} \\ g \leqslant f}} \mu(g) = \sup_{\substack{g \in \mathcal{K} \\ g \leqslant f}} \mu(g) \leqslant \infty.$$

Într-adevăr, mulțimea $H = \{g \mid g \in \mathcal{K}_+, g \leqslant f\}$ este filtrantă pentru relația $\leqslant$.

Corolarul 2. *Dacă μ este o măsură pozitivă pe T, atunci*

$$\|\mu\| = \lim_{\substack{g \in \mathcal{K} \\ 0 \leqslant g \leqslant 1}} \mu(g) \leqslant +\infty.$$

Într-adevăr, din corolarul 1 deducem, pentru $f(t) \equiv 1$,

$$\lim_{\substack{g \in \mathcal{K} \\ 0 \leqslant g \leqslant 1}} \mu(g) = \sup_{\substack{g \in \mathcal{K} \\ 0 \leqslant g \leqslant 1}} \mu(g) \leqslant +\infty.$$

Afirmația rezultă atunci din corolarul 2 al propoziției 7.

Corolarul 3. *Dacă* μ *și* ν *sînt două măsuri pozitive pe* T, *atunci*

$$\|\mu + \nu\| = \|\mu\| + \|\nu\|.$$

Într-adevăr, $\mu + \nu$ este o măsură pozitivă pe T, deci

$$\|\mu + \nu\| = \lim_{0 \leqslant g \leqslant 1} (\mu + \nu)(g) = \lim_{0 \leqslant g \leqslant 1} (\mu(g) + \nu(g)) =$$

$$= \lim_{0 \leqslant g \leqslant 1} \mu(g) + \lim_{0 \leqslant g \leqslant 1} \nu(g) = \|\mu\| + \|\nu\|,$$

6. Măsuri cu valori scalare

Fie E un spațiu Banach (real sau complex). Vom demonstra mai întîi următoarea

Lemă. *Fie* $\mathbf{h} \in \mathcal{K}_E(T)$ *și* $g \in \mathcal{K}_+(T)$ *astfel ca* $0 \leqslant g \leqslant |\mathbf{h}|$. *Să punem*

$$\sigma_{\mathbf{h}}(t) = \begin{cases} \dfrac{\mathbf{h}(t)}{|\mathbf{h}(t)|} & \text{dacă } \mathbf{h}(t) \neq 0, \\ 0 & \text{dacă } \mathbf{h}(t) = 0. \end{cases}$$

Atunci $\sigma_{\mathbf{h}} |\mathbf{h}| = \mathbf{h}$ *și* $\sigma_{\mathbf{h}} g \in \mathcal{K}_E(T)$.

Egalitatea $\sigma_{\mathbf{h}} |\mathbf{h}| = \mathbf{h}$ este imediată. Funcția $\sigma_{\mathbf{h}} g$ are suportul compact (conținut în suportul lui g). Să arătăm că $\sigma_{\mathbf{h}} g$ este continuă.

Fie $t_0 \in T$. Dacă $\mathbf{h}(t_0) \neq 0$, există o vecinătate deschisă V a lui t_0 astfel ca $\mathbf{h}(t) \neq 0$ pentru orice $t \in V$. Atunci funcția $|\mathbf{h}|$ este continuă pe V și diferită de 0, deci funcția $\sigma_{\mathbf{h}} = \dfrac{\mathbf{h}}{|\mathbf{h}|}$ este continuă pe V, deci în t_0, și deci și funcția $\sigma_{\mathbf{h}} g$ este continuă în t_0.

Dacă $\mathbf{h}(t_0) = 0$, atunci $g(t_0) = 0$. Fie $\varepsilon > 0$; există o vecinătate V a lui t_0 astfel ca $g(t) \leqslant \varepsilon$ pentru orice $t \in V$. Atunci

$$\sigma_{\mathbf{h}}(t) g(t)| = |\sigma_{\mathbf{h}}(t)| \, g(t) \leqslant g(t) \leqslant \varepsilon$$

pentru $t \in V$. Deoarece $\sigma_{\mathbf{h}}(t_0) \, g(t_0) = 0$, rezultă că $\sigma_{\mathbf{h}} g$ este continuă în t_0.

Fie acum o măsură cu valori scalare $\mathbf{m} : \mathcal{K}_E(T) \to C$.

Pentru fiecare funcție $\varphi \geqslant 0$ din $\mathcal{K}_+(T)$ să punem

$$\mu(\varphi) = \sup_{|\mathbf{f}| \leqslant \varphi} |\mathbf{m}(\mathbf{f})|, \quad \mathbf{f} \in \mathcal{K}_E(T). \tag{1}$$

Propoziția 11. *Funcționala* μ *definită pe* $\mathcal{K}_+(T)$ *prin egalitatea* (1) *are următoarele proprietăți:*

1) $0 \leqslant \mu(\varphi) < +\infty$ *pentru orice* $\varphi \in \mathcal{K}_+(T)$;

2) $\mu(\varphi_1 + \varphi_2) = \mu(\varphi_1) + \mu(\varphi_2)$, $\varphi_1, \varphi_2 \in \mathcal{K}_+(T)$;

3) $|\mathbf{m}(\mathbf{f})| \leqslant \mu(|\mathbf{f}|)$ *pentru orice* $\mathbf{f} \in \mathcal{K}_E(T)$.

Într-adevăr, fie $\varphi \in \mathcal{K}_+(T)$ și fie K suportul său; fie $a_K > 0$ astfel ca

$$|\mathbf{m}(\mathbf{f})| \leqslant a_K \|\mathbf{f}\| \text{ pentru orice } \mathbf{f} \in \mathcal{K}_E(T, K).$$

Orice funcție $f \in \mathcal{K}_E(T)$, pentru care $|f| \leqslant \varphi$, are suportul conținut în K, deci

$$\mu(\varphi) = \sup_{|f| \leqslant \varphi} |\mathbf{m}(f)| \leqslant \sup_{|f| \leqslant \varphi} a_K \|f\| \leqslant a_K \|\varphi\| < +\infty.$$

Inegalitatea $\mu(\varphi) \geqslant 0$ este evidentă și astfel proprietatea 1) este demonstrată.

Proprietatea 3) rezultă din egalitatea (1) luînd $\varphi = |f|$.

Rămîne să arătăm că μ este aditivă pe $\mathcal{K}_+(T)$.

Fie $\varphi, \varphi' \in \mathcal{K}_+(T)$ și $\varepsilon > 0$. Există două funcții $f, f' \in \mathcal{K}_E(T)$ cu $|f| \leqslant \varphi$, $|f'| \leqslant \varphi'$ și

$$\mu(\varphi) \leqslant |\mathbf{m}(f)| + \frac{\varepsilon}{2}, \quad \mu(\varphi') \leqslant |\mathbf{m}(f')| + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Există două numere complexe θ și θ' cu $|\theta| = |\theta'| = 1$, astfel ca

$$|\mathbf{m}(f)| = \theta \mathbf{m}(f) = \mathbf{m}(\theta f),$$

$$|\mathbf{m}(f')| = \theta' \mathbf{m}(f') = \mathbf{m}(\theta' f').$$

Atunci

$$|\theta f + \theta' f'| \leqslant |\theta f| + |\theta' f'| \leqslant |f| + |f'| \leqslant \varphi + \varphi'$$

și

$$\mu(\varphi) + \mu(\varphi') \leqslant |\mathbf{m}(f)| + |\mathbf{m}(f')| + \varepsilon = \mathbf{m}(\theta f + \theta' f') + \varepsilon \leqslant \mu(\varphi + \varphi') + \varepsilon.$$

ε fiind arbitrar, rezultă

$$\mu(\varphi) + \mu(\varphi') \leqslant \mu(\varphi + \varphi').$$

Pentru a demonstra inegalitatea contrară, fie $\mathbf{h} \in \mathcal{K}_E(T)$ astfel ca $|\mathbf{h}| \leqslant \varphi + \varphi'$ și

$$\mu(\varphi + \varphi') \leqslant |\mathbf{m}(\mathbf{h})| + \varepsilon.$$

Funcția $g = \inf(|\mathbf{h}|, \varphi)$ este pozitivă, din $\mathcal{K}_+(T)$ și avem $g \leqslant |\mathbf{h}|$ și $g \leqslant \varphi$. Funcția $g' = |\mathbf{h}| - g$ aparține de asemenea lui $\mathcal{K}_+(T)$ și avem $g' \leqslant |\mathbf{h}|$ și $g' \leqslant \varphi'$. Într-adevăr, dacă $|\mathbf{h}(t_0)| \leqslant \varphi(t_0)$, atunci $g(t_0) = |\mathbf{h}(t_0)|$ deci $g'(t_0) = 0$; dacă $|\mathbf{h}(t_0)| > \varphi(t_0)$, atunci $g(t_0) = \varphi(t_0)$ și

$$g'(t_0) = |\mathbf{h}(t_0)| - g(t_0) = |\mathbf{h}(t_0)| - \varphi(t_0) \leqslant \varphi(t_0) + \varphi'(t_0) - \varphi(t_0) = \varphi'(t_0).$$

Să considerăm acum funcția $\sigma_{\mathbf{h}}$ definită în lema precedentă. Avem

$$\mathbf{h} = \sigma_{\mathbf{h}} |\mathbf{h}| = \sigma_{\mathbf{h}} g + \sigma_{\mathbf{h}} g'$$

iar $\sigma_{\mathbf{h}} g$ și $\sigma_{\mathbf{h}} g'$ aparțin lui $\mathcal{K}_E(T)$. Avem de asemenea

$$|\sigma_{\mathbf{h}} g| \leqslant g \leqslant \varphi \quad \text{și} \quad |\sigma_{\mathbf{h}} g'| \leqslant g' \leqslant \varphi')$$

deci

$$\mu(\varphi + \varphi') \leqslant \mathbf{m}(\sigma_{\mathbf{h}} g + \sigma_{\mathbf{h}} g') + \varepsilon \leqslant$$

$$\leqslant |\mathbf{m}(\sigma_{\mathbf{h}} g)| + |\mathbf{m}(\sigma_{\mathbf{h}} g')| + \varepsilon \leqslant \mu(\varphi) + \mu(\varphi') + \varepsilon.$$

ε fiind arbitrar, rezultă

$$\mu(\varphi + \varphi') \leqslant \mu(\varphi) + \mu(\varphi')$$

și deci

$$\mu(\varphi + \varphi') = \mu(\varphi) + \mu(\varphi')$$

și propoziția este demonstrată.

Din propoziția 9 rezultă că există o măsură pozitivă unică pe T, notată tot μ, care verifică egalitatea (1) pentru orice funcție $\varphi \geqslant 0$ din $\mathcal{K}(T)$.

Propoziția 12. *Măsura pozitivă μ pe T definită de egalitatea* (1), *este cea mai mică măsură pozitivă pe T care verifică inegalitatea*

$$|\mathbf{m}(\mathbf{f})| \leqslant \mu(|\mathbf{f}|) \text{ pentru orice } \mathbf{f} \in \mathcal{K}_E(T).$$

Într-adevăr, fie ν o măsură pozitivă pe T astfel ca

$$|\mathbf{m}(\mathbf{f})| \leqslant \nu(|\mathbf{f}|) \text{ pentru orice } \mathbf{f} \in \mathcal{K}_{\hat{E}}(T).$$

Pentru orice funcție $\varphi \in \mathcal{K}_+(T)$ avem

$$\mu(\varphi) = \sup_{|\mathbf{f}| \leqslant \varphi} |\mathbf{m}(\mathbf{f})| \leqslant \sup_{|\mathbf{f}| \leqslant \varphi} \nu(|\mathbf{f}|) \leqslant \nu(\varphi)$$

adică $\mu \leqslant \nu$.

Măsura pozitivă μ definită de egalitatea (1) va fi notată adesea $|\mathbf{m}|$ și va fi numită *modulul* lui $\mathbf{m}$.

Dacă μ este o măsură *pozitivă* pe T, atunci $|\mu| = \mu$.

Cu această notație, inegalitatea (2) se poate scrie astfel:

$$\left|\int \mathbf{f} d\mathbf{m}\right| \leqslant \int |\mathbf{f}| \, d|\mathbf{m}| \quad \text{pentru orice } \mathbf{f} \in \mathcal{K}_E(T),$$

iar dacă μ este o măsură pozitivă,

$$\left|\int \varphi d\mu\right| \leqslant \int |\varphi| \, d\mu \text{ pentru orice } \varphi \in \mathcal{K}(T).$$

Propoziția 13. *Avem $\|\mathbf{m}\| = \|\mu\| \leqslant +\infty$ dacă $\mu = |\mathbf{m}|$.*

Într-adevăr,

$$\|\mathbf{m}\| = \sup_{\substack{\|\mathbf{f}\| \leqslant 1 \\ \mathbf{f} \in \mathcal{K}_E}} |\mathbf{m}(\mathbf{f})| \leqslant \sup_{\|\mathbf{f}\| \leqslant 1} \mu(|\mathbf{f}|) \leqslant \sup_{\substack{\|\varphi\| \leqslant 1 \\ \varphi \in \mathcal{K}}} |\mu(\varphi)| = \|\mu\|.$$

Pentru a demonstra inegalitatea contrară, fie $\varphi \in \mathcal{K}(T)$ cu $\|\varphi\| \leqslant 1$. Deoarece $\mu \geqslant 0$, avem $|\mu| = \mu$, deci

$$|\mu(\varphi)| \leqslant \mu(|\varphi|) = \sup_{\substack{|\mathbf{f}| \leqslant |\varphi| \\ \mathbf{f} \in \mathcal{K}_E}} |\mathbf{m}(\mathbf{f})| \leqslant \sup_{\substack{\|\mathbf{f}\| \leqslant 1 \\ \mathbf{f} \in \mathcal{K}_E}} |\mathbf{m}(\mathbf{f})| = \|\mathbf{m}\|$$

de unde

$$\|\mu\| = \sup_{\substack{\|\varphi\| \leqslant 1 \\ \varphi \in \mathcal{K}}} |\mu(\varphi)| \leqslant \|\mathbf{m}\|$$

Din cele două inegalități de sens contrar rezultă $\|\mathbf{m}\| = \|\mu\|$.

Corolarul 1. *Avem*

$$\|\mathbf{m}\| = \sup_{\substack{0\leqslant\varphi\leqslant 1\\ \varphi\in\mathcal{X}}} |\mathbf{m}|(\varphi) \leqslant \infty.$$

Într-adevăr, pentru măsura pozitivă $\mu = |\mathbf{m}|$ avem

$$\|\mu\| = \sup_{\substack{0\leqslant\varphi\leqslant 1\\ \varphi\in\mathcal{X}}} \mu(\varphi).$$

Corolarul 2. *Măsura* $\mathbf{m}$ *este continuă pe* $\mathcal{X}_B(T)$ *pentru topologia convergenței uniforme , dacă și numai dacă măsura* $|\mathbf{m}|$ *este continuă pe* $\mathcal{X}(T)$ *pentru această topologie.*

Propoziția 14. *Orice măsură reală* μ *este diferența a două măsuri pozitive.*

Fie $|\mu|$ modulul lui μ. Pentru orice funcție $\varphi \geqslant 0$ din $\mathcal{X}(T)$ avem

$$|\mu(\varphi)| \leqslant |\mu|(\varphi)$$

deci

$$-|\mu|(\varphi) \leqslant \mu(\varphi) \leqslant |\mu|(\varphi).$$

Rezultă că

$$-|\mu| \leqslant \mu \leqslant |\mu| \quad \text{și} \quad -|\mu| \leqslant -\mu \leqslant |\mu|$$

deci $|\mu| - \mu \geqslant 0$ și $|\mu| + \mu \geqslant 0$. Să notăm

$$\mu_+ = \frac{1}{2}(|\mu| + \mu) \quad \text{și} \quad \mu_- = \frac{1}{2}(|\mu| - \mu).$$

μ_+ și μ_- sînt măsuri pozitive și avem

$$\mu = \mu_+ - \mu_-.$$

Observație. Avem de asemenea

$$|\mu| = \mu_+ + \mu_-.$$

μ_+ și μ_- se numesc, resectiv *partea pozitivă* și *partea negativă* a măsurii reale μ.

O măsură reală μ poate fi scrisă în mai multe moduri ca diferență a două măsuri pozitive. De exemplu, dacă $\nu \geqslant 0$, atunci

$$\mu_+ + \nu \geqslant 0, \quad \mu_- + \nu \geqslant 0 \quad \text{și} \quad \mu = (\mu_+ + \nu) - (\mu_- + \nu).$$

Măsurile μ_+ și μ_- sînt singurele măsuri pozitive care verifică în același timp egalitățile

$$\mu = \mu_+ - \mu_- \quad \text{și} \quad |\mu| = \mu_+ + \mu_-.$$

Corolar. *Dacă* μ *este o măsură reală, avem*

$$\|\mu\| = \|\mu_+\| + \|\mu_-\| \leqslant +\infty.$$

Într-adevăr, $|\mu| = \mu_+ + \mu_-$ deci (corolarul 3 al propoziției 10),

$$\||\mu|\| = \|\mu_+\| + \|\mu_-\|.$$

Pe de altă parte, $\|\mu\| = \frac{1}{2}\||\mu|\|$, deci

$$\|\mu\| = \|\mu_+\| + \|\mu_-\|.$$

§ 3. MĂSURI MAJORATE

1. Familii majorate de măsuri reale

Vom arăta că în spațiul vectorial ordonat $\mathcal{M}(T)$ al măsurilor reale pe T orice mulțime majorată are margine superioară.

Vom demonstra mai întîi

Propoziția 1. *Pentru orice măsură reală* μ *avem*

$$|\mu| = \sup(\mu, -\mu),\ \mu_+ = \sup(\mu, 0),\ \mu_- = \sup(-\mu, 0).$$

Din inegalitatea

$$-|\mu| \leqslant \mu \leqslant |\mu|$$

deducem

$$|\mu| \geqslant \mu \quad \text{și} \quad |\mu| \geqslant -\mu$$

deci

$$|\mu| \geqslant \sup(-\mu, \mu).$$

Să arătăm că dacă $\nu \geqslant \mu$ și $\nu \geqslant -\mu$, atunci $\nu \geqslant |\mu|$, de unde va rezulta că $|\mu| = \sup(-\mu, \mu)$. Pentru orice funcție $\varphi \in \mathcal{K}(T)$ avem $\mu(\varphi) \leqslant \nu(\varphi)$ și $-\mu(\varphi) \leqslant \nu(\varphi)$ deci $|\mu(\varphi)| \leqslant \nu(\varphi)$. În particular, rezultă că $\nu(\varphi) \geqslant 0$ pentru $\varphi \in \mathcal{K}_+(T)$, adică $\nu \geqslant 0$.

Fie acum $\varphi \in \mathcal{K}(T)$ oarecare. Să notăm

$$\varphi_+ = \frac{1}{2}(|\varphi| + \varphi) \quad \text{și} \quad \varphi_- = \frac{1}{2}(|\varphi| - \varphi)$$

deci $\varphi_+,\ \varphi_- \in \mathcal{K}_+(T)$ și

$$\varphi = \varphi_+ - \varphi_-, \quad |\varphi| = \varphi_+ + \varphi_-.$$

Atunci

$$|\mu(\varphi)| = |\mu(\varphi_+) - \mu(\varphi_-)| \leqslant |\mu(\varphi_+)| + |\mu(\varphi_-)| \leqslant$$
$$\leqslant \nu(\varphi_+) + \nu(\varphi_-) = \nu(|\varphi|).$$

Cum $|\mu|$ este cea mai mică măsură care verifică inegalitatea $|\mu(\varphi)| \leqslant |\mu|(\varphi)$ pentru orice $\varphi \in \mathcal{K}(T)$, rezultă că $|\mu| \leqslant \nu$ și deci

$$|\mu| = \sup(\mu, -\mu).$$

Celelalte egalități rezultă din relațiile *)

$$\sup(\mu, \nu) + \lambda = \sup(\mu + \lambda, \nu + \lambda),$$
$$\sup(\alpha\mu, \alpha\nu) = \alpha \sup(\mu, \nu), \alpha \geqslant 0.$$

Anume:

$$|\mu| + \mu = \sup(\mu, -\mu) + \mu = \sup(2\mu, 0)$$
$$|\mu| - \mu = \sup(\mu, -\mu) - \mu = \sup(0, -2\mu)$$

de unde

$$\mu_+ = \frac{1}{2}(|\mu| + \mu) = \sup(\mu, 0),$$

$$\mu_- = \frac{1}{2}(|\mu| - \mu) = \sup(0, -\mu) = \sup(-\mu, 0).$$

Propoziția 2. *Dacă* μ *este o măsură reală avem*

$$\inf(\mu_+, \mu_-) = 0 \text{ și } \sup(\mu_+, \mu_-) = |\mu|.$$

Dacă μ_1 *și* μ_2 *sînt două măsuri pozitive cu* $\mu = \mu_1 - \mu_2$ *și dacă* $\inf(\mu_1, \mu_2) = 0$, *atunci* $\mu_1 = \mu_+$ *și* $\mu_2 = \mu_-$.

Să notăm $\lambda = \inf(\mu_+, \mu_-)$ și să considerăm măsurile $\nu_1 = \mu_+ - \lambda$ și $\nu_2 = \mu_- - \lambda$. Avem, evident, $\nu_1 \geqslant 0$ și $\nu_2 \geqslant 0$ și $\mu = \nu_1 - \nu_2$, de unde $\mu \leqslant \nu_1$. Atunci

$$\mu_+ = \sup(\mu, 0) \leqslant \sup(\nu, 0) = \nu.$$

Rezultă că $\lambda = \mu_+ - \nu \leqslant 0$. Dar $\lambda \geqslant 0$, deci $\lambda = 0$, adică

$$\inf(\mu_+, \mu_-) = 0.$$

Dacă $\mu = \mu_1 - \mu_2$ și $\mu_1 \geqslant 0$, $\mu_2 \geqslant 0$, atunci $\mu \leqslant \mu_1$ și

$$\mu_+ = \sup(\mu, 0) \leqslant \sup(\mu_1, 0) = \mu_1.$$

Să notăm $\lambda = \mu_1 - \mu_+$. Avem

$$\mu_2 = \mu_1 - \mu = \mu_1 - \mu_+ + \mu_- = \lambda + \mu_-.$$

Din egalitățile $\mu_1 = \lambda + \mu_+$ și $\mu_2 = \lambda + \mu_-$ rezultă $\lambda \leqslant \mu_1$ și $\lambda \leqslant \mu_2$ deci $\lambda \leqslant \inf(\mu_1, \mu_2) = 0$. Dar $\lambda \geqslant 0$, deci $\lambda = 0$, de unde $\mu_1 = \mu_+$ și $\mu_2 = \mu_-$.

Egalitatea $\sup(\mu_+, \mu_-) = |\mu|$ rezultă astfel:

$$\sup(\mu_+, \mu_-) = (\sup(\mu_+, \mu_-) - \mu_-) + \mu_- =$$
$$= \sup(\mu_+ - \mu_-, 0) + \mu_- = \sup(\mu, 0) + \mu_- = \mu_+ + \mu_- = |\mu|.$$

*) Aceste relații trebuie înțelese astfel: dacă marginea superioară dintr-o parte a egalității există, atunci există și marginea superioară din cealaltă parte a egalității, iar egalitatea însăși este adevărată.

Propoziția 3. *Orice mulțime finită de măsuri reale are margine superioară și margine inferioară.*

Este suficient să demonstrăm propoziția pentru două măsuri μ și ν. În propoziția 1 s-a demonstrat că există $\sup(\mu - \nu, 0) = (\mu - \nu)_+$. Atunci există și $\sup(\mu, \nu)$ și

$$\sup(\mu, \nu) = \sup(\mu - \nu, 0) + \nu = (\mu - \nu)_+ + \nu.$$

Să observăm mai departe că

$$\sup(\mu, \nu) = \sup(-\mu + \nu, 0) + \mu = (\mu - \nu)_- + \mu.$$

Rezultă atunci că

$$\sup(\mu, \nu) = \frac{1}{2}(\mu + \nu + (\mu - \nu)_+ + (\mu - \nu)_-)$$

adică

$$\sup(\mu, \nu) = \frac{1}{2}(\mu + \nu + |\mu - \nu|).$$

Deducem apoi că există $\inf(\mu, \nu) = -\sup(-\mu, -\nu)$ și propoziția este demonstrată.

Observație. Propoziția 3 afirmă că spațiul ordonat $\mathcal{M}(T)$ al măsurilor reale pe T este *reticulat*. Un spațiu vectorial și reticulat se numește spațiu Riesz.

Propoziția 4. *Orice parte nevidă A de măsuri pozitive, majorată și filtrantă pentru relația $\leqslant$, are margine superioară.*

Deoarece A este majorată, există o măsură $\mu_0 \geqslant 0$ astfel ca $\mu \leqslant \mu_0$ pentru orice $\mu \in A$.

Pentru orice funcție pozitivă $\varphi \in \mathcal{K}_+(T)$ să punem

$$\nu(\varphi) = \sup_{\mu \in A} \mu(\varphi).$$

Avem deci

$$0 \leqslant \nu(\varphi) \leqslant \mu_0(\varphi) < +\infty \text{ pentru } \varphi \in \mathcal{K}_+(T).$$

Deoarece A este filtrantă, avem

$$\nu(\varphi) = \lim_{\mu \in A} \mu(\varphi) \text{ pentru } \varphi \in \mathcal{K}_+(T).$$

De aici rezultă că ν este aditivă pe $\mathcal{K}_+(T)$ deci se poate prelungi la o măsură pe T, notată tot ν. Din definiția lui ν rezultă că $\mu \leqslant \nu$ pentru orice $\mu \in A$, iar pe de altă parte $\nu \leqslant \mu_0$ pentru orice majorant μ_0 al lui A, deci ν este cel mai mic majorant al lui A, adică

$$\nu = \sup A.$$

Propoziția 5. *Orice parte H de măsuri reale, nevidă și majorată, are margine superioară.*

Fie A mulțimea marginilor superioare ale familiilor finite de măsuri din H. Mulțimea A este filtrantă pentru relația $\leqslant$.

Într-adevăr, fie $\mu_1, \mu_2 \in A$; există două părți finite C_1 și C_2 ale lui H astfel ca $\mu_1 = \sup C_1$ și $\mu_2 = \sup C_2$. Atunci $\mu_3 = \sup (C_1 \cup C_2) \in A$ și $\mu_1 \leqslant \mu_3$, $\mu_2 \leqslant \mu_3$.

Pe de altă parte, orice majorant al lui H este și un majorant al lui A, deci A este majorată. Fie $\mu_0 \in A$ și $A_0 = \{\mu \mid \mu \in A, \mu \geqslant \mu_0\}$. Mulțimea $A_0 - \mu_0 = \{\mu - \mu_0 \mid \mu \in A, \mu \geqslant \mu_0\}$ este filtrantă pentru relația $\leqslant$, majorată, și formată din măsuri pozitive, deci există $\sup (A_0 - \mu_0)$. Atunci există și

$$\sup A_0 = \sup (A_0 - \mu_0) + \mu_0$$

și deci există

$$\sup A = \sup A_0 = \nu.$$

Urmează că ν este marginea superioară a mulțimii H. Într-adevăr, orice majorant λ al lui H este și un majorant al lui A, deci $\lambda \geqslant \nu$. Pe de altă parte, ν este un majorant al lui H, deoarece pentru orice $\mu \in H$ există $\mu_1 \in A$ astfel ca $\mu \leqslant \mu_1$, deci $\mu \leqslant \nu$. Rezultă așadar că $\nu = \sup H$.

Corolar. *Orice parte H de măsuri reale, nevidă și minorată are margine inferioară.*

Într-adevăr, $-H = \{-\mu \mid \mu \in H\}$ este nevidă și majorată deci are margine superioară. Atunci

$$\inf H = -\sup (-H).$$

Observație. Un spațiu vectorial ordonat reticulat în care orice parte nevidă și majorată are margine superioară se numește spațiu *complet reticulat*. Spațiul $\mathcal{M}(T)$ al măsurilor reale este deci complet reticulat.

2. Măsuri majorate

Fie E și F două spații Banach (reale sau complexe).

Definiția 1. *Spunem că o măsură $\mathbf{m} : \mathcal{K}_E(T) \to F$ este majorată de o măsură pozitivă ν, dacă*

$$|\mathbf{m}(\mathbf{f})| \leqslant \nu(|\mathbf{f}|) \text{ pentru orice funcție } \mathbf{f} \in \mathcal{K}_E(T).$$

Spunem că măsura $\mathbf{m} : \mathcal{K}_E(T) \to F$ este majorată, dacă există o măsură pozitivă care o majorează.

Proprietatea de continuitate a unei măsuri pe spațiile $\mathcal{K}_E(T, K)$ rezultă din faptul că este majorată:

Propoziția 6. *Orice aplicație liniară majorată $\mathbf{m} : \mathcal{K}_E(T) \to F$ este o măsură majorată.*

Fie ν o măsură $\geqslant 0$ pe T care majorează pe $\mathbf{m}$:

$$|\mathbf{m}(\mathbf{f})| \leqslant \nu(|\mathbf{f}|), \text{ pentru } \mathbf{f} \in \mathcal{K}_E(T).$$

Fie $K \subset T$ o mulțime compactă și fie $a_K > 0$ astfel ca

$$|\nu(\varphi)| \leqslant a_K \|\varphi\| \text{ pentru orice } \varphi \in \mathcal{K}(T, K).$$

Pentru orice funcție $\mathbf{f} \in \mathcal{K}_E(T, K)$ avem $|\mathbf{f}| \in \mathcal{K}(T, K)$ și $\|\mathbf{f}\| = \||\mathbf{f}|\|$, deci

$$|\mathbf{m}(\mathbf{f})| \leqslant \nu(|\mathbf{f}|) \leqslant a_K \|\mathbf{f}\|.$$

Aceasta înseamnă că $\mathbf{m}$ este o măsură.

Există măsuri care nu sînt majorate, așa cum rezultă din exemplul următor.

Exemplu. Să luăm $T = [0, 1]$, $E = R$, $F = \mathcal{C}(T)$ și $\mathbf{m}$ aplicația identică a lui $\mathcal{C}(T)$ în F. Evident, $\mathbf{m}$ este continuă pe $\mathcal{C}(T)$, deci este o măsură; dar $\mathbf{m}$ nu este majorată. Într-adevăr, să presupunem prin absurd că $\mathbf{m}$ ar fi majorată de măsura pozitivă ν:

$$\|\varphi\| = |\mathbf{m}(\varphi)| \leqslant \nu(|\varphi|) \text{ pentru orice } \varphi \in \mathcal{C}(T).$$

Să arătăm mai întîi că pentru orice mulțime compactă $K \subset T$ cu interiorul nevid, și orice funcție pozitivă $\psi \in \mathcal{C}(T)$, egală cu 1 pe K, avem $\nu(\psi) \geqslant 1$. Deoarece $\operatorname{Int} K \neq \emptyset$, există o funcție $\varphi \in \mathcal{C}(T, K)$ neidentic nulă. Atunci $|\varphi| \leqslant \|\varphi\| \psi$ deci $\nu(|\varphi|) \leqslant \|\varphi\| \nu(\psi)$ și deci $0 < \|\varphi\| = |\mathbf{m}(\varphi)| \leqslant \nu(|\varphi|) \leqslant \|\varphi\| \nu(\psi)$ de unde $\nu(\psi) \geqslant 1$.

Pentru fiecare număr natural n să notăm $K_n = \left[\frac{1}{4n-1}, \frac{1}{4n-2}\right]$ și să luăm $\psi_n \in \mathcal{C}_+(T)$ cu suportul conținut în $\left[\frac{1}{4n}, \frac{1}{4n-3}\right]$ astfel ca $\psi_n(t) = 1$ pentru $t \in K_n$. Atunci pentru fiecare n avem $\nu(\psi_n) \geqslant 1$ și $\sum_{i=1}^{n} \psi_i \leqslant 1$, deci $n \leqslant \sum_{i=1}^{n} \nu(\psi_n) = \nu\left(\sum_{i=1}^{n} \psi_n\right) \leqslant \nu(1)$, de unde $\nu(1) = +\infty$, ceea ce este absurd, deoarece funcția identic egală cu 1 aparține lui $\mathcal{C}(T)$.

Pentru măsurile cu valori scalare, avem

Propoziția 7. *Orice măsură* $\mathbf{m} : \mathcal{K}_E(T) \to C$ *cu valori scalare, este majorată de măsura* $\mu = |\mathbf{m}|$.

Într-adevăr, măsura $|\mathbf{m}|$ majorează pe $\mathbf{m}$, este cea mai mică măsură pozitivă care majorează pe $\mathbf{m}$ (propoziția 12, § 2) și $\|\mathbf{m}\| = \|\mu\|$.

În particular, măsurile scalare sînt majorate. O măsură pozitivă μ este majorată de ea însăși, deoarece $|\mu| = \mu$.

Vom arăta acum că nu numai măsurile cu valori scalare, ci orice măsură majorată $\mathbf{m}$ posedă o cea mai mică măsură pozitivă majorantă care va fi notată cu $|\mathbf{m}|$:

Propoziția 8. *Dacă* $\mathbf{m} : \mathcal{K}_E(T) \to F$ *este o măsură majorată, atunci există o cea mai mică măsură pozitivă* $|\mathbf{m}|$ *care majorează pe* $\mathbf{m}$, *și* $\|\mathbf{m}\| \leqslant \||\mathbf{m}|\| \leqslant +\infty$.

Dacă E *și* F *sînt spații Banach cu involuție, atunci* $\overline{\mathbf{m}}$ *este majorată și* $|\overline{\mathbf{m}}| = |\mathbf{m}|$.

Fie ν o măsură $\geqslant 0$ care majorează pe $\mathbf{m}$:

$$|\mathbf{m}(\mathbf{f})| \leqslant \nu(|\mathbf{f}|) \text{ pentru } \mathbf{f} \in \mathcal{K}_E(T).$$

Pentru fiecare $z' \in F'$ să considerăm măsura $z' \circ \mathbf{m} : \mathcal{K}_E(T) \to C$ definită prin egalitatea

$$(z \circ \mathbf{m})(\mathbf{f}) = < \mathbf{m}(\mathbf{f}),\ z' > \text{ pentru } \mathbf{f} \in \mathcal{K}_E(T).$$

Pentru orice funcţie $\mathbf{f} \in \mathcal{K}_E(T)$ avem

$$|(z' \circ \mathbf{m})(\mathbf{f})| \leqslant |z'|\ |\mathbf{m}(\mathbf{f})| \leqslant |z'|\ \nu\ (|\mathbf{f}|)$$

deci măsura $z' \circ \mathbf{m}$ este majorată de măsura pozitivă $|z'|\nu$. Dar $z' \circ \mathbf{m}$ este o măsură cu valori scalare, şi $|z' \circ \mathbf{m}|$ este cea mai mică măsură pozitivă care o majorează. Urmează că

$$|z' \circ \mathbf{m}| \leqslant |z'|\nu \text{ pentru orice } z' \in F'$$

Familia $(|z' \circ \mathbf{m}|)$ de măsuri pozitive este majorată în spaţiul complet reticulat $\mathcal{M}(T)$, de măsură ν. Urmează că această familie are o margine superioară μ:

$$|z' \circ \mathbf{m}| \leqslant \mu \leqslant \nu \text{ pentru orice } z' \in F' \text{ cu } |z'| \leqslant 1.$$

Pentru orice funcţie $\mathbf{f} \in \mathcal{K}_E(T)$ avem

$$|\mathbf{m}(\mathbf{f})| = \sup_{|z'| \leqslant 1} |< \mathbf{m}(\mathbf{f}),\ z' >| = \sup_{|z'| \leqslant 1} |(z' \circ \mathbf{m})(\mathbf{f})| \leqslant$$

$$\leqslant \sup_{|z'| \leqslant 1} |z' \circ \mathbf{m}|\ (|\mathbf{f}|) \leqslant \mu\ (|\mathbf{f}|)$$

deci μ majorează pe $\mathbf{m}$. Cum $\mu \leqslant \nu$ şi cum ν a fost o măsură arbitrară care majorează pe $\mathbf{m}$, rezultă că $|\mathbf{m}| = \mu$ este cea mai mică măsură care majorează pe $\mathbf{m}$.

Mai departe

$$\|\mathbf{m}\| = \sup_{\substack{\|\mathbf{f}\| \leqslant 1 \\ \mathbf{f} \in \mathcal{K}_E}} |\mathbf{m}(\mathbf{f})| \leqslant \sup_{\substack{\|\mathbf{f}\| \leqslant 1 \\ \mathbf{f} \in \mathcal{K}_E}} \mu\ (|\mathbf{f}|) \leqslant \sup_{\substack{\|\varphi\| \leqslant 1 \\ \varphi \in \mathcal{K}}} |\mu(\varphi)| = \|\mu\| = \||\mathbf{m}|\|.$$

Să presupunem că E şi F sînt cu involuţie. Pentru orice funcţie $\mathbf{f} \in \mathcal{K}_E(T)$ avem

$$|\overline{\mathbf{m}}(\mathbf{f})| = |\overline{\mathbf{m}(\overline{\mathbf{f}})}| = |\mathbf{m}(\overline{\mathbf{f}})| \leqslant |\mathbf{m}|(|\overline{\mathbf{f}}|) = |\mathbf{m}|(|\mathbf{f}|),$$

deci $\overline{\mathbf{m}}$ este majorată şi $|\overline{\mathbf{m}}| \leqslant |\mathbf{m}|$. Avem apoi $|\mathbf{m}| = |\overline{\overline{\mathbf{m}}}| \leqslant |\overline{\mathbf{m}}|$, deci $|\overline{\mathbf{m}}| = |\mathbf{m}|$ şi propoziţia este demonstrată.

Ca şi pentru măsurile cu valori scalare, cea mai mică măsură pozitivă $|\mathbf{m}|$ care majorează o măsură majorată $\mathbf{m}$, se numeşte *modulul lui* $\mathbf{m}$.

Pentru orice funcţie $\varphi \in \mathcal{K}_+(T)$ avem

$$|\mathbf{m}|(\varphi) \geqslant \sup_{\substack{|\mathbf{f}| \leqslant \varphi \\ \mathbf{f} \in \mathcal{K}_E}} |\mathbf{m}(\mathbf{f})|,\ \|\mathbf{m}\| \leqslant \||\mathbf{m}|\|$$

și după cum s-a arătat (propozițiile 12 și 13, § 2), dacă măsura $\mathbf{m}$ are valori scalare, atunci

$$|\mathbf{m}|(\varphi) = \sup_{\substack{|\mathbf{f}| \leqslant \varphi \\ \mathbf{f} \in \mathcal{K}_E}} |\mathbf{m}(\mathbf{f})|, \quad \|\mathbf{m}\| = \||\mathbf{m}|\|.$$

În cazul cînd $\mathbf{m}$ nu are valori scalare, inegalitățile pot fi stricte.

Vom nota cu $\mathcal{M}_{E,F}(T)$ sau $\mathcal{M}_{E,F}$ mulțimea măsurilor majorate $\mathbf{m} : \mathcal{K}_E(T) \to F$.

Pentru mulțimea $\mathcal{M}_{R,C}$ a măsurilor complexe și mulțimea $\mathcal{M}_{R,R}$ a măsurilor reale, vom folosi în continuare notațiile anterioare, $\mathcal{M}_C(T)$ respectiv $\mathcal{M}(T)$.

Propoziția 9. *Mulțimea $\mathcal{M}_{E,F}(T)$ a măsurilor majorate $\mathbf{m} : \mathcal{K}_E(T) \to F$ este un spațiu vectorial. Dacă $\mathbf{m}, \mathbf{n} \in \mathcal{M}_{E,F}$ iar α este scalar, avem*

$$|\mathbf{m} + \mathbf{n}| \leqslant |\mathbf{m}| + |\mathbf{n}| \text{ și } |\alpha\mathbf{m}| = |\alpha|\,|\mathbf{m}|.$$

Fie $\mathbf{m}, \mathbf{n} \in \mathcal{M}_{E,F}$ și α un scalar. Să notăm $\mu = |\mathbf{m}|$ și $\nu = |\mathbf{n}|$. Pentru orice $\mathbf{f} \in \mathcal{K}_E(T)$ avem

$$|(\mathbf{m} + \mathbf{n})(\mathbf{f})| = |\mathbf{m}(\mathbf{f}) + \mathbf{n}(\mathbf{f})| \leqslant |\mathbf{m}(\mathbf{f})| + |\mathbf{n}(\mathbf{f})| \leqslant$$

$$\leqslant \mu(|\mathbf{f}|) + \nu(|\mathbf{f}|) = (\mu + \nu)(|\mathbf{f}|)$$

deci $\mathbf{m} + \mathbf{n}$ este majorată și $|\mathbf{m} + \mathbf{n}| \leqslant \mu + \nu$, adică

$$|\mathbf{m} + \mathbf{n}| \leqslant |\mathbf{m}| + |\mathbf{n}|.$$

De asemenea, pentru orice $\mathbf{f} \in \mathcal{K}_E(T)$ avem

$$|\alpha\mathbf{m}(\mathbf{f})| = |\alpha|\,|\mathbf{m}(\mathbf{f})| \leqslant |\alpha|\,\mu(|\mathbf{f}|)$$

deci $\alpha\mathbf{m}$ este majorată și $|\alpha\mathbf{m}| \leqslant |\alpha|\mu$, adică

$$|\alpha\mathbf{m}| \leqslant |\alpha|\,|\mathbf{m}|.$$

Dacă $\alpha = 0$, egalitatea $|\alpha\mathbf{m}| = |\alpha|\,|\mathbf{m}|$ este verificată. Să presupunem $\alpha \neq 0$. Dacă λ majorează pe $\alpha\mathbf{m}$, atunci $\frac{\lambda}{|\alpha|}$ majorează pe $\mathbf{m}$, deci $\frac{\lambda}{|\alpha|} \geqslant$ $\geqslant |\mathbf{m}|$, de unde $\lambda \geqslant |\alpha|\,|\mathbf{m}|$. Rezultă că $|\alpha|\,|\mathbf{m}|$ este cea mai mică măsură care majorează pe $\alpha\mathbf{m}$, și deci

$$|\alpha|\,\mathbf{m} = |\alpha|\,|\mathbf{m}|.$$

Cu aceasta propoziția este demonstrată.

Corolar. *Dacă m este o măsură complexă și dacă $m = \mu + i\nu$, unde μ și ν sînt măsuri reale, atunci*

$$|\mu| \leqslant |m|, \quad |\nu| \leqslant |m| \text{ și } |m| \leqslant |\mu| + |\nu|.$$

Pentru orice funcție reală $f \in \mathcal{K}(T)$ avem $|\mu(f)| \leqslant |m(f)|$ deci pentru $\varphi \in \mathcal{K}_+(T)$ avem

$$|\mu|(\varphi) = \sup_{|f| \leqslant \varphi} |\mu(f)| \leqslant \sup_{|f| \leqslant \varphi} |m(f)| \leqslant |m|(\varphi).$$

Propoziția 10. *Fie* $\mathbf{m} : \mathcal{K}_E(T) \to F$ *o măsură și fie* $\mu : \mathcal{K}(T) \to \mathcal{L}(E, F)$ *măsura care verifică egalitatea*

$$\mu(\varphi)x = \mathbf{m}(\varphi x) \text{ pentru } \varphi \in \mathcal{K}(T) \text{ și } x \in E.$$

Dacă $\mathbf{m}$ *este majorată, atunci* μ *este majorată și* $|\mu| \leqslant |\mathbf{m}|$.

Într-adevăr, fie $\varphi \in \mathcal{K}(T)$ și $\varepsilon > 0$. Există $x \in E$ cu $|x| = 1$ și $|\mu(\varphi)| < |\mu(\varphi)x| + \varepsilon$. Atunci

$$|\mu(\varphi)| - \varepsilon < |\mu(\varphi)x| = |\mathbf{m}(\varphi x)| \leqslant |\mathbf{m}|(|\varphi x|) =$$
$$= |\mathbf{m}|(|\varphi|\,|x|) = |\mathbf{m}|(|\varphi|).$$

ε fiind arbitrar, deducem $|\mu(\varphi)| \leqslant |\mathbf{m}|(|\varphi|)$, deci μ este majorată de $|\mathbf{m}|$. Rezultă atunci că $|\mu| \leqslant |\mathbf{m}|$.

Observații. Se va arăta mai departe (teorema 5, § 8) că, reciproc, dacă μ este majorată, atunci $\mathbf{m}$ este majorată și avem chiar egalitatea $|\mu| = |\mathbf{m}|$.

Mai mult, se va arăta că orice măsură majorată $\mu : \mathcal{K}(T) \to \mathcal{L}(E, F)$ se poate „prelungi" la o măsură $\mathbf{m} : \mathcal{K}_E(T) \to F$ care verifică egalitatea

$$\mu(\varphi)x = \mathbf{m}(\varphi x), \quad \varphi \in \mathcal{K}(T), \quad x \in E.$$

Identificînd măsurile $\mathbf{m}$ și μ, inegalitatea

$$\left|\int \varphi \mathrm{d}\mu\right| \leqslant \int |\varphi|\,\mathrm{d}\,|\mathbf{m}|$$

se scrie

$$\left|\int \varphi \mathrm{d}\mathbf{m}\right| \leqslant \int |\varphi|\,\mathrm{d}\,|\mathbf{m}|, \quad \text{pentru } \varphi \in \mathcal{K}(T).$$

Avem de asemenea inegalitatea

$$\left|\int f \mathrm{d}\mathbf{m}\right| \leqslant \int |\mathbf{f}|\,\mathrm{d}\,|\mathbf{m}|, \quad \text{pentru } \mathbf{f} \in \mathcal{K}_E(T).$$

Propoziția 11. *Fie* $\mu : \mathcal{K}(T) \to C$ *o măsură reală (respectiv complexă),* E *un spațiu Banach real (respectiv complex) și* $\mathbf{m} : \mathcal{K}_E(T) \to E$ *măsura unică ce verifică egalitatea*

$$\mathbf{m}(\varphi x) = \mu(\varphi)x \text{ pentru } \varphi \in \mathcal{K}T) \text{ și } x \in E.$$

Măsura $\mathbf{m}$ *este majorată dacă și numai dacă* μ *este majorată. In acest caz* $|\mathbf{m}| = |\mu|$.

Dacă $\mathbf{m}$ este majorată, pentru orice funcție $\varphi \in \mathcal{K}(T)$ și $x \in E$ cu $|x| = 1$ avem

$$|\mu(\varphi)| = |\mu(\varphi)|\,|x| = |\mu(\varphi)x| = |\mathbf{m}(\varphi x)| \leqslant |\mathbf{m}|(|\varphi x|) = |\mathbf{m}|(|\varphi|),$$

deci μ este majorată și $|\mu| \leqslant |\mathbf{m}|$.

Reciproc, să presupunem că μ este majorată. Fie $\mathbf{f} \in \mathcal{K}_E(T)$, fie K suportul lui $\mathbf{f}$ și U o vecinătate compactă a lui K. Fie $\varepsilon > 0$; există o funcție $\mathbf{g} = \sum_i \varphi_i x_i$, $\varphi_i \in \mathcal{K}(T)$, $x_i \in E$, cu suportul conținut în U, astfel ca

$$|\mathbf{m}(\mathbf{f})| < |\mathbf{m}(\mathbf{g})| + \varepsilon$$

și

$$|\mathbf{g}| \leqslant |\mathbf{f}| + \varepsilon\varphi_0,$$

unde $\varphi_0 \in \mathcal{K}(T)$ și $\varphi_0(t) = 1$ pentru $t \in U$. Fie $z \in F'$ cu $|z'| = 1$ și $< \mathbf{m}(\mathbf{g}), z' > = |\mathbf{m}(\mathbf{g})|$. Atunci

$$|\mathbf{m}(\mathbf{f})| - \varepsilon < |\mathbf{m}(\mathbf{g})| = < \mathbf{m}(\mathbf{g}), \ z' > = \mu(< \mathbf{g}, \ z' >) \leqslant$$
$$\leqslant |\mu|\,(|< \mathbf{g}, z' >|) \leqslant |\mu|\,(|\mathbf{g}|) \leqslant |\mu|\,(|\mathbf{f}| + \varepsilon\,\varphi_0) =$$
$$= |\mu|(|\mathbf{f}|) + \varepsilon|\mu|(\varphi_0).$$

Deoarece ε este arbitrar, deducem

$$|\mathbf{m}(\mathbf{f})| \leqslant |\mu|\,(|\mathbf{f}|).$$

Rezultă că $\mathbf{m}$ este majorată și $|\mathbf{m}| \leqslant |\mu|$.

Din cele de mai sus, rezultă că dacă $\mathbf{m}$ și μ sînt majorate, avem $|\mathbf{m}| \leqslant |\mu|$ și $|\mu| \leqslant |\mathbf{m}|$ deci $|\mathbf{m}| = |\mu|$. Propoziția este demonstrată.

Identificînd măsurile $\mathbf{m}$ și μ, inegalitatea

$$\left|\int \mathbf{f}\mathrm{d}\mathbf{m}\right| \leqslant \int |\mathbf{f}|\mathrm{d}\,|\mathbf{m}| \text{ pentru } \mathbf{f} \in \mathcal{K}_E(T)$$

se scrie

$$\left|\int \mathbf{f}\mathrm{d}\mu\right| \leqslant \int |\mathbf{f}|\mathrm{d}\,|\mu| \text{ pentru } \mathbf{f} \in \mathcal{K}_E(T).$$

Avem de asemenea egalitatea

$$\left|\int \varphi\mathrm{d}\mu\right| \leqslant \int |\varphi|\mathrm{d}\,|\mu| \text{ pentru } \varphi \in \mathcal{K}(T).$$

Corolar. *Dacă* $\mu : \mathcal{K}(T) \to C$ *este o măsură scalară și* $m : \mathcal{K}_C(T) \to C$ *este prelungirea sa la* $\mathcal{K}_C(T)$, *avem* $|m| = |\mu|$.

3. Măsuri mărginite

Definiția 2. *Spunem că o măsură pozitivă* μ *pe* T *este mărginită dacă aplicația liniară* $\mu : \mathcal{K}(T) \to R$ *este continuă pentru topologia convergenței uniforme.*

Spunem că o măsură vectorială $\mathbf{m} : \mathcal{K}_E(T) \to F$ *este mărginită dacă este majorată de o măsură pozitivă mărginită.*

A spune că o măsură pozitivă μ este mărginită, înseamnă că μ aparţine dualului spaţiului normat $\mathcal{K}(T)$ (cu norma $\|f\| = \sup_{t \in T} |f(t)|$), iar aceasta înseamnă că $\|\mu\| < +\infty$, unde

$$\|\mu\| = \sup_{\|f\| \leqslant 1} |\mu(f)|, \; f \in \mathcal{K}T).$$

Dacă μ şi ν sînt două măsuri pozitive mărginite iar $\alpha \geqslant 0$, atunci $\mu + \nu$ şi $\alpha\mu$ sînt măsuri pozitive mărginite, deoarece

$$\|\mu + \nu\| = \|\mu\| + \|\nu\| < +\infty \text{ şi } \|\alpha\mu\| = |\alpha| \, \|\mu\| < +\infty.$$

De asemenea, dacă μ şi ν sînt două măsuri pozitive astfel ca $\mu \leqslant \nu$ şi dacă ν este mărginită, atunci şi μ este mărginită, deoarece

$$\|\mu\| \leqslant \|\nu\| < +\infty.$$

Deducem că :

O măsură vectorială *majorată* $\mathbf{m} : \mathcal{K}_E(T) \to F$ este mărginită dacă şi numai dacă modulul său $|\mathbf{m}|$ este o măsură pozitivă mărginită.

Notăm cu $\mathcal{M}^1_{E,F}(T)$ mulţimea măsurilor vectoriale $\mathbf{m} : \mathcal{K}_E(T) \to F$ majorate şi mărginite. $\mathcal{M}^1_{E,F}(T)$ este o submulţime a spaţiului $\mathcal{M}_{E,F}(T)$ al măsurilor majorate. Mulţimea măsurilor scalare mărginite va fi notată cu $\mathcal{M}^1_C(T)$, iar mulţimea măsurilor reale mărginite va fi notată cu $\mathcal{M}^1(T)$. Măsura mulţimilor pozitive mărginite se notează $\mathcal{M}^1_+(T)$.

Propoziţia 12. *Mulţimea $\mathcal{M}^1_{E,F}(T)$ este un spaţiu vectorial iar aplicaţia $\mathbf{m} \to \|\mathbf{m}\|$ este o normă pe acest spaţiu.*

Fie $\mathbf{m}$ şi $\mathbf{n}$ două măsuri din $\mathcal{M}^1_{E,F}(T)$ şi α un scalar. Măsurile $\mathbf{m}$ şi $\mathbf{n}$ sînt majorate iar măsurile pozitive $|\mathbf{m}|$ şi $|\mathbf{n}|$ sînt mărginite.

Rezultă mai întîi că $\mathbf{m} + \mathbf{n}$ şi $\alpha\mathbf{m}$ sînt majorate. Din inegalităţile

$$|\mathbf{m} + \mathbf{n}| \leqslant |\mathbf{m}| + |\mathbf{n}| \quad \text{şi} \quad |\alpha\mathbf{m}| = |\alpha| \, |\mathbf{m}|$$

şi din faptul că $|\mathbf{m}| + |\mathbf{n}|$ şi $|\alpha| \, |\mathbf{m}|$ sînt mărginite, rezultă că $|\mathbf{m} + \mathbf{n}|$ şi $|\alpha\mathbf{m}|$ sînt măsuri mărginite şi propoziţia este demonstrată.

Din inegalitatea

$$\|\mathbf{m}\| \leqslant \| \, |\mathbf{m}| \, \|$$

deducem că orice măsură *mărginită* $\mathbf{m} : \mathcal{K}_E(T) \to F$ este o aplicaţie liniară *continuă* pe $\mathcal{K}_E(T)$ pentru topologia convergenţei uniforme.

Afirmaţia reciprocă nu este în general adevărată : există măsuri vectoriale continue, care nu sînt nici majorate (v. exemplul de la punctul 2).

Propoziţia 13. *O măsură cu valori scalare $\mathbf{m} : \mathcal{K}_E(T) \to C$ este mărginită dacă şi numai dacă este o aplicaţie liniară continuă pe $\mathcal{K}_E(T)$ pentru topologia convergenţei uniforme.*

Într-adevăr, o asemenea măsură $\mathbf{m}$ este totdeauna majorată şi dacă $\mu = |\mathbf{m}|$, atunci $\|\mathbf{m}\| = \|\mu\|$. Dacă $\mathbf{m}$ este continuă, atunci $\|\mu\| = \|\mathbf{m}\| < +\infty$, deci μ este mărginită, şi deci $\mathbf{m}$ este mărginită.

Reciproc, dacă $\mathbf{m}$ este mărginită, atunci $\|\mathbf{m}\| = \|\mu\| < +\infty$, deci $\mathbf{m}$ este continuă.

Din această propoziție deducem că spațiul $\mathcal{M}^1_{E,C}(T)$ al măsurilor mărginite $\mathbf{m} : \mathcal{K}_E(T) \to C$, coincide cu dualul spațiului normat $\mathcal{K}_E(T)$, deci $\mathcal{M}^1_{E,C}(T)$ este un spațiu Banach pentru norma $\|\mathbf{m}\|$.

În particular, $\mathcal{M}^1_C(T)$ și $\mathcal{M}^1(T)$ sînt spații Banach.

Propoziția 14. *Fie $\mu : \mathcal{K}(T) \to C$ o măsură scalară, E un spațiu Banach și $\mathbf{m} : \mathcal{K}_E(T) \to E$ măsura unică ce verifică egalitatea*

$$\mathbf{m}(\varphi x) = \mu(\varphi)\, x, \qquad \text{pentru } \varphi \in \mathcal{K}(T),\ x \in E.$$

Măsura $\mathbf{m}$ este mărginită dacă și numai dacă μ este mărginită.

Într-adevăr, $\|\mathbf{m}\| = \|\mu\|$ (teorema 1, § 2).

Rezultă că mulțimea măsurilor scalare mărginite $\mathcal{M}(T)$ se poate scufunda izometric în mulțimea $\mathcal{L}(\mathcal{K}_E(T), E)$ a aplicațiilor liniare și continue ale lui $\mathcal{K}_E(T)$ în E.

Propoziția 15. *Fie $m : \mathcal{K}(T) \to C$ o măsură complexă, iar μ și ν măsurile reale pentru care $m = \mu + i\nu$. Măsura m este mărginită dacă și numai dacă măsurile reale μ și ν sînt mărginite.*

Afirmația rezultă din inegalitățile

$$|\mu| \leqslant |m|\ ,\ |\nu| \leqslant |m|\ ,\ |m| \leqslant |\mu| + |\nu|.$$

Propoziția 16. *O măsură reală $\mu : \mathcal{K}(T) \to R$ este mărginită dacă și numai dacă μ_+ și μ_- sînt măsuri pozitive mărginite.*

Afirmația rezultă din egalitatea

$$|\mu| = \mu_+ + \mu_-$$

și din inegalitățile $\mu_+ \leqslant |\mu|$ și $\mu_- \leqslant |\mu|$.

§ 4. SUPORTUL UNEI MĂSURI

Fie E și F două spații Banach și $\mathbf{m} : \mathcal{K}_E(T) \to F$ o măsură.

Definiția 1. *Se numește suportul măsurii $\mathbf{m}$, mulțimea punctelor $t \in T$ care au proprietatea că, pentru orice vecinătate V a lui t, există o funcție $\mathbf{f} \in \mathcal{K}_E(T, V)$ astfel încît $\mathbf{m}(\mathbf{f}) \neq 0$.*

Vom nota suportul măsurii $\mathbf{m}$ cu $S(\mathbf{m})$. A spune că un punct $t \in T$ nu aparține suportului lui $\mathbf{m}$, înseamnă că există o vecinătate V a lui t astfel încît restricția lui $\mathbf{m}$ la spațiul $\mathcal{K}_E(T, V)$ este nulă.

Dacă G este o mulțime deschisă, și dacă restricția lui $\mathbf{m}$ la spațiul $\mathcal{K}_E(G)$ este nulă, spunem că măsura $\mathbf{m}$ *nu posedă masă în mulțimea G*. Fie G_0 reuniunea tuturor mulțimilor deschise în care $\mathbf{m}$ nu posedă masă. Din principiul localizării deducem că $\mathbf{m}$ nu posedă masă în G_0, și deci G_0 este cea mai mare mulțime deschisă în care $\mathbf{m}$ nu posedă masă.

Propoziția 1. *Suportul măsurii $\mathbf{m}$ este complementara celei mai mari mulțimi deschise în care $\mathbf{m}$ nu posedă masă.*

Fie G_0 cea mai mare mulțime deschisă în care $\mathbf{m}$ nu posedă masă. Aceasta înseamnă că $\mathbf{m}(\mathbf{f}) = 0$ pentru orice funcție $\mathbf{f} \in \mathcal{K}_E(T, G_0)$. Pentru

orice punct $t \in G_0$ luăm $V = G_0$ şi deducem că $t \notin S(\mathbf{m})$, deci $G_0 \cap S(\mathbf{m}) = \varnothing$, de unde

$$S(\mathbf{m}) \subset \mathbf{C}G_0.$$

Reciproc, dacă $t \notin G_0$, nu există nici o vecinătate deschisă G a lui t, în care $\mathbf{m}$ să nu posede masă, deoarece orice mulţime deschisă în care $\mathbf{m}$ nu posedă masă este conţinută în G_0. Aşadar, dacă $t \notin G_0$, atunci oricare ar fi vecinătatea V a lui t, restricţia lui $\mathbf{m}$ la $\mathcal{K}_E(T, V)$ nu este identic nulă şi deci $t \in S(\mathbf{m})$. Rezultă că $\mathbf{C}G_0 \subset S(\mathbf{m})$. Incluziunea contrară fiind deja demonstrată, deducem $S(\mathbf{m}) = \mathbf{C}G_0$.

Corolar. *Suportul unei măsuri este o mulţime închisă.*

Propoziţia 2. *Dacă* $\mathbf{m}, \mathbf{n} : \mathcal{K}_E(T) \to F$ *sînt măsuri iar* α *este scalar* $\neq 0$, *atunci* :

$$S(\mathbf{m} + \mathbf{n}) \subset S(\mathbf{m}) \cup S(\mathbf{n}) \quad \text{şi} \quad S(\alpha\mathbf{m}) = S(\mathbf{m}).$$

Într-adevăr, nici una din cele două măsuri nu posedă masă în mulţimea deschisă $\mathbf{C}S(\mathbf{m}) \cap \mathbf{C}S(\mathbf{n}) = \mathbf{C}(S(\mathbf{m}) \cup S(\mathbf{n}))$.

Rezultă că nici măsura $\mathbf{m} + \mathbf{n}$ nu posedă masă în această mulţime, deci

$$\mathbf{C}(S(\mathbf{m}) \cup S(\mathbf{n})) \subset \mathbf{C}S(\mathbf{m} + \mathbf{n})$$

de unde

$$S(\mathbf{m} + \mathbf{n}) \subset S(\mathbf{m}) \cup S(\mathbf{n}).$$

Egalitatea $S(\alpha\mathbf{m}) = S(\mathbf{m})$ este evidentă, deoarece măsurile $\mathbf{m}$ şi $\alpha\mathbf{m}$ se anulează în acelaşi timp.

Pentru măsurile pozitive, obţinem proprietăţi suplimentare.

Propoziţia 3. *Dacă* $\mu \geqslant 0$ *şi* $\nu \geqslant 0$ *sînt măsuri pozitive şi dacă* $\mu \leqslant \nu$, *atunci* $S(\mu) \subset S(\nu)$.

Într-adevăr, dacă ν nu posedă masă într-o mulţime deschisă G, atunci nici μ nu posedă masă în G. Rezultă că $S(\nu) \subset \mathbf{C}S(\mu)$ de unde

$$S(\mu) \subset S(\nu).$$

Propoziţia 4. *Dacă* μ *şi* ν *sînt două măsuri pozitive, atunci*

$$S(\mu + \nu) = S(\mu) \cup S(\nu).$$

Incluziunea $S(\mu + \nu) \subset S(\mu) \cup S(\nu)$ este adevărată pentru orice măsuri.

Avem apoi $\mu \leqslant \mu + \nu$ şi $\nu \leqslant \mu + \nu$ deci

$$S(\mu) \subset S(\mu + \nu) \quad \text{şi} \quad S(\nu) \subset S(\mu + \nu)$$

de unde

$$S(\mu) \cup S(\nu) \subset S(\mu + \nu).$$

Din cele două incluziuni rezultă egalitatea de demonstrat.

Propoziţia 5. *Dacă* $(\mu_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ *este o familie finită de măsuri pozitive, atunci*

$$S(\sup_{1 \leqslant i \leqslant n} \mu_i) = \bigcup_{i=1}^{n} S(\mu_i).$$

Să notăm $\lambda_i = \sup_{1 \leqslant i \leqslant n} \mu_i$. Avem $\mu_i \leqslant \lambda$, deci $S(\mu_i) \subset S(\lambda)$ pentru $i = 1, 2, \ldots, n$, de unde

$$\bigcup_{i=1}^{n} S(\mu_i) \subset S(\lambda).$$

Pe de altă parte, $\lambda \leqslant \mu_1 + \mu_2 + \ldots + \mu_n$, deci

$$S(\lambda) \subset S(\mu_1 + \ldots + \mu_n) = S(\mu_1) \cup \ldots \cup S(\mu_n) = \bigcup_{i=1}^{n} S(\mu_i).$$

Așadar

$$S(\lambda) = \bigcup_{i=1}^{n} S(\mu_i).$$

Propoziția 6. *Dacă H este o familie majorată de măsuri pozitive, atunci*

$$S(\sup_{\mu \in H} \mu) = \overline{\bigcup_{\mu \in H} S(\mu)}.$$

Să notăm $\lambda = \sup_{\mu \in H} \mu$. Avem $\mu \leqslant \lambda$, deci $S(\mu) \subset S(\lambda)$ pentru orice $\mu \in H$, de unde

$$\bigcup_{\mu \in H} S(\mu) \subset S(\lambda).$$

Deoarece $S(\lambda)$ este o mulțime închisă, deducem

$$\overline{\bigcup_{\mu \in H} S(\mu)} \subset S(\lambda).$$

Pentru a demonstra incluziunea contrară, să considerăm mulțimea A a marginilor superioare ale părților finite ale lui H. Mulțimea A este filtrantă, majorată și

$$\lambda = \sup_{\nu \in A} \nu = \lim_{\nu \in A} \nu.$$

Pentru orice funcție $\varphi \in \mathcal{K}(T)$ avem deci

$$\lambda(\varphi) = \lim_{\nu \in A} \nu(\varphi).$$

Rezultă că dacă nici una din măsurile $\nu \in A$ nu au masă într-o mulțime deschisă G, atunci nici λ nu are masă în G. Aceasta înseamnă că dacă $G \subset \bigcap_{\nu \in A} \mathbf{C} S(\lambda)$, atunci $G \subset \mathbf{C} S(\nu)$, adică

$$\operatorname{Int} \bigcap_{\nu \in A} \mathbf{C} S(\nu) \subset \mathbf{C} S(\lambda).$$

Aceasta înseamnă că

$$\mathbf{C} \overline{\bigcup_{\nu \in A} S(\nu)} \subset \mathbf{C}\, S(\lambda)$$

adică

$$\overline{\bigcup_{\nu \in A} S(\nu)} \supset S(\lambda).$$

Fiecară măsură $\nu \in A$ este marginea superioară a unei familii finite $\mu_1, \ldots, \mu_n$ de măsuri din H, deci

$$S(\nu) = \bigcup_{i=1}^{n} S(\mu_i) \subset \bigcup_{\mu \in H} S(\mu).$$

Urmează că

$$\bigcup_{\nu \in A} S(\nu) \subset \bigcup_{\mu \in H} S(\mu)$$

şi deci

$$\overline{\bigcup_{\mu \in H} S(\mu)} \supset S(\lambda).$$

Rezultă astfel că

$$\overline{\bigcup_{\mu \in H} S(\mu)} = S(\lambda).$$

şi propoziţia este demonstrată.

Propoziţia 7. *Dacă* $\mathbf{m} : \mathcal{X}_E(T) \to F$ *este o măsură majorată, atunci* $S(\mathbf{m}) = S(|\mathbf{m}|)$.

Să considerăm mai întîi cazul măsurilor cu valori scalare $\mathbf{m} : \mathcal{X}_E(T) \to C$. Pentru orice funcţie $\varphi \in \mathcal{X}_+(T)$ avem

$$|\mathbf{m}|(\varphi) = \sup_{|\mathbf{f}| \leqslant \varphi} |\mathbf{m}(\mathbf{f})|.$$

Rezultă că dacă restricţia lui $\mathbf{m}$ la un subspaţiu $\mathcal{X}_E(T, G)$ este nulă, atunci restricţia lui $|\mathbf{m}|$ la spaţiul $\mathcal{X}(T, G)$ este nulă. Deducem că dacă $\mathbf{m}$ nu posedă masă într-o mulţime deschisă G, atunci nici $|\mathbf{m}|$ nu posedă masă în G. Aşadar

$$\mathbf{C}\, S(\mathbf{m}) \subset \mathbf{C}\, S(|\mathbf{m}|)$$

de unde

$$S(\mathbf{m}) \supset S(|\mathbf{m}|).$$

Să considerăm acum măsura $\mathbf{m} : \mathcal{X}_E(T) \to F$ cu valori în F. Pentru fiecare $z' \in F'$, fie măsura $z' \circ \mathbf{m} : \mathcal{X}_E(T) \to C$ definită prin egalitatea

$$(z' \circ \mathbf{m})(\mathbf{f}) = \langle \mathbf{m}(\mathbf{f}), z' \rangle \quad \text{pentru } \mathbf{f} \in \mathcal{X}_E(T).$$

Dacă $\mathbf{m}$ nu posedă masă într-o mulțime deschisă G, atunci nici $z' \circ \mathbf{m}$ nu posedă masă în G, deci

$$S(\mathbf{m}) \supset S(z' \circ \mathbf{m}).$$

Din prima parte a demonstrației rezultă că

$$S(z' \circ \mathbf{m}) \supset S(|z' \circ \mathbf{m}|)$$

deci

$$S(\mathbf{m}) \supset S(|z' \circ \mathbf{m}|)$$

Dar

$$|\mathbf{m}| = \sup_{|z'| \leqslant 1} |z' \circ \mathbf{m}|,$$

deci

$$S(|\mathbf{m}|) = \overline{\bigcup_{|z'| \leqslant 1} S(|z' \circ \mathbf{m}|)} \subset S(\mathbf{m}).$$

Incluziunea contrară rezultă din inegalitatea

$$|\mathbf{m}(\mathbf{f})| \leqslant |\mathbf{m}|(|\mathbf{f}|) \quad \text{pentru } \mathbf{f} \in \mathcal{K}_F(T).$$

Dacă $|\mathbf{m}|$ nu posedă masă în G, atunci nici $\mathbf{m}$ nu posedă masă în G deci

$$\mathbf{C}\, S(|\mathbf{m}|) \subset \mathbf{C}\, S(\mathbf{m})$$

adică

$$S(|\mathbf{m}|) \supset S(\mathbf{m}).$$

Rezultă astfel că

$$S(\mathbf{m}) = S(|\mathbf{m}|)$$

și propoziția este demonstată

Corolarul 1. *Pentru orice măsură reală* μ *avem*

$$S(\mu) = S(\mu_+) \cup S(\mu_-).$$

Într-adevăr, $|\mu| = \mu_+ + \mu_-$, iar μ_+ și μ_- sînt măsuri pozitive, deci

$$S(\mu) = S(|\mu|) = S(\mu_+ + \mu_-) = S(\mu_+) \cup S(\mu_-).$$

Corolarul 2. *Dacă* $\mathbf{m}$ *și* $\mathbf{n}$ *sînt două măsuri vectoriale majorate și dacă* $|\mathbf{m}| \leqslant |\mathbf{n}|$, *atunci*

$$S(\mathbf{m}) \subset S(\mathbf{n}).$$

Corolarul 3. *Dacă* m *este o măsură complexă și dacă* $m = \mu + i\nu$, *unde* μ *și* ν *sînt măsuri reale, atunci*

$$S(m) = S(\mu) \cup S(\nu).$$

Avem $|\mu| \leqslant |m|$, $|\nu| \leqslant |m|$ și $|m| \leqslant |\mu| + |\nu|$, deci

$$S(\mu) \subset S(m) \text{ și } S(\nu) \subset S(m)$$

de unde

$$S(\mu) \cup S(\nu) \subset S(m)$$

iar pe de altă parte

$$S(m) \subset S(|\mu| + |\nu|) = S(|\mu|) \cup S(|\nu|) = S(\mu) \cup S(\nu).$$

Aşadar

$$S(m) = S(\mu) \cup S(\nu).$$

Propoziţia 8. *Dacă* $\mathbf{m} : \mathcal{K}_E(T) \to F$ *este o măsură şi dacă* $\mu : \mathcal{K}(T) \to \mathcal{L}(E, F)$ *este măsura care verifică egalitatea*

$$\mathbf{m}(\varphi x) = \mu(\varphi)\, x, \text{ pentru } \varphi \in \mathcal{K}(T) \text{ şi } x \in E,$$

atunci $S(\mathbf{m}) = S(\mu)$.

Dacă restricţia lui μ la subspaţiul $\mathcal{K}(T, G)$ este nulă, G fiind deschisă, atunci pentru orice funcţie $\mathfrak{g} = \sum_{i=1}^{n} \varphi_i x_i$, $\varphi_i \in \mathcal{K}(T, G)$, $x_i \in E$ avem $\mathbf{m}(\mathfrak{g}) = 0$. Cum orice funcţie $\mathfrak{f} \in \mathcal{K}_E(T, G)$ poate fi aproximată uniform cu funcţii de forma $\sum_{i=1}^{n} \varphi_i x_i$, $\varphi_i \in \mathcal{K}(T, G)$, $x_i \in E$, iar $\mathbf{m}$ este continuă pe $\mathcal{K}_E(T, G)$, rezultă că restricţia lui $\mathbf{m}$ la $\mathcal{K}_E(T, G)$ este nulă. Aşadar

$$\complement S(\mu) \subset \complement S(\mathbf{m}).$$

deci

$$S(\mu) \supset S(\mathbf{m})$$

Pe de altă parte, dacă restricţia a lui $\mathbf{m}$ al $\mathcal{K}_E(T, G)$ este nulă, avem $\mathbf{m}(\varphi x) = 0$ pentru orice $\varphi \in \mathcal{K}(T, G)$ şi orice $x \in E$, adică $\mu(\varphi) = 0$ pentru orice $\varphi \in \mathcal{K}(T, G)$. Aşadar $\complement S(\mathbf{m}) \subset \complement S(\mu)$, de unde

$$S(\mathbf{m}) \supset S(\mu)$$

şi deci

$$S(\mathbf{m}) = S(\mu).$$

Corolar. *Dacă* μ *este o măsură scalară, extensiunea sa* $\mathbf{m} : \mathcal{K}_E(T) \to E$ *(sau* $m : \mathcal{K}_C(T) \to C$*) are acelaşi suport ca şi* μ.

Propoziţia 9. *Fie* $\mathbf{m} : \mathcal{K}_E(T) \to F$ *o măsură şi* $\mathfrak{f} \in \mathcal{K}_E(T)$. *Dacă funcţia* $\mathfrak{f}$ *se anulează pe suportul lui* $\mathbf{m}$, *atunci* $\mathbf{m}(\mathfrak{f}) = 0$.

Fie K suportul lui $\mathfrak{f}$ şi fie $a_K > 0$ astfel încît

$$|\mathbf{m}(\mathfrak{g})| \leqslant a_K \|\mathfrak{g}\| \text{ pentru } \mathfrak{g} \in \mathcal{K}_E(T, K).$$

Fie $\varepsilon > 0$ şi $V = \{t \in T \mid |\mathfrak{f}(t)| < \varepsilon\}$; V este o mulţime deschisă şi $S(\mathbf{m}) \subset V$. Mulţimea $\complement V$ este compactă, $\complement S(\mathbf{m})$ este deschisă şi $K \cap \complement V \subset \complement S(\mathbf{m})$. Există o funcţie $\varphi : T \to [0, 1]$ continuă cu suport compact astfel ca $\varphi(t) = 1$ pentru $t \in K \cap \complement V$ şi cu suportul conţinut în $\complement S(\mathbf{m})$. Atunci $\mathfrak{f}\varphi \in \mathcal{K}_E(T)$, şi suportul funcţiei $\mathfrak{f}\varphi$ este conţinut în $\complement S(\mathbf{m})$. Cum măsura $\mathbf{m}$ nu posedă masă în $\complement S(\mathbf{m})$, rezultă $\mathbf{m}(\mathfrak{f}\varphi) = 0$. Avem apoi $|\mathfrak{f}\varphi| \leqslant |\mathfrak{f}|$ şi $\mathfrak{f}(t) = \mathfrak{f}(t)\varphi(t)$ pentru $t \in K \cap \complement V$, deci $|\mathfrak{f}(t) - \mathfrak{f}(t)| \leqslant 2\varepsilon$ pentru orice $t \in T$. Suportul funcţiei $\mathfrak{f} - \mathfrak{f}\varphi$ este conţinut în K, deci

$$|\mathbf{m}(\mathfrak{f} - \mathfrak{f}\varphi)| \leqslant a_K \|\mathfrak{f} - \mathfrak{f}\varphi\| \leqslant 2a_K\, \varepsilon.$$

Dar

$$\mathbf{m}(\mathbf{f} - \mathbf{f}\varphi) = \mathbf{m}(\mathbf{f}) - \mathbf{m}(\mathbf{f}\varphi) = \mathbf{m}(\mathbf{f})$$

deci

$$|\mathbf{m}(\mathbf{f})| \leqslant 2a_K \varepsilon.$$

ε fiind arbitrar, rezultă $|\mathbf{m}(\mathbf{f})| = 0$, adică $\mathbf{m}(\mathbf{f}) = 0$.

Corolar. *Fie* $\mathbf{m} : \mathcal{K}_E(T) \to F$ *o măsură,* $\mathbf{f}$ *și* $\mathbf{g}$ *două funcții din* $\mathcal{K}_E(T)$. *Dacă* $\mathbf{f}$ *și* $\mathbf{g}$ *sînt egale pe suportul măsurii* $\mathbf{m}$, *atunci* $\mathbf{m}(\mathbf{f}) = \mathbf{m}(\mathbf{g})$.

Măsurile pozitive au o proprietate reciprocă.

Propoziția 10. *Fie* μ *o măsură pozitivă și* φ *o funcție pozitivă din* $\mathcal{K}(T)$. *Dacă* $\mu(\varphi) = 0$, *atunci funcția* φ *este nulă pe suportul măsurii* μ.

Fie $t_0 \in T$ astfel ca $\varphi(t_0) > 0$. Să arătăm că $t_0 \notin S(\mu)$. Fie α un număr astfel ca $0 < \alpha < \varphi(t_0)$. Există o vecinătate V a lui t_0 astfel încît $\varphi(t) > \alpha$ pentru $t \in V$.

Pentru orice funcție $\psi \geqslant 0$ din $\mathcal{K}(T, V)$ să punem $\beta = \|\psi\|$; avem $\psi \leqslant \frac{\beta}{\alpha}\varphi$, deci $\mu(\psi) \leqslant \frac{\beta}{\alpha}\mu(\varphi) = 0$. Dacă $\psi \in \mathcal{K}(T, V)$, atunci $\psi = \psi_1 - \psi_2$ cu $\psi_1, \psi_2 \in \mathcal{K}_+(T, V)$, deci $\mu(\psi) = \mu(\psi_1) - \mu(\psi_2) = 0$. Așadar $t_0 \notin S(\mu)$. Rezultă că dacă $t \in S(\mu)$, atunci $\varphi(t) = 0$ și propoziția este demonstrată.

Propoziția 11. *O măsură* $\mathbf{m} : \mathcal{K}_E(T) \to F$ *se poate prelungi la o aplicație liniară a lui* $\mathcal{C}_E(T)$ *în* F, *continuă pentru topologia convergenței compacte, dacă și numai dacă* $\mathbf{m}$ *are suportul compact. Prelungirea este în acest caz unică.*

Dacă $\mathbf{m}$ se poate prelungi la o aplicație liniară a lui $\mathcal{C}_E(T)$ în F, continuă pentru topologia convergenței compacte, atunci $\mathbf{m}$ este continuă pe $\mathcal{K}_E(T)$ pentru această topologie. Topologia convergenței compacte este o topologie local convexă generată de seminormele

$$\|\mathbf{f}\|_K = \sup_{t \in K} |\mathbf{f}(t)|$$

cînd K parcurge mulțimea părților compacte ale lui T. Deoarece $\mathbf{m}$ este continuă pe $\mathcal{K}_E(T)$ pentru topologia definită de familia de seminorme $\|\mathbf{f}\|_K$, $\mathbf{m}$ este continuă pentru o singură seminormă din familie. Există deci un număr $a > 0$ și o mulțime compactă $K \subset T$, astfel încît să avem

$$|\mathbf{m}(\mathbf{f})| < a\|\mathbf{f}\|_K \text{ pentru orice funcție } \mathbf{f} \in \mathcal{K}_E(T).$$

Dacă suportul unei funcții $\mathbf{g} \in \mathcal{K}_E(T)$ nu intersectează pe K, avem $\|\mathbf{g}\|_K = 0$ și deci $\mathbf{m}(\mathbf{g}) = 0$. Rezultă că suportul măsurii $\mathbf{m}$ etse conținut în K și deci este compact.

Reciproc, să presupunem că suportul $S(\mathbf{m})$ al măsurii $\mathbf{m}$ este compact. Fie U o vecinătate compactă a lui $S(\mathbf{m})$ și $\varphi : T \to [0, 1]$ o funcție continuă cu suportul compact H, egală cu 1 pe U. Pentru orice funcție $\mathbf{f} \in \mathcal{K}_E(T)$ avem $\mathbf{g} = \mathbf{f}\varphi \in \mathcal{K}_E(T, H)$ și $\mathbf{f}(t) = \mathbf{g}(t)$ pentru $t \in U$, deci și pentru $t \in S(\mathbf{m})$. Rezultă că $\mathbf{m}(\mathbf{f}) = \mathbf{m}(\mathbf{g})$. Dacă $a_H > 0$ este astfel încît

$$|\mathbf{m}(\mathbf{h})| \leqslant a_H\|\mathbf{h}\| \text{ pentru } \mathbf{h} \in \mathcal{K}_E(T, H),$$

atunci

$$|\mathbf{m}(\mathbf{f})| = |\mathbf{m}(\mathbf{g})| \leqslant a_H\|\mathbf{g}\| \leqslant a_H \sup_{t \in H} |\mathbf{f}(t)| = a_H\|\mathbf{f}\|_H.$$

Rezultă că $\mathbf{m}$ este continuă pe $\mathcal{K}_E(T)$ pentru topologia convergenței compacte. Cum $\mathcal{K}_E(T)$ este dens în $\mathcal{C}_E(T)$ pentru această topologie, rezultă că $\mathbf{m}$ se poate prelungi în mod unic la o aplicație liniară a lui $\mathcal{C}_E(T)$ în F, continuă pentru această topologie.

Cu aceasta propoziția este demonstrată.

Corolar. *Dacă* $\mathbf{m} : \mathcal{K}_E(T) \to F$ *este o măsură cu suport compact, atunci* $\|\mathbf{m}\| < +\infty$.

Într-adevăr, $\mathbf{m}$ este continuă pe $\mathcal{K}_E(T)$ pentru topologia convergenței compacte ; există un număr $a > 0$ și o mulțime compactă K astfel ca

$$|\mathbf{m}(\mathbf{f})| \leqslant a\,\|\mathbf{f}\|_K \text{ pentru orice } \mathbf{f} \in \mathcal{K}_E(T).$$

Atunci, cu atît mai mult,

$$|\mathbf{m}(\mathbf{f})| \leqslant a\|\mathbf{f}\| \quad \text{pentru orice } \mathbf{f} \in \mathcal{K}_E(T).$$

Rezultă deci că $\|\mathbf{m}\| \leqslant a < \infty$.

Propoziția 12. *Dacă* $\mu : \mathcal{K}(T) \to C$ *este o măsură cu suportul finit,* $S(\mu) = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$, *atunci* μ *este o combinație liniară a măsurilor punctuale* ε_{a_i}.

Într-adevăr, dacă $f \in \mathcal{K}(T)$ și dacă $f(a_i) = 0$, $i = 1, 2, \ldots, n$, atunci $\mu(f) = 0$. Dar egalitățile $f(a_i) = 0$ se scriu $\varepsilon_{a_i}(f) = 0$. Din algebra liniară se știe atunci că μ este combinație liniară a măsurilor ε_{a_i}.

SPAȚIILE $\mathcal{L}^p$. FUNCȚII INTEGRABILE

§ 5. INTEGRALA SUPERIOARĂ

1. Funcții semicontinue inferior

O funcție numerică $f : T \to \overline{R}$ (cu valori finite sau infinite) se numește *semicontinuă inferior*, dacă pentru orice punct $t_0 \in T$ și orice număr $\varepsilon > 0$, există o vecinătate V a lui t_0 astfel încît să avem *)

$$f(t) \geqslant f(t_0) - \varepsilon \quad \text{pentru orice } t \in V.$$

Orice funcție continuă $f : T \to R$ este, evident, semicontinuă inferior.

Funcția constantă $f(t) \equiv +\infty$ este semicontinuă inferior.

Vom nota cu $\mathcal{J}_+(T)$ sau $\mathcal{J}_+$ mulțimea funcțiilor *pozitive* definite pe T, cu valori finite sau $+\infty$, *semicontinue inferior*. Avem $\mathcal{K}_+(T) \subset \mathcal{J}_+(T)$.

Funcțiile din $\mathcal{J}_+$ au următoarele proprietăți :

1) *Dacă* $f \in \mathcal{J}_+$ *și* $\alpha \geqslant 0$, *atunci* **) $\alpha f \in \mathcal{J}_+$;

2) *Dacă* (f_α) *este o familie oarecare de funcții din* $\mathcal{J}_+$, *atunci*

$$\sup f_\alpha \in \mathcal{J}_+ \qquad \text{și} \qquad \sum f_\alpha \in \mathcal{J}_+ ;$$

3) *Dacă* (f_α) *este o familie* finită *de funcții din* $\mathcal{J}_+$, *atunci*

$$\inf_\alpha f_\alpha \in \mathcal{J}_+ .$$

Într-adevăr :

1) Dacă $\alpha = 0$, avem $\alpha f(t) \equiv 0$, deci $\alpha f \in \mathcal{J}_+$; dacă $\alpha > 0$, proprietatea rezultă din aceea că inegalitatea $f(t) \geqslant f(t_0) - \dfrac{\varepsilon}{\alpha}$ pentru $t \in V$ implică inegalitatea $\alpha f(t) \geqslant \alpha f(t_0) - \varepsilon$ pentru $t \in V$.

---

*) Facem convențiile obișnuite $\alpha + \infty = +\infty + \alpha = +\infty$ dacă $-\infty < \alpha \leqslant +\infty$ și $\alpha - \infty = -\infty + \alpha = -\infty$ dacă $-\infty \leqslant \alpha < +\infty$. Așadar, dacă $f(t_0) = -\infty$, atunci $f(t_0) - \varepsilon = -\infty$.

**) Facem convențiile $0(+\infty) = 0$, $0(-\infty) = 0$: $\alpha(\pm\infty) = \pm\infty$ dacă $0 < \alpha \leqslant +\infty$, și $\alpha(\pm\infty) = \mp\infty$ dacă $-\infty \leqslant \alpha < 0$. Astfel, $0\, f(t) \equiv 0$ chiar dacă f are valori infinite.

2) Fie $f = \sup_\alpha f_\alpha$, $t_0 \in T$ şi $\varepsilon > 0$; există un indice α' astfel ca $f_{\alpha'}(t_0) > f(t_0) - \frac{\varepsilon}{2}$ şi o vecinătate V a lui t_0 astfel ca pentru $t \in V$ să avem $f_{\alpha'}(t) \geqslant f_{\alpha'}(t_0) - \frac{\varepsilon}{2} > f(t_0) - \varepsilon$. Atunci, pentru $t \in V$, avem $f(t) = \sup_\alpha f_\alpha(t) \geqslant f(t_0) - \varepsilon$, deci $f \in \mathcal{J}_+$.

Suma unei familii finite de funcţii din $\mathcal{J}_+$ aparţine de asemenea lui $\mathcal{J}_+$. Dacă (f_α) este o familie oarecare, avem

$$\sum_\alpha f_\alpha = \sup_J \sum_{\alpha \in J} f_\alpha,$$

unde J parcurge mulţimea părţilor finite de indici. Deoarece $\sum_{\alpha \in J} f_\alpha \in \mathcal{J}_+$ din prima parte a demonstraţiei rezultă

$$\sum f_\alpha \in \mathcal{J}_+.$$

3) Fie $f_1, \ldots, f_n$ o familie finită de funcţii din $\mathcal{J}_+$, $t_0 \in T$ şi $\varepsilon > 0$. Există n vecinătăţi $V_1, \ldots, V_n$ ale lui t_0, astfel încît să avem

$$f_i(t) \geqslant f_i(t_0) - \varepsilon \quad \text{pentru } t \in V_i,\ i = 1, 2, \ldots, n.$$

Atunci

$$\inf_i f_i(t) \geqslant \inf f_i(t_0) - \varepsilon \quad \text{pentru } t \in V = \bigcap_{i=1}^{n} V_i,$$

iar V este o vecinătate a lui t_0. Aşadar $\inf_i f_i \in \mathcal{J}_+$.

Propoziţia 1. *Orice funcţie $f \in \mathcal{J}_+$ este anvelopa superioară a mulţimii filtrante (pentru relaţia $\leqslant$) $\{g \mid g \in \mathcal{K}_+,\ g \leqslant f\}$.*

Într-adevăr, dacă $f(t_0) = 0$, atunci $g \in \mathcal{K}_+$ şi $g \leqslant f$ implică $g(t_0) = 0$, deci

$$f(t_0) = \sup\ g(t_0), \quad g \in \mathcal{K}_+,\ g \leqslant f.$$

Să presupunem $f(t_0) > 0$; fie $\varepsilon > 0$ un număr oarecare astfel ca $f(t_0) - \varepsilon > 0$. Există o vecinătate V a lui t_0 astfel ca

$$f(t) \geqslant f(t_0) - \varepsilon \quad \text{pentru } t \in V.$$

Există, de asemenea, o funcţie $g_\varepsilon \in \mathcal{K}_+$ cu suportul conţinut în V, astfel ca

$$g_\varepsilon(t_0) = f(t_0) - \varepsilon \text{ şi } g_\varepsilon(t) \leqslant f(t_0) - \varepsilon \text{ pentru } t \in V.$$

Rezultă că $g_\varepsilon(t) \leqslant f(t)$ pentru orice $t \in T$, adică $g_\varepsilon \leqslant f$ şi

$$f(t_0) = \sup_{\substack{g \leqslant f \\ g \in \mathcal{K}_+}} g(t_0).$$

Așadar, oricare ar fi $t \in T$ avem

$$f(t) = \sup_{\substack{g \leqslant f \\ g \in \mathcal{K}_+}} g(t).$$

O funcție $f : T \to \bar{R}$ se numește *semicontinuă superior* dacă pentru orice punct $t_0 \in T$ și orice număr $\varepsilon > 0$, există o vecinătate V a lui t_0 astfel încît să avem

$$f(t) \leqslant f(t_0) + \varepsilon \quad \text{pentru orice } t \in V.$$

Funcția f este semicontinuă superior dacă și numai dacă $-f$ este semicontinuă inferior.

2. Integrala superioară a funcțiilor semicontinue inferior

Fie μ o măsură pozitivă pe T.

Definiția 1. *Se numește integrala superioară (în raport cu μ) a unei funcții $f \in \mathcal{J}_+$, numărul $\mu^*(f)$ definit de egalitatea*

$$\mu^*(f) = \sup_{\substack{g \leqslant f \\ g \in \mathcal{K}_+}} \mu(g).$$

Dacă $f \in \mathcal{K}_+$, se verifică imediat că $\mu^*(f) = \mu(f)$. Așadar, μ^* este o prelungire a măsurii μ de la $\mathcal{K}_+$ la $\mathcal{J}_+$. Deoarece mulțimea $A = \{g \mid g \in \mathcal{K}, g \leqslant f\}$ este filtrantă pentru relația $\leqslant$, iar măsura μ este crescătoare, rezultă că funcția $g \to \mu(g)$ are limită (finită sau infinită) după filtrul secțiunilor lui A, și limita este egală cu marginea superioară a funcției μ pe această mulțime:

$$\lim_{g \leqslant f} \mu(g) = \sup_{g \leqslant f} \mu(g), \quad g \in \mathcal{K}.$$

Rezultă atunci că integrala superioară $\mu^*(f)$ se poate defini și prin egalitatea:

$$\mu^*(f) = \lim_{g \leqslant f} \mu(g), \quad g \in \mathcal{K}_+.$$

Din definiția 1 rezultă imediat următoarele proprietăți:

1) $0 \leqslant \mu^*(f) \leqslant +\infty$ pentru $f \in \mathcal{J}_+$; $\mu^*(0) = 0$;

2) $\mu^*(f_1) \leqslant \mu^*(f_2)$ dacă $f_1 \leqslant f_2$, $f_1, f_2 \in \mathcal{J}_+$;

3) $\mu^*(\alpha f) = \alpha \mu^*(f)$ dacă $\alpha \geqslant 0$, $f \in \mathcal{J}_+$.

Exemplu. Fie α o funcție numerică finită și pozitivă definită pe T, astfel încît pentru orice mulțime compactă $K \subset T$ să avem $\sum_{t \in K} \alpha(t) < +\infty$. Fie μ măsura pozitivă pe T definită prin egalitatea

$$\mu(f) = \sum_{t \in T} \alpha(t) f(t) \quad \text{pentru } f \in \mathcal{K}(T).$$

Să arătăm că pentru orice funcție $f \in \mathcal{J}_+$ avem

$$\mu^*(f) = \sum_{t \in T} \alpha(t)\, f(t)$$

(punînd $\alpha(t)\, f(t) = 0$ dacă $\alpha(t) = 0$ și $f(t) = +\infty$).

Pentru orice funcție $g \in \mathcal{K}_+$ cu $g \leqslant f$ avem

$$\mu(g) = \sum_{t \in T} \alpha(t)\, g(t) \leqslant \sum_{t \in T} \alpha(t)\, f(t)$$

deci

$$\mu^*(f) \leqslant \sum_{t \in T} \alpha(t)\, f(t).$$

Fie acum un număr $a < \sum_{t \in T} \alpha(t)\, f(t)$. Există o parte finită $M \subset T$ cu $a < \sum_{t \in M} \alpha(t)\, f(t)$. Pentru fiecare $t \in M$ și fiecare număr $b_t < f(t)$, există o funcție $g_t \in \mathcal{K}_+$ cu $g_t \leqslant f$ și $g_t(t) > b_t$. Dacă notăm $g = \sup_{t \in M} g_t$, avem $g \in \mathcal{K}_+$, $g \leqslant f$ și $\mu(g) \geqslant \sum_{t \in M} \alpha(t)\, b_t$ deci

$$\mu^*(f) \geqslant \sum_{t \in M} \alpha(t)\, b_t.$$

Ultima sumă poate fi făcută oricît de apropiată de $\sum_{t \in M} \alpha(t)\, f(t)$ luînd numerele b_t convenabil. Urmează că $\mu^*(f) > a$. Cum a este arbitrar, deducem

$$\mu^*(f) \geqslant \sum_{t \in T} \alpha(t)\, f(t)$$

deci

$$\mu^*(f) = \sum_{t \in T} \alpha(t)\, f(t).$$

Teorema 1. *Pentru orice mulțime $H \subset \mathcal{J}_+$ filtrantă (pentru relația $\leqslant$) avem*

$$\mu^*(\sup_{g \in H} g) = \sup_{g \in H} \mu^*(g) = \lim_{g \in H} \mu^*(g).$$

Să notăm $f = \sup g$. Dacă $H \subset \mathcal{K}_+$ și $f \in \mathcal{K}_+$, atunci, conform propoziției 10, § 2, avem

$$\mu(f) = \lim_{g \in H} \mu(g).$$

Deoarece μ este crescătoare, $(\mu(g))_{g \in H}$ este o familie filtrantă de numere, deci

$$\lim_{g \in H} \mu(g) = \sup_{g \in H} \mu(g)$$

și teorema este demonstrată în acest caz.

Să presupunem acum că H este oarecare. Avem $g \leqslant f$, deci $\mu^*(g) \leqslant \leqslant \mu^*(f)$ pentru orice $g \in H$ și deci

$$\sup_{g \in H} \mu^*(g) \leqslant \mu^*(f) = \mu^* \left(\sup_{g \in H} g\right).$$

Rămîne de demonstrat inegalitatea contrară. Pentru aceasta este suficient să arătăm că pentru orice funcție $\psi \in \mathcal{K}_+$ astfel ca $\psi \leqslant f$, avem

$$\mu(\psi) \leqslant \sup \mu^*(g).$$

Pentru orice funcție $g \in H$ să notăm $A_g = \{\varphi \in \mathcal{K}_+, \varphi \leqslant g\}$ și $A = \bigcup_{g \in H} A_g$. Deoarece H este filtrantă, A este de asemenea filtrantă și avem $f = \sup_{\varphi \in A} \varphi$. Fie ψ o funcție oarecare din $\mathcal{K}_+$ astfel ca $\psi \leqslant f$. Să observăm că

$$\psi = \sup_{\varphi \in A} [\inf (\psi, \varphi)].$$

Dar $\psi \in \mathcal{K}_+$ și $\inf(\psi, \varphi) \in \mathcal{K}_+$. Din prima parte a demonstrației rezultă că

$$\mu(\psi) = \sup_{\varphi \in A} \mu [\inf (\psi, \varphi)]$$

Pentru orice $\varphi \in A$ există $g \in H$ astfel ca $\varphi \in A_g$, deci $\varphi \leqslant g$ și deci

$$\mu(\inf(\psi, \varphi)) \leqslant \mu(\varphi) \leqslant \mu^* (g) \leqslant \sup \mu^*(g)$$

de unde

$$\mu(\psi) \leqslant \sup_{g \in H} \mu^*(g).$$

Rezultă atunci că

$$\mu^*(f) = \sup_{\substack{\psi \leqslant f \\ \psi \in \mathcal{K}_+}} \mu(\psi) \leqslant \sup \mu^*(g).$$

Egalitatea $\sup \mu^*(g) = \lim \mu^*(g)$ rezultă din faptul că H este filtrantă.

Teorema 2. *Dacă* $f_1, f_2 \in \mathcal{J}_+$, *atunci*

$$\mu^*(f_1 + f_2) = \mu^*(f_1) + \mu^*(f_2).$$

Mulțimea $H = \{\varphi_1 + \varphi_2 \mid \varphi_1 \leqslant f_1, \ \varphi_2 \leqslant f_2, \ \varphi_1, \ \varphi_2 \in \mathcal{K}_+\}$ este filtrantă pentru relația $\leqslant$ și $\sup H = f_1 + f_2$. În baza teoremei precedente avem

$$\mu^*(f_1 + f_2) = \sup \mu(\varphi_1 + \varphi_2) = \sup [\mu(\varphi_1) + \mu(\varphi_2)] =$$
$$= \sup \mu(\varphi_1) + \sup \mu(\varphi_2) = \mu^*(f_1) + \mu^*(f_2)$$

considerîndu-se marginile superioare pentru $\varphi_1 \leqslant f_1$, $\varphi_2 \leqslant f_2$, $\varphi_1, \ \varphi_2 \in \mathcal{K}_+$ și teorema este demonstrată.

Teorema 2 exprimă faptul că integrala superioară este finit aditivă pe $\mathcal{J}_+$. Mai mult:

Propoziția 2. *Pentru orice familie* $(f_i)_{i\in I}$ *de funcții din* $\mathcal{J}_+$ *avem*

$$\mu^*(\sum_{i\in I} f_i) = \sum_{i\in I} \mu^*(f_i).$$

Pentru orice parte finită $J\subset I$, din teorema precedentă se deduce prin recurență că

$$\mu^*(\sum_{i\in J} f_i) = \sum_{i\in J} \mu^*(f_i).$$

Să notăm $g_J = \sum_{i\in J} f_i$; avem $g_J \in \mathcal{J}_+$. Cînd J parcurge mulțimea părților finite ale lui I, funcțiile g_J formează o mulțime filtrantă pentru relația $\leqslant$.

Din teorema 1 rezultă că

$$\mu^*(\sum_{i\in I} f_i) = \mu^*(\sup_J g_J) = \sup_J \mu^*(g_J) =$$
$$= \sup_J \mu^*(\sum_{i\in J} f_i) = \sup_J \sum_{i\in J} \mu^*(f_i) = \sum_{i\in I} \mu^*(f_i).$$

2. Măsura exterioară a mulțimilor deschise

Funcția caracteristică φ_G a unei mulțimi deschise $G\subset T$ este inferior semicontinuă.

Pentru orice mulțime deschisă $G\subset T$, integrala superioară $\mu^*(\varphi_G)$ se numește *măsura exterioară a mulțimii* G și se notează $\mu^*(G)$.

Avem $\|\mu\| = \mu^*(T)$.

Într-adevăr, deoarece $\varphi_T(t)\equiv 1$, avem

$$\mu^*(T) = \mu^*(\varphi_T) = \sup_{\substack{g\leqslant 1\\ g\in\mathcal{K}_+}} \mu(g) = \sup_{\substack{g\leqslant 1\\ g\in\mathcal{K}_+}} (\sup_{\substack{|h|\leqslant g\\ h\in\mathcal{K}}} |\mu(h)|) = \sup_{\substack{|h|\leqslant 1\\ h\in\mathcal{K}}} |\mu(h)| = \|\mu\|$$

Din proprietățile integralei superioare rezultă proprietățile măsurii exterioare a mulțimilor deschise:

1) $0 \leqslant \mu^*(G) \leqslant +\infty$ *oricare ar fi mulțimea deschisă* $G\subset T$; $\mu^*(\varnothing) = 0$.

2) *Dacă* $G_1\subset G_2$, *atunci* $\mu^*(G_1)\leqslant \mu^*(G_2)$.

Într-adevăr, în acest caz $\varphi_{G_1}\leqslant \varphi_{G_2}$.

3) *Dacă* $\mathcal{G}$ *este o mulțime de părți deschise ale lui* T, *filtrantă pentru relația* $\subset$, *atunci*

$$\mu^*(\bigcup_{G\in\mathcal{G}} G) = \sup_{G\in\mathcal{G}} \mu^*(G).$$

Într-adevăr, familia $(\varphi_G)_{G\in\mathcal{G}}$ este filtrantă pentru $\leqslant$ și formată din funcții din $\mathcal{J}_+$ iar marginea sa superioară este funcția caracteristică a reuniunii $\bigcup_{G\in\mathcal{G}} G$.

4) *Dacă* $(G_i)_{i\in I}$ *este o familie oarecare de mulțimi deschise, atunci*

$$\mu^*(\bigcup_{i\in I} G_i) \leqslant \sum_{i\in I} \mu^*(G_i).$$

Dacă mulțimile G_i *sînt disjuncte două cîte două, atunci*

$$\mu^*(\bigcup_{i\in I} G_i) = \sum_{i\in I} \mu^*(G_i).$$

Să punem $G = \bigcup_{i\in I} G_i$. Avem

$$\varphi_G = \sup_{i\in I} \varphi_{G_i} \leqslant \sum_{i\in I} \varphi_{G_i},$$

deci

$$\mu^*(G) \leqslant \mu^*(\sum_{i\in I} \varphi_{G_i}) = \sum_{i\in I} \mu^*(\varphi_{G_i}) = \sum_{i\in I} \mu^*(G_i).$$

Dacă, în plus, mulțimile G_i sînt disjuncte două cîte două, atunci

$$\varphi_G = \sum_{i\in I} \varphi_{G_i}$$

și deci

$$\mu^*(G) = \mu^*(\sum_{i\in I} \varphi_{G_i}) = \sum_{i\in I} \mu^*(\varphi_{G_i}) = \sum_{i\in I} \mu^*(G_i).$$

5) *Dacă mulțimea* G *este relativ compactă, atunci* $\mu^*(G) < +\infty$.
Într-adevăr, în acest caz, există o funcție $f \in \mathcal{K}_+$ astfel ca $\varphi_G \leqslant f$ și deci

$$\mu^*(G) = \mu^*(\varphi_G) \leqslant \mu^*(f) < +\infty.$$

6) *Dacă* $f \geqslant 0$ *este semicontinuă inferior și dacă* $\mu^*(f) < +\infty$, *atunci mulțimea* $A = \{t \mid f(t) \neq 0\}$ *este egală cu reuniunea unui șir* (G_n) *de mulțimi deschise cu* $\mu^*(G_n) < +\infty$.
Într-adevăr, mulțimile

$$G_n = \left\{t \mid f(t) > \frac{1}{n}\right\}$$

sînt deschise și avem

$$A = \bigcup_{n=1}^{\infty} G_n.$$

Din inegalitatea $f \geqslant \frac{1}{n} \varphi_{G_n}$ deducem $\varphi_{G_n} \leqslant nf$, deci

$$\mu^*(G_n) \leqslant n\ \mu^*(f) < +\infty.$$

4. Integrala superioară a funcţiilor pozitive

Vom defini mai întîi integrala superioară a funcţiilor $f \geqslant 0$ cu suport compact.

Definiţia 2. *Fie $f \geqslant 0$ o funcţie numerică (finită sau nu) cu suportul compact. Se numeşte integrală superioară (în raport cu μ) a funcţiei f, numărul $\mu^*(f)$ definit de egalitatea*

$$\mu^*(f) = \inf_{\substack{h \geqslant f \\ h \in \mathcal{J}_+}} \mu^*(h).$$

Dacă $f \geqslant 0$ este o funcţie semicontinuă inferior, *cu suport compact*, atunci integrala superioară $\mu^*(f)$ definită mai sus este egală cu integrala superioară definită anterior; într-adevăr, în definiţia de mai sus putem lua $h = f$.

Deoarece mulţimea $B = \{h \in \mathcal{J}_+ \mid h \geqslant f\}$ este filtrantă pentru relaţia $\geqslant$, iar integrala superioară $\mu^*(h)$ este crescătoare pe B, rezultă că funcţia $h \to \mu^*(h)$ are limită (finită sau infinită) după filtrul secţiunilor lui B, iar limita este egală cu marginea inferioară a funcţiei μ^* pe mulţimea B:

$$\lim_{h \geqslant f} \mu^*(h) = \inf_{h \geqslant f} \mu^*(h), \quad h \in \mathcal{J}_+.$$

Rezultă că integrala superioară $\mu^*(f)$ a unei funcţii $f \geqslant 0$ *cu suport compact* se poate defini şi prin egalitatea

$$\mu^*(f) = \lim_{h \geqslant f} \mu^*(h), \quad h \in \mathcal{J}_+.$$

Să observăm că dacă f şi g sînt două funcţii $\geqslant 0$ cu suport compact, şi dacă $f \leqslant g$, atunci $\mu^*(f) \leqslant \mu^*(g)$.

Propoziţia 3. *Pentru orice funcţie semicontinuă inferior $f \geqslant 0$ avem*

$$\mu^*(f) = \sup_K \mu^*(f\varphi_K)$$

cînd K parcurge mulţimea părţilor compacte ale lui T.

Într-adevăr, pentru orice mulţime compactă $K \subset T$, funcţia $f\varphi_K$ are suportul compact şi $f\varphi_K \leqslant f$, iar $f \in \mathcal{J}_+$. Conform observaţiei precedente avem

$$\mu^*(f\varphi_K) \leqslant \mu^*(f),$$

deci

$$\sup_K \mu^*(f\varphi_K) \leqslant \mu^*(f).$$

Reciproc, fie $g \in \mathcal{K}_+(T)$ cu $g \leqslant f$ şi fie K suportul lui g. Atunci $g \leqslant f\varphi_K$, deci

$$\mu(g) = \mu^*(g) \leqslant \mu^*(f\varphi_K) \leqslant \sup_K \mu^*(f\varphi_K)$$

de unde

$$\mu^*(f) = \sup_{\substack{g \leqslant f \\ g \in \mathcal{K}_+}} \mu^*(g) \leqslant \sup_K \mu^*(f\varphi_K).$$

Din cele două inegalități contrare, rezultă

$$\mu^*(f) = \sup_K \mu^*(f\varphi_K), \quad K \text{ compact}.$$

Observație. Pentru orice funcție $f \geqslant 0$ cu suport compact avem de asemenea

$$\mu^*(f) = \sup_K \mu^*(f\varphi_K), \quad K \text{ compact}.$$

Într-adevăr, fie K_0 suportul lui f. Pentru orice mulțime compactă $K \subset T$ avem $f\varphi_K \leqslant f$, deci $\mu^*(f\varphi_K) \leqslant \mu^*(f)$ și deci

$$\mu^*(f) = \mu^*(f\varphi_{K_0}) \leqslant \sup_K \mu^*(f\varphi_K) \leqslant \mu^*(f).$$

Definiția 3. *Se numește integrala superioară (în raport cu μ) a unei funcții oarecare $f \geqslant 0$ (finită sau nu) numărul $\mu^*(f)$ definit prin egalitatea*

$$\mu^*(f) = \sup_K \mu^*(f\varphi_K)$$

cînd K parcurge mulțimea părților compacte ale lui T.

Integrala superioară $\mu^*(f)$ a unei funcții $f \geqslant 0$ va fi notată de asemenea $\int^* f\mathrm{d}\mu$ sau $\int^* f(t)\,\mathrm{d}\mu(t)$.

Din propoziția și observația precedentă, rezultă că pentru funcțiile $f \geqslant 0$ *semicontinue inferior* și pentru funcțiile $f \geqslant 0$ *cu suport compact*, integrala superioară definită aici coincide cu cea definită anterior. Așadar, am extins definiția integralei superioare μ^* de la $\mathcal{J}_+$ la mulțimea tuturor funcțiilor $f \geqslant 0$ definite pe T.

Exemplu. Fie α o funcție pozitivă finită definită pe T astfel încît pentru orice mulțime compactă $K \subset T$ să avem $\sum_{t \in K} \alpha(t) < +\infty$ și fie μ măsura pozitivă definită prin egalitatea

$$\mu(f) = \sum_{t \in T} \alpha(t) f(t) \quad \text{pentru} \quad f \in \mathcal{K}(T).$$

Am văzut că pentru orice funcție $f \geqslant 0$ semicontinuă inferior avem

$$\mu^*(f) = \sum_{t \in T} \alpha(t) f(t).$$

Fie $f \geqslant 0$ o funcție oarecare. Avem

$$\mu^*(f) \geqslant \sum_{t \in T} \alpha(t) f(t).$$

Să arătăm că dacă

$$\mu^*(f) < +\infty,$$

atunci

$$\mu^*(f) = \sum_{t\in T} \alpha(t) f(t).$$

Să presupunem mai întîi că f are suportul compact. Există atunci o funcţie $h \in \mathcal{J}_+$ cu $h \geqslant f$ şi $\mu^*(h) < +\infty$. Fie $u(t) = h(t) - f(t)$ dacă diferenţa este definită şi $u(t) = 0$ dacă $f(t) = h(t) = +\infty$. Suma $\sum_{t\in T} \alpha(t)\, u(t)$ este finită. Pentru orice $\varepsilon > 0$ există o parte finită $M \subset T$ cu $\sum_{t\in T} \alpha(t)\, u(t) > \sum_{t\in T} \alpha(t)\, u(t) - \varepsilon$. Fie h_1 funcţia egală cu $f(t)$ pentru $t \in M$ şi cu $h(t)$ pentru $t \notin M$. Funcţia h_1 este semicontinuă inferior şi $h_1 \geqslant f$.

Avem apoi

$$\sum_{t\in T} \alpha(t)\, h_1(t) = \sum_{t\in T} \alpha(t)\, h(t) - \sum_{t\in T} \alpha(t)\, u(t) \leqslant \sum_{t\in T} \alpha(t) f(t) + \varepsilon$$

deci

$$\mu^*(f) \leqslant \sum_{t\in T} \alpha(t) f(t) + \varepsilon.$$

Deoarece ε este arbitrar, deducem

$$\mu^*(f) \leqslant \sum_{t\in T} \alpha(t)\, f(t)$$

şi deci

$$\mu^*(f) = \sum_{t\in T} \alpha(t) f(t).$$

Dacă $f \geqslant 0$ este o funcţie oarecare cu $\mu^*(f) < +\infty$, atunci pentru orice mulţime compactă $K \subset T$ avem

$$\mu^*(f\varphi_K) = \sum_{t\in K} \alpha(t) f(t)$$

şi trecînd la limită după familia filtrantă a mulţimilor compacte obţinem

$$\mu^*(f) = \sum_{t\in T} \alpha(t) f(t).$$

Propoziţia 4. *Pentru orice funcţie $f \geqslant 0$ avem inegalitatea*

$$\mu^*(f) \leqslant \inf_{\substack{h\geqslant f \\ h\in\mathcal{J}_+}} \mu^*(h).$$

Într-adevăr, pentru orice funcţie $h \geqslant f$ din $\mathcal{J}_+$ şi orice mulţime compactă $K \subset T$ avem $h \geqslant f\varphi_K$ şi $f\varphi_K$ este cu suport compact, deci

$$\mu^*(f\varphi_K) \leqslant \mu^*(h).$$

Atunci

$$\mu^*(f\varphi_K) \leqslant \inf_{h\geqslant f} \mu^*(h), \qquad h \in \mathcal{J}_+$$

de unde

$$\mu^*(f) = \sup_K \mu^*(f\varphi_K) \leqslant \inf_{h \geqslant f} \mu^*(h), \qquad h \in \mathcal{J}_+.$$

Observație. Pentru funcțiile $f \geqslant 0$ cu suport compact și pentru funcțiile $f \geqslant 0$ semicontinue inferior, avem chiar egalitatea

$$\mu^*(f) = \inf_{\substack{h \geqslant f \\ h \in \mathcal{J}_+}} \mu^*(h).$$

Din propoziția precedentă rezultă că egalitatea are loc pentru orice funcție $f \geqslant 0$ cu $\mu^*(f) = +\infty$.

Mai departe se va arăta că egalitatea are loc pentru orice funcție $f \geqslant 0$ pentru care există o funcție semicontinuă inferior $h \geqslant f$ cu $\mu^*(h) < +\infty$.

Inegalitatea din propoziția 4 poate fi însă strictă: pot exista funcții $f \geqslant 0$ cu $\mu^*(f) < +\infty$, astfel încît să avem $\mu^*(h) = +\infty$ pentru orice funcție $h \in \mathcal{J}_+$ cu $h \geqslant f$.

Vom arăta mai departe că în anumite cazuri (de exemplu, dacă T este numărabil la infinit, sau, mai general, reuniune a unui șir (A_n) de părți deschise cu $\mu^*(\varphi_{A_n}) < +\infty$ pentru fiecare n), atunci egalitatea este adevărată pentru orice funcție $f \geqslant 0$.

Observație. N. Bourbaki numește *integrală superioară* a unei funcții $f \geqslant 0$, numărul $\inf_{\substack{h \geqslant f \\ h \in \mathcal{J}_+}} \mu^*(h)$ (pe care îl notează $\mu^*(f)$) iar *integrală superioară esențială* a lui f, numărul $\sup_K \mu^*(f\varphi_K)$ (pe care îl notează $\overline{\mu}^*(f)$).

Integrala superioară a funcțiilor pozitive are următoarele proprietăți:

1) $0 \leqslant \mu^*(f) \leqslant +\infty$;

2) $\mu^*(f_1) \leqslant \mu^*(f_2)$ dacă $0 \leqslant f_1 \leqslant f_2$

3) $\mu^*(\alpha f) = \mu\alpha^*(f)$ dacă $f \geqslant 0$ și $\alpha \geqslant 0$.

Într-adevăr, aceste proprietăți, valabile pentru funcțiile din $\mathcal{J}_+$, se păstrează, prin trecerea la marginea inferioară, pentru funcțiile pozitive cu suport compact, și apoi, prin trecere la marginea superioară, pentru funcțiile pozitive oarecare.

Integrala superioară, care era aditivă pentru funcțiile din $\mathcal{J}_+$, este, în general, numai subaditivă pentru funcțiile pozitive oarecari:

Propoziția 5. *Dacă* $f_1 \geqslant 0$ *și* $f_2 \geqslant 0$, *atunci*

$$\mu^*(f_1 + f_2) \leqslant \mu^*(f_1) + \mu^*(f_2).$$

Într-adevăr, fie $K \subset T$ o mulțime compactă, și funcțiile $h_1, h_2 \in \mathcal{J}_+$ astfel încît $f_1\varphi_K \leqslant h_1$ și $f_2\varphi_K \leqslant h_2$. Atunci $(f_1 + f_2)\varphi_K \leqslant h_1 + h_2$ și $h_1 + h_2 \in \mathcal{J}_+$, deci

$$\mu^*((f_1 + f_2)\varphi_K) \leqslant \mu^*(h_1 + h_2) = \mu^*(h_1) + \mu^*(h_2)$$

de unde

$$\mu^*((f_1+f_2)\varphi_K) \leqslant \inf_{\substack{h_1 \geqslant f_1\varphi_K \\ h_2 \geqslant f_2\varphi_K}} [\mu^*(h_1) + \mu^*(h_2)] = \inf_{h_1 \geqslant f_1\varphi_K} \mu^*(h_1) + \inf_{h_2 \geqslant f_2\varphi_K} \mu^*(h_2) =$$

$$= \mu^*(f_1\varphi_K) + \mu^*(f_2\varphi_K).$$

Rezultă apoi

$$\mu^*(f_1+f_2) = \sup_K \mu^*((f_1+f_2)\varphi_K) \leqslant \sup_K \mu^*(f_1\varphi_K) + \sup_K \mu^*(f_2\varphi_K) = \\ = \mu^*(f_1) + \mu^*(f_2).$$

Observație. Inegalitatea poate fi strictă pentru anumite funcții. Se va arăta mai departe că, pentru anumite clase de funcții (de exemplu, pentru funcțiile integrabile), integrala superioară este aditivă.

Deoarece mulțimea $C = \{f\varphi_K \mid K \text{ compact}\}$ este filtrantă pentru relația $\leqslant$, iar μ^* este crescătoare rezultă că funcția $f \to \mu^*(f)$ are limită după filtrul secțiunilor lui C, iar limita este egală cu marginea superioară a funcției μ^* pe mulțimea C:

$$\lim_K \mu^*(f\varphi_K) = \sup_K \mu^*(f\varphi_K), \quad K \text{ compact}.$$

Rezultă că integrala superioară $\mu^*(f)$ a unei funcții oarecare $f \geqslant 0$ se poate defini și prin egalitatea:

$$\mu^*(f) = \lim_K \mu^*(f\varphi_K).$$

Proprietatea de permutabilitate a integralei superioare cu marginea superioară, valabilă pentru familii filtrante *arbitrare* de funcții din $\mathcal{J}_+$, nu mai are loc, în general, decît pentru familii *numărabile* de funcții pozitive.

Propoziția 6. *Fie* (f_n) *un șir crescător de funcții* $\geqslant 0$ *și* $f = \sup_n f_n$. *Dacă pentru fiecare* n *avem*

$$\mu^*(f_n) = \inf_{\substack{h \geqslant f_n \\ h \in \mathcal{J}}} \mu^*(h),$$

atunci

$$\mu^*(f) = \inf_{\substack{h \geqslant f \\ h \in \mathcal{J}_+}} \mu^*(h) \quad \text{și} \quad \mu^*(f) = \sup_n \mu^*(f_n).$$

Deoarece $f_n \leqslant f$ pentru fiecare n, avem

$$\mu^*(f_n) \leqslant \mu^*(f)$$

deci

$$\sup_n \mu^*(f_n) \leqslant \mu^*(f).$$

Dacă $\sup_n \mu^*(f_n) = +\infty$, rezultă că $\mu^*(f) = +\infty$ și $\mu^*(h) = +\infty$ pentru orice funcție $h \geqslant f$ din $\mathcal{J}_+$ și deci propoziția este demonstrată în acest caz (fără nici o condiție asupra funcțiilor f_n).

Să presupunem acum că $\sup_n \mu^*(f_n) < +\infty$, deci $\mu(f_n) < +\infty$ pentru fiecare n.

Fie $\varepsilon > 0$. Pentru fiecare n există o funcție $h_n \in \mathcal{J}_+$ astfel încît $f_n \leqslant h_n$ și $\mu^*(f_n) \leqslant \mu^*(h_n) \leqslant \mu^*(f_n) + \dfrac{\varepsilon}{2^n}$. Pentru fiecare n să punem

$$g_n = \sup(h_1, h_2, \ldots, h_n).$$

Funcțiile g_n aparțin lui $\mathcal{J}_+$, șirul (g_n) este crescător și $f_n \leqslant g_n$ pentru fiecare n. În plus

$$\mu^*(g_n) \leqslant \mu^*(f_n) + \varepsilon\left(1 - \frac{1}{2^n}\right)$$

pentru fiecare n. Într-adevăr, pentru $n = 1$, avem $g_1 = h_1$ și inegalitatea se scrie $\mu^*(h_1) \leqslant \mu^*(f_1) + \frac{\varepsilon}{2}$; această inegalitate este verificată. Să presupunem inegalitatea adevărată pentru un n oarecare și s-o demonstrăm pentru $n + 1$.

Să observăm că

$$g_{n+1} = \sup(g, h_{n+1}),\ h_{n+1} \geqslant f_{n+1} \geqslant f_n \quad \text{și} \quad g_n \geqslant f_n$$

deci

$$\inf(g_n, h_{n+1}) \geqslant f_n.$$

Atunci

$$\inf(g_n, h_{n+1}) + \sup(g_n, h_{n+1}) = g_n + h_{n+1}.$$

adică

$$\inf(g_n, h_{n+1}) + g_{n+1} = g_n + h_{n+1}.$$

Deoarece aceste funcții sînt inferior semicontinue, deducem

$$\mu^*(\inf(g, h_{n+1})) + \mu^*(g_{n+1}) = \mu^*(g_n) + \mu^*(h_{n+1})$$

deci

$$\mu^*(g_{n+1}) = \mu^*(g_n) + \mu^*(h_{n+1}) - \mu^*(\inf(g_n, h_{n+1})) \leqslant$$

$$\leqslant \mu^*(g_n) + \mu^*(h_{n+1}) - \mu^*(f_n) \leqslant$$

$$\leqslant \mu^*(f_{n+1}) + \frac{\varepsilon}{2^{n+1}} + \varepsilon\left(1 - \frac{\varepsilon}{2^n}\right) = \mu^*(f_{n+1}) + \varepsilon\left(1 - \frac{1}{2^{n+1}}\right).$$

Așadar, inegalitatea

$$\mu^*(g_n) \leqslant \mu^*(f_n) + \varepsilon\left(1 - \frac{1}{2^n}\right)$$

este adevărată pentru orice n.

Să notăm acum $g = \sup g_n$. Funcțiile g_n și g sînt semicontinue inferior, deci $\mu^*(g) = \sup \mu^*(g_n)$, de unde

$$\mu^*(g) \leqslant \sup_n \mu^*(f_n) + \varepsilon.$$

Dar $f = \sup_n f_n \leqslant g$, deci

$$\mu^*(f) = \mu^*(g) \leqslant \sup_n \mu^*(f_n) + \varepsilon.$$

ε fiind arbitrar, rezultă

$$\mu^*(f) \leqslant \sup_n \mu^*(f_n)$$

şi deci

$$\mu^*(f) = \sup_n \mu^*(f_n).$$

Inegalitatea $\mu^*(g) \leqslant \sup_n \mu^*(f_n) + \varepsilon$ se scrie acum $\mu^*(g) \leqslant \mu^*(f) + \varepsilon$. Deoarece $g \in \mathcal{J}_+$ şi $g \geqslant f$, deducem

$$\mu^*(f) = \inf_{\substack{h \geqslant f \\ h \in \mathcal{J}_+}} \mu^*(h).$$

Cu aceasta propoziţia este demonstrată.

Corolarul 1. *Dacă funcţia $f \geqslant 0$ are suportul conţinut în reuniunea unui şir (K_n) de mulţimi compacte, atunci*

$$\mu^*(f) = \inf_{\substack{h \geqslant f \\ h \in \mathcal{J}_+}} \mu^*(h).$$

Dacă pentru fiecare n luăm $A_n = \bigcup_{i=1}^{n} K_i$, mulţimile A_n sînt compacte, şirul (A_n) este crescător, deci şirul $(f\varphi_{A_n})$ este crescător şi $f = \sup_n f\varphi_{A_n}$. Deoarece funcţiile $f\varphi_{A_n}$ au suport compact, avem

$$\mu^*(f\varphi_{A_n}) = \inf_{\substack{h \geqslant f\varphi_{A_n} \\ h \in \mathcal{J}_+}} \mu^*(h) \text{ pentru orice } n.$$

Conform propoziţiei precedente avem atunci

$$\mu^*(f) = \inf_{\substack{h \geqslant f \\ h \in \mathcal{J}_+}} \mu^*(h).$$

Corolarul 2. *Dacă spaţiul T este numărabil la infinit, în particular dacă T este compact, atunci avem*

$$\mu^*(f) = \inf_{\substack{h \geqslant f \\ h \in \mathcal{J}_+}} \mu^*(h)$$

pentru orice funcţie $f \geqslant 0$.

Observaţie. Se va arăta mai departe (v. propoziţia 8, § 11) că egalitatea din corolar rămîne adevărată şi pentru funcţii care se anulează pe complementara reuniunii unui şir (G_n) de mulţimi deschise cu $\mu^*(\varphi_{G_n}) < +\infty$ pentru fiecare n.

Va rezulta atunci că dacă T este reuniunea unui şir (G_n) de mulţimi deschise cu $\mu^*(\varphi_{G_n}) < +\infty$, în particular dacă μ^* este mărginită, egalitatea este adevărată pentru orice funcţie $f \geqslant 0$.

Teorema 3. *Pentru orice şir crescător (f_n) de funcţii $\geqslant 0$ avem*

$$\mu^*(\sup_n f_n) = \sup_n \mu(f_n).$$

Pentru orice mulțime compactă $K \subset T$ și orice n avem

$$\mu^*(f_n \varphi_K) = \inf_{\substack{h \geqslant f_n \varphi_K \\ h \in \mathcal{J}_+}} \mu^*(h)$$

iar șirul $(f_n \varphi_K)$ este crescător și $\sup_n (f_n \varphi_K) = (\sup_n f_n)\, \varphi_K$. Conform propoziției precedente avem atunci

$$\mu^*((\sup_n f_n)\varphi_K) = \sup_n \mu^*(f_n \varphi_K).$$

Luînd marginea superioară pentru toate mulțimile compacte $K \subset T$ obținem

$$\mu^*(\sup_n f_n) = \sup_K \mu^*((\sup_n f_n)\varphi_K) = \sup_K \sup_n \mu^*(f_n \varphi_K) = \sup_n \sup_K \mu^*(f_n \varphi_K) = \sup_n \mu^*(f_n)$$

și teorema este demonstrată.

Observație. Dacă (f_n) este un șir *descrescător* de funcții $\geqslant 0$, avem, în general, numai inegalitatea

$$\mu^*(\inf_n f_n) \leqslant \inf_n \mu^*(f_n).$$

Corolar. *Pentru orice mulțime numărabilă H de funcții pozitive, filtrantă pentru relația $\leqslant$, avem*

$$\mu^*(\sup_{f \in H} f) = \sup_{f \in H} \mu^*(f).$$

Într-adevăr, $\sup_{f \in H} f \geqslant f$, deci $\mu^*(\sup_{f \in H} f) \geqslant \mu^*(f)$ pentru orice $f \in H$, de unde

$$\mu^*(\sup_{f \in H} f) \geqslant \sup_{f \in H} \mu^*(f).$$

Pentru a demonstra inegalitatea contrară, fie (f_n) șirul funcțiilor din H, aranjate într-o ordine oarecare. Din acest șir extragem un subșir crescător (f_{n_k}) în felul următor: $f_{n_1} = f_1$ și pentru orice k alegem $f_{n_{k+1}} \geqslant \sup(f_{n_k}, f_k)$. Atunci $\sup_k f_{n_k} = \sup_{f \in H} f$ deci

$$\mu^*(\sup_{f \in H} f) = \mu^*(\sup_k f_{n_k}) = \sup_k \mu^*(f_{n_k}) \leqslant \sup_{f \in H} \mu^*(f).$$

Observații. 1° Corolarul nu mai este, în general, valabil dacă H nu este numărabilă.

De exemplu, pentru măsura Lebesgue pe dreaptă și pentru mulțimea filtrantă H a funcțiilor caracteristice φ_A a tuturor părților finite $A \subset R$ avem $\mu^*(\varphi_A) = 0$, deci $\sup_{\varphi_A \in H} \mu^*(\varphi_A) = 0$ dar $\sup_{\varphi \in H} \varphi_A = 1$ și $\mu(\sup_{\varphi_A \in H} \varphi_A) = +\infty$.

Propoziția 7. *Pentru orice șir* (f_n) *de funcții pozitive avem*

$$\mu^*\left(\sum_{n=1}^{\infty} f_n\right) \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(f_n).$$

Se consideră șirul crescător al funcțiilor $g_n = \sum_{k=1}^{n} f_k$ și se aplică teorema 3 ținînd seama că μ^* este finit subaditivă :

$$\mu^*\left(\sum_{n=1}^{\infty} f_n\right) = \mu^*\left(\sup_n \sum_{k=1}^{n} f_k\right) = \sup_n \mu^*\left(\sum_{k=1}^{n} f_k\right) \leqslant$$

$$\leqslant \sup_n \sum_{k=1}^{n} \mu^*(f_k) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu^*(f_k).$$

Lema lui Fatou. *Pentru orice șir* (f_n) *de funcții pozitive avem*

$$\mu^*(\liminf_{n\to\infty} f_n) \leqslant \liminf_{n\to\infty} \mu^*(f_n)$$

Pentru orice n să punem $g_n = \inf_{p\geqslant 0} f_{n+p}$. Șirul (g_n) este crescător, deci

$$\mu^*(\sup_n g_n) = \sup_n \mu^*(g_n).$$

Dar

$$\sup_n g_n = \sup_n (\inf_{p\geqslant 0} f_{n+p}) = \liminf_{n\to\infty} f_n,$$

deci

$$\mu^*(\liminf_{n\to\infty} f_n) = \sup_n \mu^*(g_n).$$

Pe de altă parte, $g_n \leqslant f_{n+p}$ pentru $p \geqslant 0$, deci

$$\mu^*(g_n) \leqslant \mu^*(f_{n+p}).$$

Atunci

$$\mu^*(g) \leqslant \inf_{p\geqslant 0} \mu^*(f_{n+p})$$

deci

$$\mu^*(\liminf_{n\to\infty} f_n) \leqslant \sup_n \mu^*(g_n) \leqslant \sup_n (\inf_{p\geqslant 0} \mu^*(f_{n+p})) =$$

$$= \liminf_{n\to\infty} \mu^*(f_n).$$

Corolar. *Fie* (f_n) *un șir de funcții* $\geqslant 0$. *Dacă* $\mu \neq 0$ *și dacă* $\lim_{n\to\infty} f_n(t) = +\infty$ *pentru orice* $t \in T$, *atunci* $\lim_{n\to\infty} \mu^*(f_n) = +\infty$.

Într-adevăr, notînd $f_0(t) \equiv +\infty$, avem $f_0(t) = \lim_{n\to\infty} f_n(t) = \liminf_{n\to\infty} f_n(t)$, deci, conform lemei lui Fatou,

$$\mu^*(f_0) \leqslant \liminf_{n\to\infty} \mu^*(f_n).$$

Rămîne de arătat că $\mu^*(f_0) = +\infty$. Deoarece $\mu \neq 0$, există o funcție $g \in \mathcal{K}_+$ astfel încît $\mu(g) > 0$. Deoarece $f_0 \geqslant g$, deducem $\mu^*(f_0) \geqslant \mu(g) > 0$. Pentru orice k natural avem $f_0 = kf_0$, deci $\mu^*(f_0) = k\mu^*(f_0) \geqslant k\,\mu(g)$, de unde rezultă că $\mu^*(f_0) = +\infty$. Urmează că $\liminf_{n\to\infty} \mu^*(f_n) = +\infty$, deci șirul $(\mu^*(f_n))$ are limită și

$$\lim_{n\to\infty} \mu^*(f_n) = \liminf_{n\to\infty} \mu^*(f_n) = +\infty.$$

Propoziția 8. *Dacă μ și ν sînt două măsuri pozitive și $\alpha > 0$, atunci:*

1) $(\mu + \nu)^* = \mu^* + \nu^*$;

2) $(\alpha\mu)^* = \alpha\mu^*$;

3) $\mu^* \leqslant \nu^*$ *dacă* $\mu \leqslant \nu$.

Pentru $f \in \mathcal{J}_+$ avem

$$(\mu + \nu)^*(f) = \lim_{\substack{g\leqslant f \\ g\in\mathcal{K}_+}} (\mu + \nu)(g) = \lim_{g\leqslant f} (\mu(g) + \nu(g)) =$$

$$= \lim_{g\leqslant f} \mu(g) + \lim_{g\leqslant f} \nu(g) = \mu^*(f) + \nu^*(f).$$

Dacă $f \geqslant 0$ are suportul compact, egalitatea 1) se demonstrează în același fel, luînd limita după mulțimea funcțiilor $g \geqslant f$, $g \in \mathcal{J}_+$, filtrantă pentru relația $\geqslant$. Dacă $f \geqslant 0$ este oarecare, se procedează la fel:

$$(\mu + \nu)^*(f) = \lim_K (\mu + \nu)^*(f\varphi_K) = \lim_K (\mu^*(f\varphi_K) + \nu^*(f\varphi_K)) =$$

$$= \lim_K \mu^*(f\varphi_K) + \lim \nu^*(f\varphi_K) = \mu^*(f) + \nu^*(f).$$

La fel se procedează pentru demonstrarea egalității 2).

Dacă $\mu \leqslant \nu$, atunci $\nu = \mu + (\nu - \mu)$ și $\nu - \mu \geqslant 0$, deci, pentru orice funcție $f \geqslant 0$, avem

$$\nu^*(f) = \mu^*(f) + (\nu - \mu)^*(f).$$

Deoarece $(\nu - \mu)^*(f) \geqslant 0$, rezultă că $\mu^*(f) \leqslant \nu^*(f)$, deci $\mu^* \leqslant \nu^*$.

Cu aceasta propoziția este demonstrată.

5. Măsura exterioară a mulțimilor oarecare

Pentru orice mulțime $A \subset T$, integrala superioară $\mu^*(\varphi_A)$ se numește *măsura exterioară* a mulțimii A (pentru măsura μ) și se notează $\mu^*(A)$.

Proprietățile măsurii exterioare rezultă din cele ale integralei superioare:

1) $0 \leqslant \mu^*(A) \leqslant +\infty$.

2) $\mu^*(A) \leqslant \mu^*(B)$ *dacă* $A \subset B$.

3) *Dacă* (A_n) *este un șir crescător de părți ale lui* T, *atunci*

$$\mu^*\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sup_n \mu^*(A_n).$$

Într-adevăr,

$$\sup_n \varphi_{A_n} = \varphi_{\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n}$$

4) *Pentru orice șir* (A_n) *de părți ale lui* T *avem*

$$\mu^*\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(A_n).$$

Inegalitatea poate fi strictă, chiar dacă mulțimile sînt disjuncte două cîte două.

5) *Pentru orice mulțime* $A \subset T$ *conținută în reuniunea unui șir de mulțimi compacte, avem*

$$\mu^*(A) = \inf_{G \supset A} \mu^*(G), \quad G \text{ deschisă}.$$

Fie $0 < \varepsilon < 1$. Deoarece funcția φ_A are suportul conținut în reuniunea unui șir de mulțimi compacte, avem

$$\mu^*(\varphi_A) = \inf \mu^*(h), \quad h \geqslant \varphi_A, \; h \in \mathcal{J}_+.$$

Există deci o funcție $f \in \mathcal{J}_+$ cu $\varphi_A \leqslant f$ și $\mu^*(A) \leqslant \mu^*(f) \leqslant \mu^*(A) + \varepsilon$.

Mulțimea $G = \{t \mid f(t) > 1 - \varepsilon\}$ este deschisă, deoarece f este semicontinuă inferior. Avem $G \supset A$ și $f \geqslant (1 - \varepsilon)\, \varphi_G$ deci $\dfrac{1}{1-\varepsilon} f \geqslant \varphi_G$, de unde

$$\mu^*(G) \leqslant \frac{1}{1-\varepsilon} \mu^*(f) \leqslant \frac{1}{1-\varepsilon} (\mu^*(A) + \varepsilon).$$

Atunci

$$\inf_{G \supset A} \mu^*(G) \leqslant \frac{1}{1-\varepsilon} (\mu^*(A) + \varepsilon).$$

ε fiind arbitrar, obținem

$$\mu^*(A) \leqslant \inf_{G \supset A} \mu^*(G), \quad G \text{ deschisă},$$

de unde

$$\mu^*(A) = \inf_{G \supset A} \mu^*(G), \quad G \text{ deschisă}.$$

Proprietatea 5) este, în particular, adevărată pentru orice mulțime relativ compactă $A \subset T$.

Din proprietatea 5) rezultă că dacă T este *numărabil la infinit*, în particular dacă T este *compact*, egalitatea

$$\mu^*(A) = \inf_{G \supset A} \mu^*(G), \quad G \text{ deschisă},$$

este adevărată pentru *orice* mulțime $A \subset T$.

Observație. Egalitatea este evident adevărată și dacă $\mu^*(A) = +\infty$. Se va arăta mai departe că egalitatea rămîne adevărată pentru orice mulțime A conținută într-o mulțime deschisă G cu $\mu^*(G) < +\infty$.

Pot exista însă mulțimi $A \subset T$ cu $\mu^*(A) < +\infty$ și $\mu^*(G) = +\infty$ pentru orice mulțime deschisă $G \subset A$.

6) *Pentru orice mulțime relativ compactă $A \subset T$ avem* $\mu^*(A) < +\infty$.

Într-adevăr, există o mulțime deschisă relativ compactă $G \supset A$. Atunci

$$\mu^*(A) \leqslant \mu^*(G) < +\infty.$$

7) *Pentru orice mulțime $A \subset T$ avem*

$$\mu^*(A) = \sup_K \mu^*(A \cap K), \quad K \text{ compactă}.$$

Într-adevăr,

$$\varphi_A \cdot \varphi_K = \varphi_{A \cap K}.$$

Observație. Pentru orice mulțime $A \subset T$, numărul $\mu_*(A)$ definit de egalitatea

$$\mu_*(A) = \sup_{K \subset A} \mu^*(K), \quad K \text{ compactă},$$

se numește *măsura interioară* a mulțimii A.

Avem $\mu_*(A) \leqslant \mu^*(A)$ și inegalitatea poate fi strictă.

§ 6. FUNCȚII ȘI MULȚIMI NEGLIJABILE

1. Funcții neglijabile pozitive

Fie μ o măsură pozitivă pe T.

Definiția 1. *Spunem că o funcție $f \geqslant 0$ este neglijabilă pentru măsura μ, sau μ-neglijabilă, dacă $\mu^*(f) = 0$. Spunem că o mulțime $A \supset T$ este μ-neglijabilă, dacă funcția sa caracteristică φ_A este μ-neglijabilă, adică dacă $\mu^*(A) = 0$.*

Observație. N. Bourbaki numește *funcții neglijabile* funcțiile $f \geqslant 0$ pentru care $\inf_{h \geqslant f,\ h \in \mathcal{J}_+} \mu^*(h) = 0$, și funcții *local neglijabile*, funcțiile $f \geqslant 0$ pentru care $\sup_K \mu^*(f\varphi_K) = 0$, K compact.

Dacă nu este pericol de confuzie asupra măsurii μ, în loc de funcție (respectiv mulțime) μ -neglijabilă vom spune mai simplu : funcție (respectiv mulțime) neglijabilă.

Proprietățile funcțiilor neglijabile sînt următoarele :

1) *Dacă f este neglijabilă, $\alpha \geqslant 0$ și dacă $0 \leqslant g \leqslant \alpha f$, atunci g este neglijabilă.*

Într-adevăr,

$$0 \leqslant \mu^*(g) \leqslant \alpha \mu^*(f) = 0.$$

În particular, dacă f este neglijabilă și $\alpha \geqslant 0$, atunci αf este neglijabilă.

2) *Dacă (f_n) este un șir de funcții pozitive neglijabile, atunci suma $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ și anvelopa superioară $\sup_n f_n$ sînt neglijabile.*

Într-adevăr,

$$\mu^*\left(\sum_{n=1}^{\infty} f_n\right) \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(f_n) = 0.$$

și $\sup_n f_n \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} f_n$; deci

$$\mu^*(\sup f_n) \leqslant \mu^*\left(\sum_{n=1}^{\infty} f_n\right) = 0.$$

3) *O funcție $f \geqslant 0$ este neglijabilă, dacă și numai dacă $f\varphi_K$ este neglijabilă, oricare ar fi mulțimea compactă $K \subset T$.*

Într-adevăr,

$$\mu^*(f) = \sup_K \mu^*(f\varphi_K).$$

Propoziția 1. *O funcție $f \in \mathcal{J}_+$ este μ -neglijabilă dacă și numai dacă f este identic nulă pe suportul lui μ.*

Fie S suportul lui μ. Dacă $\mu^*(f) = 0$, avem $\mu(g) = 0$ pentru orice funcție $g \leqslant f$ din $\mathcal{K}_+$, iar pentru funcțiile $g \in \mathcal{K}_+$ cu $\mu(g) = 0$ avem $g(t) = 0$ pentru $t \in S$. Rezultă atunci că

$$f(t) = \sup_{g \leqslant f,\ g \in \mathcal{K}_+} g(t) = 0 \text{ pentru } t \in S.$$

Reciproc, dacă $f(t) = 0$ pentru orice $t \in S$, atunci $g(t) = 0$, pentru orice

$t \in S$ și orice funcție $g \leqslant f$ din $\mathcal{K}_+$, iar pentru funcțiile $g \in \mathcal{K}_+$ care sînt nule pe S avem $\mu(g) = 0$. Rezultă atunci că $\mu^*(f) = 0$.

Proprietățile mulțimilor neglijabile se deduc din cele ale funcțiilor neglijabile :

1) *Orice parte $B \subset A$ a unei mulțimi neglijabile A, este neglijabilă.*

2) *Reuniunea unui șir (A_n) de mulțimi neglijabile este o mulțime neglijabilă.*

3) *O mulțime A este neglijabilă dacă și numai dacă $A \cap K$ este neglijabilă, oricare ar fi mulțimea compactă $K \subset T$.*

Propoziția 2. *Complementara suportului măsurii μ este cea mai mare mulțime deschisă μ -neglijabilă.*

Pentru orice mulțime deschisă G avem $\varphi_G \in \mathcal{J}_+$. Din propoziția 1 rezultă că G este μ -neglijabilă dacă și numai dacă G este disjunctă de suportul S al măsurii μ, adică dacă și numai dacă $G \subset \mathbf{C}S$. Cum $\mathbf{C}S$ este deschisă și disjunctă de S, rezultă că $\mathbf{C}S$ este μ-neglijabilă, și anume, cea mai mare mulțime deschisă μ -neglijabilă.

Propoziția 3. *Fie μ și ν două măsuri pozitive. O funcție $f \geqslant 0$ este $\mu + \nu$ -neglijabilă dacă și numai dacă este μ -neglijabilă și ν -neglijabilă.*

Într-adevăr,

$$(\mu + \nu)^*(f) = \mu^*(f) + \nu^*(f).$$

Corolar. *O mulțime $A \subset T$ este $\mu + \nu$ -neglijabilă dacă și numai dacă A este μ -neglijabilă și ν -neglijabilă.*

Propoziția 4. *Fie μ și ν două măsuri pozitive. Dacă $\mu \leqslant \nu$, atunci orice funcție $f \geqslant 0$ ν -neglijabilă este μ-neglijabilă ; orice mulțime ν -neglijabilă $A \subset T$ este μ -neglijabilă.*

Într-adevăr, dacă $\mu \leqslant \nu$, atunci $\mu^*(f) \leqslant \nu^*(f)$ și $\mu^*(A) \leqslant \nu^*(A)$.

2. Proprietăți adevărate aproape peste tot

Fie $P(t)$ o proprietate definită pentru orice punct $t \in T$, putînd fi falsă pentru unele puncte și adevărată pentru alte puncte

Definiția 2. *Spunem că proprietatea $P(t)$ este adevărată aproape peste tot în raport cu o măsură pozitivă μ, sau μ -aproape peste tot, dacă mulțimea N a punctelor din T pentru care proprietatea $P(t)$ nu este adevărată, este μ -neglijabilă.*

Dacă nu există pericol de confuzie asupra măsurii μ, în loc de „μ -aproape peste tot" vom spune, mai simplu, „aproape peste tot".

Teorema 1. *O funcție $f \geqslant 0$ este μ -neglijabilă dacă și numai dacă $f(t) = 0$ μ -aproape peste tot.*

Să presupunem mai întîi că f este μ -neglijabilă, adică $\mu^*(f) = 0$. Să notăm $N = \{t \mid t \in T,\ f(t) \neq 0\}$. Avem $\varphi_N \leqslant \sup(nf)$ iar nf este μ -neglijabilă, pentru orice n. Rezultă că φ_N, deci N este μ -neglijabilă, adică $f(t) = 0$, μ -aproape peste tot.

Reciproc, să presupunem că $f(t) = 0$, μ -aproape peste tot, adică $\mu^*(N) = 0$. Atunci $f \leqslant \sup n\,\varphi_N$, iar $n\,\varphi_N$ este μ -neglijabilă pentru orice n, de unde rezultă că f este μ -neglijabilă.

Această teoremă sugerează să numim *funcție μ -neglijabilă orice aplicație a lui T într-un spațiu vectorial, nulă μ -aproape peste tot.*

Propoziția 5. *Dacă două funcții $f \geqslant 0$ și $g \geqslant 0$ sînt egale μ -aproape peste tot, atunci $\mu^*(f) = \mu^*(g)$.*

Să presupunem mai întîi că $f \leqslant g$ și să notăm $N = \{t \mid t \in T, f(t) \neq g(t)\}$. Mulțimea N este μ -neglijabilă. Funcția

$$h(t) = \begin{cases} 0 & \text{dacă } t \notin N \\ +\infty & \text{dacă } t \in N \end{cases}$$

este μ -neglijabilă, fiind nulă μ -aproape peste tot și avem $f \leqslant g \leqslant f + h$. Atunci

$$\mu^*(f) \leqslant \mu^*(g) \leqslant \mu^*(f + h) \leqslant \mu^*(f) + \mu^*(h) \leqslant \mu^*(f)$$

de unde

$$\mu^*(f) = \mu^*(g).$$

Dacă f și g sînt oarecare (egale μ -aproape peste tot), avem $f \leqslant \sup(f, g)$, iar f și $\sup(f, g)$ sînt egale μ -aproape peste tot. Din prima parte a demonstrației rezultă

$$\mu^*(f) = \mu^*[\sup(f, g)].$$

În mod asemănător, rezultă că

$$\mu^*(g) = \mu^*[\sup(f, g)]$$

și deci

$$\mu^*(f) = \mu^*(g).$$

Propoziția 6. *Fie $f \geqslant 0$. Dacă $\mu^*(f) < +\infty$, atunci $f(t) < +\infty$, μ -aproape peste tot.*

Fie $N = \{t \mid t \in T, f(t) = +\infty\}$. Pentru orice n avem $n\varphi_N \leqslant f$, deci $\mu^*(n\varphi_N) \leqslant \mu^*(f) < +\infty$ și deci

$$n\mu^*(\varphi_N) = \mu^*(n\varphi_N) < +\infty.$$

Rezultă că $\mu^*(\varphi_N) = 0$, deci $f(t) < +\infty$, μ -aproape peste tot.

3. Clase de funcții echivalente

Fie μ o măsură pozitivă pe T, și E o mulțime oarecare.

Spunem că două aplicații f și g ale lui T în E sînt *echivalente în raport cu* μ sau μ -echivalente, dacă $f(t) = g(t)$, μ -aproape peste tot; scriem $f \sim g$.

Relația $f \sim g$ are următoarele proprietăți :

1) $f \sim f$ oricare ar fi $f : T \to E$;
2) $f \sim g \Rightarrow g \sim f$;
3) $f \sim g$ și $g \sim h \Rightarrow f \sim h$.

Așadar $f \sim g$ este o relație de echivalență în mulțimea E^T a aplicațiilor lui T în E.

Clasa de echivalență a unei funcții f va fi notată cu $\tilde{f}$.

Să presupunem acum că E este un *spațiu vectorial.* Am numit funcție μ -neglijabilă, orice funcție $f : T \to E$, nulă μ -aproape peste tot.

Dacă f este μ -neglijabilă și dacă $g \sim f$, atunci g este de asemenea μ -neglijabilă și $\tilde{f} = \tilde{0}$.

Mulțimea claselor de echivalență ale funcțiilor $f : T \to E$ poate fi organizată ca spațiu vectorial, definind suma $\tilde{f} + \tilde{g}$ și produsul cu scalari $\alpha \tilde{f}$ ca fiind clasele de echivalență ale funcțiilor $f + g$ respectiv αf. Clasele $\tilde{f} + \tilde{g}$ și $\alpha \tilde{f}$ depind doar de clasele $\tilde{f}$ și $\tilde{g}$ și sînt independente de funcțiile f și g. Într-adevăr, se verifică ușor că dacă $f \sim f'$ și $g \sim g'$, atunci

$$f + g \sim f' + g' \quad \text{și} \quad \alpha f \sim \alpha f'.$$

Dacă $\mathbf{f} : T \to E$ și $\varphi : T \to R$, se definește produsul $\tilde{\varphi} \cdot \tilde{\mathbf{f}}$ ca fiind clasa de echivalență a funcției $\varphi \mathbf{f}$.

Dacă E este o *algebră* și $\mathbf{f}, \mathbf{g} : T \to E$, se definește produsul $\tilde{\mathbf{f}} \cdot \tilde{\mathbf{g}}$ ca fiind clasa de echivalență a funcției $\mathbf{f} \cdot \mathbf{g}$.

Mulțimea claselor de echivalență ale funcțiilor *numerice* (*finite*) definite pe T este un *inel.*

Mulțimea claselor de echivalență ale funcțiilor $\mathbf{f} : T \to E$ este un *modul* pe inelul claselor de echivalență ale funcțiilor numerice definite pe T.

Dacă E este algebră, mulțimea claselor de echivalență ale funcțiilor $\mathbf{f} : T \to E$ este o *algebră.*

Dacă E este un spațiu normat, două aplicații $\mathbf{f}, \mathbf{g} : T \to E$ sînt echivalente dacă și numai dacă funcția numerică $|\mathbf{f}(t) - \mathbf{g}(t)|$ este μ -neglijabilă.

Într-adevăr, relația $\mathbf{f}(t) = \mathbf{g}(t)$ este echivalentă cu relația $\mathbf{f}(t) - \mathbf{g}(t) = 0$, iar aceasta este echivalentă cu relația $|\mathbf{f}(t) - \mathbf{g}(t)| = 0$.

Propoziția 7. *Două aplicații continue f și g ale lui T într-un spațiu topologic separat E sînt μ -echivalente dacă și numai dacă sînt egale pe suportul lui μ.*

Deoarece mulțimea $G = \{t \mid t \in T, f(t) \neq g(t)\}$ este deschisă, ea este μ -neglijabilă dacă și numai dacă este disjunctă de suportul lui μ. Rezultă că $f \sim g$ dacă și numai dacă $f(t) = g(t)$ pentru orice punct t din suportul lui μ.

4. Funcții definite aproape peste tot

Fie $A \subset T$ și f o funcție definită pe A cu valori într-o mulțime oarecare E. Dacă $T - A$ este μ -neglijabilă, spunem că funcția f este definită μ -aproape peste tot.

Fie f și g două funcții definite μ -aproape peste tot (cu valori în E). Spunem că f și g sînt μ -echivalente și scriem $f \sim g$, dacă mulțimea punctelor, în care ambele funcții sînt definite și sînt egale, diferă de T printr-o mulțime μ -neglijabilă.

În particular, o funcție f definită μ -aproape peste tot este echivalentă cu orice funcție g, definită pe întreg spațiul T, egală cu f pe mulțimea de definiție a lui f, și cu valori arbitrare în celelalte puncte. Două astfel de prelungiri ale lui f la întregul spațiu T sînt, evident, echivalente.

Vom numi clasă de echivalență a unei funcții f definite μ -aproape peste tot și o vom nota cu $\tilde{f}$ clasa de echivalență a oricărei prelungiri g a lui f la întreg spațiul T. Clasa de echivalență $\tilde{f}$ nu depinde de g, ci numai de f. Cu această notație, două funcții f și g definite aproape peste tot sînt echivalente dacă și numai dacă $\tilde{f} = \tilde{g}$.

Dacă E este un spațiu vectorial, o funcție $\mathfrak{f}$ definită μ -aproape peste tot (cu valori în E) va fi numită încă μ -neglijabilă dacă $\tilde{\mathfrak{f}} = \tilde{0}$.

Mulțimea funcțiilor definite aproape peste tot, cu valori în E, nu este un spațiu vectorial și nici chiar grup aditiv, deoarece funcția identic nulă este element neutru pentru adunare, dar dacă $\mathfrak{f}$ nu este definită peste tot, nu există nici o funcție $\mathfrak{g}$ astfel că $\mathfrak{f} + \mathfrak{g} = 0$. Mulțimea claselor de echivalență este însă spațiu vectorial (și chiar algebră, dacă E este algebră).

5. Funcții cu valori în R

Spunem că o funcție reală f definită μ -aproape peste tot pe T, cu valori finite sau infinite, este *finită μ -aproape peste tot* dacă mulțimea punctelor $t \in T$, în care t este *definită* și *finită*, are complementara μ -neglijabilă.

O funcție f *finită μ -aproape peste tot* este echivalentă cu o funcție peste tot definită și finită. De aceea se definește $\tilde{f}$ ca fiind clasa de echivalență a unei funcții echivalente cu f, *definită și finită peste tot.* În acest fel se poate defini suma $\tilde{f} + \tilde{g}$ și produsul $\alpha\tilde{f}$.

Dacă f și g sînt două funcții numerice (cu valori finite sau infinite) definite aproape peste tot și dacă $f(t) \leqslant g(t)$ aproape peste tot, atunci pentru orice funcție $f_1 \sim f$ și orice funcție $g_1 \sim g$ avem de asemenea $f_1(t) \leqslant g_1(t)$ aproape peste tot. Vom putea scrie deci $\tilde{f} \leqslant \tilde{g}$ și această relație este o proprietate a claselor $\tilde{f}$ și $\tilde{g}$.

Relația $\tilde{f} \leqslant \tilde{g}$ este o relație de ordine pe mulțimea claselor de echivalență ale funcțiilor numerice definite pe T.

O funcție finită μ -aproape peste tot este numită, încă, μ -neglijabilă, dacă este echivalentă cu 0.

§ 7. SPAȚIILE $\mathcal{L}^p$

1. Inegalitățile lui Hölder și Minkowski

Pentru demonstrarea acestor importante inegalități avem nevoie de următoarea lemă:

Lema 1. *Dacă* $p > 1$, $q > 1$ *și* $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ *și dacă* $a \geqslant 0$ *și* $b \geqslant 0$, *atunci*

$$ab \leqslant \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}.$$

Într-adevăr, dacă $a = 0$ sau $b = 0$, inegalitatea este, evident adevărată. Să presupunem deci $a > 0$ și $b > 0$. Plecăm de la funcția $\varphi(x) = \frac{x^p}{p} + \frac{x^{-q}}{q}$ definită pentru $x > 0$. Această funcție este derivabilă și

$$\varphi'(x) = x^{p-1} - x^{-q-1} = x^{p-1} - \frac{1}{x^{q+1}}.$$

φ' se anulează numai în punctul 1; dacă $x < 1$, atunci $\varphi'(x) > 0$ iar dacă $x > 1$, atunci $\varphi'(x) < 0$; așadar 1 este punct de minim pentru funcția φ:

$$\varphi(x) = \frac{x^p}{p} + \frac{x^{-q}}{q} \geqslant \varphi(1) = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

Scriind acum inegalitatea obținută, $1 \leqslant \frac{x^p}{p} + \frac{x^{-q}}{q}$, pentru $x = \frac{a^{\frac{1}{q}}}{b^{\frac{1}{p}}}$ rezultă

$$1 \leqslant \frac{a^{\frac{p}{q}}}{bp} + \frac{a^{-1}}{qb^{-\frac{q}{p}}} = \frac{a^{p-1}}{bp} + \frac{b^{q-1}}{aq}$$

deoarece $\frac{p}{q} = p - 1$ și $\frac{q}{p} = q - 1$. Înmulțind cu ab obținem

$$ab \leqslant \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}$$

și lema este demonstrată.

Fiecărui număr $p \geqslant 1$ i se atașează un număr q astfel:

$$q = +\infty \text{ dacă } p = 1,$$

$$q = \frac{p}{p-1} \text{ dacă } p > 1.$$

Numerele p și q astfel asociate se numesc *conjugate* unul altuia. Avem $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

Dacă $1 \leqslant p \leqslant 2$, atunci $2 \leqslant q \leqslant +\infty$. Dacă $p = 2$, atunci $q = 2$.

Inegalitatea lui Hölder. *Fie μ o măsură pozitivă, f și g două funcții $\geqslant 0$ definite pe T cu valori finite sau $+\infty$. Dacă $p > 1$ și $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, atunci*

$$\int^* fg \, d\mu \leqslant \left(\int^* f^p \, d\mu \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int^* g^q \, d\mu \right)^{\frac{1}{q}}.$$

Într-adevăr, dacă membrul drept este zero, atunci avem, de exemplu $\int^* f^p \, d\mu = 0$ (chiar dacă $\int^* g^q \, d\mu = +\infty$), adică f^p este μ-neglijabilă. Rezultă că f^p este nulă μ-aproape peste tot, deci f și fg sînt nule μ-aproape peste tot, de unde $\int^* fg d\mu = 0$, și astfel inegalitatea este verificată în acest caz. Să presupunem acum că integralele din membrul drept sînt diferite de zero. Dacă una din aceste integrale este $+\infty$, inegalitatea este de asemenea verificată. Rămîne de considerat cazul cînd:

$$0 < \int^* f^p \, d\mu < +\infty \text{ și } 0 < \int^* g^q d\mu < +\infty.$$

Vom presupune mai întîi că f și g sînt *finite* peste tot. În inegalitatea $ab \leqslant \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}$ să luăm, pentru fiecare $t \in T$,

$$a = \frac{f(t)}{\left(\int^* f^p \, d\mu\right)^{\frac{1}{p}}} \text{ și } b = \frac{g(t)}{\left(\int^* g^q \, d\mu\right)^{\frac{1}{q}}}.$$

Atunci

$$\frac{f(t)\, g(t)}{\left(\int^* f^p \, d\mu\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int g^q \, d\mu\right)^{\frac{1}{q}}} \leqslant \frac{f(t)^p}{p \int^* f^p \, d\mu} + \frac{g(t)^q}{q \int^* g^q \, d\mu}.$$

Luînd integralele superioare ale funcțiilor din aceste inegalități obținem

$$\frac{\int^* fg \, d\mu}{\left(\int^* f^p \, d\mu\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int^* g^q \, d\mu\right)^{\frac{1}{q}}} \leqslant \frac{\int^* f^p \, d\mu}{p \int^* f^p \, d\mu} + \frac{\int^* g^q \, d\mu}{q \int^* g^q \, d\mu} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$$

de unde

$$\int^* fg\,d\mu \leqslant \left(\int^* f^p\,d\mu\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int^* g^q\,d\mu\right)^{\frac{1}{q}}.$$

În sfîrșit, dacă f și g nu sînt finite peste tot, din inegalitățile $\int^* f\,d\mu < +\infty$ și $\int^* g^q\,d\mu < +\infty$ rezultă că f^p și g^q, deci f și g sînt finite μ-aproape peste tot, și deci fiecare este echivalentă cu o funcție *finită* peste tot, f_1 respectiv g_1. Atunci

$$\int^* f_1 g_1\,d\mu \leqslant \left(\int^* f_1^p\,d\mu\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int^* g_1^q\,d\mu\right)^{\frac{1}{q}}.$$

Dar $f_1^p \sim f^p$, $g_1^q \sim g^q$ și $f_1 g_1 \sim fg$, deci $\int^* f_1^p\,d\mu = \int^* f^p\,d\mu$, $\int^* g_1^q\,d\mu = \int^* g^q\,d\mu$ și $\int^* f_1 g_1\,d\mu = \int^* fg\,d\mu$ și înlocuind în inegalitatea de mai sus, rezultă inegalitatea dorită și pentru funcțiile f și g.

Inegalitatea lui Minkowski. *Fie μ o măsură pozitivă, f și g două funcții $\geqslant 0$ definite pe T, cu valori finite sau $+\infty$ și $1 \leqslant p < +\infty$. Atunci*

$$\left(\int^* (f+g)^p\,d\mu\right)^{\frac{1}{p}} \leqslant \left(\int^* f^p\,d\mu\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int^* g^p\,d\mu\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Într-adevăr, dacă $p = 1$, avem $\int^* (f+g)\,d\mu \leqslant \int^* f\,d\mu + \int^* g\,d\mu$, deoarece μ^* este subaditivă. Fie $p > 1$. Dacă $\int^* (f+g)^p\,d\mu = 0$ inegalitatea este verificată. Să presupunem deci $0 < \int^* (f+g)^p\,d\mu < +\infty$. Folosind inegalitatea lui Hölder, obținem succesiv:

$$\int^* (f+g)^p\,d\mu = \int^* (f+g)(f+g)^{p-1}\,d\mu \leqslant \int^* f(f+g)^{p-1}\,d\mu +$$

$$+ \int^* g(f+g)^{p-1}\,d\mu \leqslant \left(\int^* f^p\,d\mu\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int^* (f+g)^{q(p-1)}\,d\mu\right)^{\frac{1}{q}} +$$

$$+ \left(\int^* g^p\,d\mu\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int^* (f+g)^{q(p-1)}\,d\mu\right)^{\frac{1}{q}} = \left[\left(\int^* f^p\,d\mu\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int^* g^p\,d\mu\right)^{\frac{1}{p}}\right] \left(\int^* (f+g)^p\,d\mu\right)^{\frac{1}{q}}$$

deoarece $q(p-1) = p$. Împărțind cu $\left(\int^* (f+g)^p\,d\mu\right)^{\frac{1}{q}}$ și observînd că $1 - \frac{1}{q} = \frac{1}{p}$, obținem inegalitatea dorită.

A rămas de considerat cazul cînd

$$\int^* (f + g)^p \, d\mu = + \infty.$$

Vom arăta că în acest caz cel puțin una din integralele $\int^* f^p \, d\mu$, $\int^* g^p \, d\mu$ este egală cu $+ \infty$. Pentru aceasta, să observăm că dacă $0 \leqslant a \leqslant + \infty$, $0 \leqslant b \leqslant + \infty$, atunci

$$(a + b)^p \leqslant 2^p \, (a + b^p).$$

Într-adevăr, presupunînd, de exemplu, că $a \leqslant b$, avem

$$(a + b)^p \leqslant (b + b)^p = 2^p \, b^p \leqslant 2^p \, (a^p + b^p).$$

Pentru fiecare punct $t \in T$ avem atunci

$$(f(t) + g(t))^p \leqslant 2^p \, (f(t)^p + g(t)^p),$$

de unde

$$\int^* (f + g)^p \, d\mu \leqslant 2^p \int^* f^p \, d\mu + 2^p \int^* g \, d\mu.$$

Din faptul că membrul strîng este egal cu $+\infty$, rezultă că cel puțin una din integralele din membrul drept este egală cu $+\infty$.

Dacă, de exemplu, $\int^* f^p \, d\mu = + \infty$, atunci $\left(\int^* f^p \, d\mu \right)^{\frac{1}{p}} = + \infty$ și astfel inegalitatea dorită este verificată cu egalitate.

Cu aceasta, inegalitatea lui Minkowski este demonstrată.

2. Seminormele N_p

Fie μ o măsură pozitivă pe T și E un spațiu Banach (real sau complex).

Pentru orice funcție $\mathbf{f} : T \to E$ și orice număr p astfel încît $1 \leqslant p < + \infty$, folosim notația

$$N_p(\mathbf{f}, \mu) = \left(\int^* |\mathbf{f}|^p \, d\mu \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Cînd nu este pericol de confuzie asupra măsurii μ, vom scrie $N_p(\mathbf{f})$ în loc de $N_p(\mathbf{f}, \mu)$.

Proprietățile funcționalei $N_p(\mathbf{f})$ sînt următoarele:

1) $0 \leqslant N_p(\mathbf{f}) \leqslant + \infty$; $N_p(\mathbf{f}) = 0$ dacă și numai dacă $\mathbf{f}$ este μ-neglijabilă;

2) $N_p(\alpha \mathbf{f}) = |\alpha| N_p(\mathbf{f})$, α scalar;

3) $N_p(\mathbf{f} + \mathbf{g}) \leqslant N_p(\mathbf{f}) + N_p(\mathbf{g})$;

4) $N_p(\mathbf{f}) \leqslant N_p(\mathbf{g})$ dacă $|\mathbf{f}| \leqslant |\mathbf{g}|$ aproape peste tot.

Într-adevăr: proprietatea 1) rezultă din faptul că integrala superioară este *pozitivă* (finită sau $+\infty$), și $|\mathbf{f}(t)|^p = 0$ dacă și numai dacă $\mathbf{f}(t) = 0$; proprietatea 2) rezultă din faptul că integrala superioară μ^* este pozitiv omogenă; proprietatea 3) se deduce din inegalitatea lui Minkowski, observînd că $|\mathbf{f} + \mathbf{g}| \leqslant |\mathbf{f}| + |\mathbf{g}|$ și că μ^* este crescătoare; proprietatea 4) rezultă tot din faptul că μ^* este crescătoare.

Din proprietățile de mai sus rezultă și inegalitatea

5) $|N_p(\mathbf{f}) - N_p(\mathbf{g})| \leqslant N_p(\mathbf{f} - \mathbf{g})$.

Într-adevăr,

$$|\mathbf{f}| = |\mathbf{f} - \mathbf{g} + \mathbf{g}| \leqslant |\mathbf{f} - \mathbf{g}| + |\mathbf{g}|,$$

deci

$$N_p(\mathbf{f}) \leqslant N_p(\mathbf{f} - \mathbf{g}) + N_p(\mathbf{g})$$

de unde

$$N_p(\mathbf{f}) - N_p(\mathbf{g}) \leqslant N_p(\mathbf{f} - \mathbf{g}).$$

Schimbînd $\mathbf{f}$ cu $\mathbf{g}$ obținem

$$N_p(\mathbf{g}) - N_p(\mathbf{f}) \leqslant N_p(\mathbf{f} - \mathbf{g}).$$

Din cele două inegalități deducem

$$|N_p(\mathbf{f}) - N_p(\mathbf{f})| \leqslant N_p(\mathbf{f} - \mathbf{g}).$$

Avem de asemenea egalitatea

6) $N_p(\mathbf{f}) = \sup_K N_p(\mathbf{f}\varphi_K)$, K *compact.*

Într-adevăr, avem $|\mathbf{f}\varphi_K|^p = |\mathbf{f}|^p\ \varphi_K$, deci

$$\int^* |\mathbf{f}|^p\ \varphi_K\, d\mu = \int^* |\mathbf{f}\varphi_K|^p\, d\mu = N_p(\mathbf{f}\varphi_K)^p$$

Atunci

$$N_p(\mathbf{f})^p = \int^* |\mathbf{f}|^p\, d\mu = \sup_K \int^* |\mathbf{f}|^p\ \varphi_K\, d\mu = \sup_K N_p(\mathbf{f}\varphi_K)^p = (\sup_K N_p(\mathbf{f}\varphi_K))^p,$$

de unde

$$N_p(\mathbf{f}) = \sup_K N_p(\mathbf{f}\varphi_K), \quad K \text{ compact.}$$

Pentru orice funcție numerică $f : T \to \overline{R}$, cu valori finite sau infinite, notăm de asemenea.

$$N_p(f) = \left(\int^* |f|^p\, d\mu\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Proprietățile de mai sus rămîn valabile și pentru funcțiile cu valori în $\bar{R}$ cu condiția ca suma $f + g$ din proprietatea 3) sau diferența $f - g$ din proprietatea 5) *să fie definite pe* T.

Pentru funcțiile $f : T \to \bar{R}$ avem următoarea proprietate:

7) *Dacă* $N_p(f) < +\infty$ *pentru un singur* p, $1 \leqslant p < +\infty$, *atunci* $f(t)$ *este finită, aproape peste tot.*

Într-adevăr, $\int^* |f(t)|^p \, d\mu < +\infty$, deci $|f(t)|^p < +\infty$ aproape peste tot; atunci $|f(t)|$ deci și $f(t)$ este finită aproape peste tot.

Inegalitatea lui Holder se scrie acum astfel:

$$\int^* fg \, d\mu \leqslant N_p(f) \, N_q(g)$$

pentru $1 < p, q < +\infty, \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, $f \geqslant 0$, $g \geqslant 0$. Mai departe se va defini $N_\infty(g)$. Se va arăta atunci că inegalitatea lui Hölder rămîne valabilă și în cazul cînd $p = 1$ iar $q = +\infty$.

Lema 2. *Dacă* $0 \leqslant a \leqslant +\infty$, $0 \leqslant b \leqslant +\infty$ *și* $1 \leqslant p < +\infty$ *avem*

$$a^p + b^p \leqslant (a + b)^p.$$

Dacă $a + b = 0$, atunci $a = 0$ și $b = 0$, deci inegalitatea este verificată cu egalitate.

Inegalitatea este de asemenea verificată dacă $a + b = +\infty$. Să presupunem deci $0 < a + b < +\infty$. Atunci

$$\frac{a}{a+b} \leqslant 1 \quad \text{și} \quad \frac{b}{a+b} \leqslant 1,$$

deci

$$\left(\frac{a}{a+b}\right)^p \leqslant \frac{a}{a+b} \quad \text{și} \quad \left(\frac{b}{a+b}\right)^p \leqslant \frac{b}{a+b}.$$

Adunînd aceste inegalități membru cu membru, obținem

$$\left(\frac{a}{a+b}\right)^p + \left(\frac{b}{a+b}\right)^p \leqslant \frac{a}{a+b} + \frac{b}{a+b} = 1.$$

Prin înmulțire cu $(a+b)^p$ obținem inegalitatea dorită.

Din această lemă deducem

Propoziția 1. *Dacă* μ *și* ν *sînt două măsuri pozitive, pentru orice funcție* $f \geqslant 0$ *și* $1 \leqslant p < +\infty$ *avem*

$$N_p(f, \mu+\nu) \leqslant N_p(f, \mu) + N_p(f, \nu) \leqslant 2N_p(f, \mu + \nu).$$

Într-adevăr,

$$(\mu + \nu)^* = \mu^* + \nu^*,$$

deci

$$\int^* |f|^p \, d(\mu + \nu) = \int^* |f|^p \, d\mu + \int^* |f|^p \, d\nu$$

de unde

$$N_p(f, \mu + \nu)^p = N_p(f, \mu)^p + N_p(f, \nu)^p \leqslant (N_p(f, \mu) + N_p(f, \nu))^p$$

deci

$$N_p(f, \mu + \nu) \leqslant N_p(f, \mu) + N_p(f, \nu).$$

Avem apoi $\mu \leqslant \mu + \nu$ și $\nu \leqslant \mu + \nu$, deci

$$\int^* |f|^p \, d\mu \leqslant \int^* |f|^p \, d(\mu + \nu) \text{ și } \int^* |f|^p \, d\nu \leqslant \int^* |f|^p \, d(\mu + \nu)$$

adică

$$N_p(f, \mu) \leqslant N_p(f, \mu + \nu) \text{ și } N_p(f, \nu) \leqslant N_p(f, \mu + \nu)$$

de unde

$$N_p(f, \mu) + N_p(f, \nu) \leqslant 2N_p(f, \mu + \nu)$$

Teorema 1. (*Teorema convexității numărabile*). *Pentru orice șir* (f_n) *de funcții* $\geqslant 0$ (*finite sau infinite*) *definite pe* T, *avem*

$$N_p\left(\sum_{n=1}^{\infty} f_n\right) \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} N_p(f_n).$$

Din proprietatea 3) deducem, prin recurență,

$$N_p\left(\sum_{k=1}^{n} f_k\right) \leqslant \sum_{k=1}^{n} N_p(f_k)$$

pentru orice n natural. Notînd $f = \sum_{n=1}^{\infty} f_n$, avem

$$f = \sup_n \sum_{k=1}^{n} f_k \text{ și } f^p = \sup_n \left(\sum_{k=1}^{n} f_k\right)^p.$$

Șirul $\left(\sum_{k=1}^{n} f_k\right)^p$ este crescător, și deci în baza teoremei 3 din § 5 putem scrie:

$$\int^* f^p \, d\mu = \int^* \sup_n \left(\sum_{k=1}^{n} f_k\right)^p d\mu = \sup_n \int^* \left(\sum_{k=1}^{n} f_k\right)^p d\mu$$

de unde

$$\left(\int^* f^p \, d\mu\right)^{\frac{1}{p}} = \left[\sup_n \int^* \left(\sum_{k=1}^{n} f_k\right)^p d\mu\right]^{\frac{1}{p}} = \sup_n \left[\int^* \left(\sum_{k=1}^{n} f_k\right)^p d\mu\right]^{\frac{1}{p}}$$

prin urmare

$$N_p(f) = \sup_n N_p\left(\sum_{k=1}^{n} f_k\right) \leqslant \sup_n \sum_{k=1}^{n} N_p(f_k) = \sum_{k=1}^{\infty} N_p(f_k).$$

Propoziția 2. *Fie* $\mathbf{f}$ *și* $\mathbf{g}$ *două funcții definite pe* T *cu valori într-un spațiu Banach* E. *Dacă* $\mathbf{f}$ *și* $\mathbf{g}$ *sînt echivalente, atunci* $N_p(\mathbf{f} - \mathbf{g}) = 0$ *pentru* $1 \leqslant p < +\infty$. *Reciproc, dacă* $N_p(\mathbf{f} - \mathbf{g}) = 0$ *pentru un singur* $p \geqslant 1$, *atunci* $\mathbf{f}$ *și* $\mathbf{g}$ *sînt echivalente.*

Într-adevăr, dacă $\mathbf{f}$ și $\mathbf{g}$ sînt echivalente, atunci $\mathbf{f}(t) - \mathbf{g}(t) = 0$, μ-aproape peste tot și de asemenea $|\mathbf{f}(t) - \mathbf{g}(t)|^p = 0$, μ-aproape peste tot. Rezultă atunci că oricare ar fi p astfel ca $1 \leqslant p < +\infty$, avem

$$N_p(\mathbf{f} - \mathbf{g}) = \left(\int^* |\mathbf{f} - \mathbf{g}|^p \, d\mu\right)^{\frac{1}{p}} = 0.$$

Reciproc, dacă $N_p(\mathbf{f}-\mathbf{g}) = 0$ pentru un $p \geqslant 1$, atunci

$$\int^* |\mathbf{f}-\mathbf{g}|^p \, d\mu = 0.$$

deci $|\mathbf{f}-\mathbf{g}|$ și deci și $\mathbf{f}-\mathbf{g}$ este μ -neglijabilă. Rezultă atunci că $\mathbf{f}(t)=\mathbf{g}(t)$, μ -aproape peste tot. Aceasta înseamnă că $\mathbf{f}$ și $\mathbf{g}$ sînt echivalente, și propoziția este demonstrată.

Fie $\mathbf{f}$ și $\mathbf{g}$ două funcții definite pe T cu valori în E sau în $\overline{R}$. Dacă $\mathbf{f}$ și $\mathbf{g}$ sînt echivalente, atunci funcțiile numerice $|\mathbf{f}|^p$ și $|\mathbf{g}|^p$ sînt echivalente și deci

$$\int^* |\mathbf{f}|^p \, d\mu = \int^* |\mathbf{g}|^p \, d\mu$$

de unde $N_p(\mathbf{f}) = N_p(\mathbf{g})$. Așadar, $N_p(\mathbf{f})$ nu depinde decît de clasa $\tilde{\mathbf{f}}$ a lui $\mathbf{f}$. De aceea, punem prin definiție

$$N_p(\tilde{\mathbf{f}}) = N_p(\mathbf{f}).$$

Avem proprietățile următoare:

1) $0 \leqslant N_p(\tilde{\mathbf{f}}) \leqslant +\infty$, $N_p(\tilde{\mathbf{f}}) = 0$ dacă și numai dacă $\tilde{\mathbf{f}} = \tilde{\mathbf{0}}$;
2) $N_p(\alpha\tilde{\mathbf{f}}) = |\alpha| N_p(\tilde{\mathbf{f}})$, α scalar;
3) $N_p(\tilde{\mathbf{f}} + \tilde{\mathbf{g}}) \leqslant N_p(\tilde{\mathbf{f}}) + N_p(\tilde{\mathbf{g}})$, dacă $\mathbf{f}+\mathbf{g}$ este definită pe E.

În plus, rezultă și inegalitatea următoare:

4) $|N_p(\tilde{\mathbf{f}}) - N_p(\tilde{\mathbf{g}})| \leqslant N_p(\tilde{\mathbf{f}}-\tilde{\mathbf{g}})$.

Dacă, acum, $\mathbf{f}$ este o funcție cu valori în E sau în $\overline{R}$, definită μ -*aproape peste tot* pe E, punem $N_p(\mathbf{f}) = N_p(\tilde{\mathbf{f}})$; în acest caz, $N_p(\mathbf{f})$ are aceleași proprietăți ca și pentru funcții definite peste tot.

Observație. Dacă $0 < p < 1$, funcția $N_p(\mathbf{f}) = \left(\int^* N_p |\mathbf{f}|^p \, d\mu\right)^{\frac{1}{p}}$ nu mai este subaditivă, adică inegalitatea $N_p(\mathbf{f}+\mathbf{g}) \leqslant N_p(\mathbf{f}) + N_p(\mathbf{g})$ nu mai este în general adevărată.

3. Spațiile $\mathcal{F}^p$

Fie μ o măsură pozitivă pe T și E un spațiu Banach (real sau complex). Notăm cu $\mathcal{F}_E^p(T, \mu)$ sau $\mathcal{F}_E^p(\mu)$ sau $\mathcal{F}_E^p$ mulțimea funcțiilor $\mathbf{f}: T \to E$ pentru care $N_p(\mathbf{f}) < +\infty$.

Vom scrie $\mathcal{F}^p$ în loc de $\mathcal{F}_R^p$.

Accentuăm că mulțimea $\mathcal{F}_E^p$ (respectiv $\mathcal{F}^p$) este formată din funcții *definite pe întreg spațiul* T (respectiv *definite și finite* pe întreg spațiul T).

Din proprietățile funcției $N_p(\mathbf{f})$ rezultă că $\mathcal{F}_E^p$ este un *spațiu vectorial* (real sau complex, după cum E este un spațiu vectorial real sau complex), iar $N_p(\mathbf{f})$ este o *seminormă* pe acest spațiu.

*) Restricția se impune în cazul funcțiilor numerice cu valori infinite.

Vom considera pe spațiul $\mathcal{F}_E^p$ topologia definită de seminorma N_p, numită *topologia convergenței în medie de ordin p*.

Topologia definită de seminorma N_1 pe spațiul $\mathcal{F}_E^1$ este numită, mai simplu, *topologia convergenței în medie*, iar cea definită pe spațiul $\mathcal{F}_E^2$ de seminorma N_2 este numită *topologia convergenței în medie pătratică*.

Aderența lui 0 în spațiul $\mathcal{F}_E^p$ este subspațiul $\mathcal{N}_E$ al funcțiilor μ-neglijabile (pentru care $N_p(\mathbf{f}) = 0$).

Propoziția 3. *Dacă* $(\mathbf{f}_n)$ *este un șir de funcții din* $\mathcal{F}_E^p$ *convergent în medie de ordin* p *către o funcție* $\mathbf{f} \in \mathcal{F}_E^p$, *atunci*

$$\lim_{n\to\infty} N_p(\mathbf{f}_n) = N_p(\mathbf{f}).$$

Într-adevăr, a spune că $(\mathbf{f}_n)$ converge către $\mathbf{f}$ în medie de ordin p, înseamnă $\lim_{n\to\infty} N_p(\mathbf{f}_n - \mathbf{f}) = 0$. Afirmația rezultă atunci din inegalitatea

$$|N_p(\mathbf{f}_n) - N_p(\mathbf{f})| \leqslant N_p(\mathbf{f}_n - \mathbf{f}).$$

Propoziția 4. *Dacă* $(\mathbf{f}_n)$ *este un șir de funcții din* $\mathcal{F}_E^p$ *astfel ca* $\sum_{n=1}^{\infty} N_p(\mathbf{f}_n) < +\infty$, *atunci*:

1) *seria* $\sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{f}_n(t)$ *este absolut convergentă* (*în* E), *aproape peste tot*;

2) *funcția*

$$\mathbf{f}(t) = \begin{cases} \sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{f}_n(t) & \text{dacă seria este convergentă în } t \\ 0 & \text{dacă seria nu este convergenia în } t \end{cases}$$

aparține spațiului $\mathcal{F}_E^p$;

3) *seria* $\sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{f}_n$ *converge în medie de ordin* p *către* $\mathbf{f}$; *mai precis, pentru orice număr natural* n *avem*

$$N_p\left(\mathbf{f} - \sum_{k=1}^{n} \mathbf{f}_k\right) \leqslant \sum_{k>n} N_p(\mathbf{f}_k).$$

Într-adevăr,

$$N_p\left(\sum_{n=1}^{\infty} |\mathbf{f}_n|\right) \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} N_p(\mathbf{f}_n) < +\infty$$

deci $\sum_{n=1}^{\infty} |\mathbf{f}_n(t)| < +\infty$, μ-aproape peste tot, ceea ce demonstrează punctul 1) Deoarece E este complet, urmează că seria $\sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{f}_n(t)$ este convergentă

(în E), μ -aproape peste tot. Pentru fiecare $t \in T$ avem

$$|\mathbf{f}(t)| \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} |\mathbf{f}_n(t)|$$

de unde

$$N_p(\mathbf{f}) \leqslant N_p\left(\sum_{n=1}^{\infty} |\mathbf{f}_n|\right) < +\infty$$

deci $\mathbf{f} \in \mathcal{F}_E^p$, și prin aceasta punctul 2) este demonstrat. Pentru fiecare n natural avem

$$|\mathbf{f}(t) - \sum_{k \leqslant n} \mathbf{f}_k(t)| \leqslant \sum_{k>n} |\mathbf{f}_k(t)|, \ \mu\text{-aproape peste tot.}$$

Atunci

$$N_p\left(\mathbf{f} - \sum_{k \leqslant n} \mathbf{f}_k\right) \leqslant N_p\left(\sum_{k>n} |\mathbf{f}_k|\right) \leqslant \sum_{k>n} N_p(\mathbf{f}_k).$$

Deoarece seria $\sum_{n=1}^{\infty} N_p(\mathbf{f}_n)$ este convergentă, pentru orice număr $\varepsilon > 0$ există un număr $N(\varepsilon)$, astfel încît oricare ar fi $n \geqslant N(\varepsilon)$ să avem $\sum_{k>n} N_p(\mathbf{f}_k) < \varepsilon$, și deci $N_p\left(\mathbf{f} - \sum_{k \leqslant n} \mathbf{f}_k\right) < \varepsilon$. Aceasta înseamnă că seria $\sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{f}_n$ este convergentă în medie de ordin p către $\mathbf{f}$, și propoziția este complet demonstrată.

Propoziția 5. *Din orice șir Cauchy* $(\mathbf{f}_n)$ *de funcții din* $\mathcal{F}_E^p$ *se poate extrage un subșir* $(\mathbf{f}_{n_k})$ *cu următoarele proprietăți:*

1) $\sum_{k=1}^{\infty} N_p(\mathbf{f}_{n_{k+1}} - \mathbf{f}_{n_k}) < +\infty$;

2) *există o funcție* $g \geqslant 0$ *astfel ca* $N_p(g) < +\infty$ *și* $|\mathbf{f}_{n_k}(t)| \leqslant g(t)$ *pentru orice* $k \in N$ *și orice* $t \in T$.

Deoarece $(\mathbf{f}_n)$ este șir Cauchy în $\mathcal{F}_E^p$, pentru orice număr $\varepsilon > 0$ există un număr $n(\varepsilon)$ astfel încît, oricare ar fi $n \geqslant n(\varepsilon)$ și $m \geqslant n(\varepsilon)$, să avem $N_p(\mathbf{f}_n - \mathbf{f}_m) < \varepsilon$.

Luînd $\varepsilon = \frac{1}{2}$ și $n_1 \geqslant n\left(\frac{1}{2}\right)$, avem

$$N_p(\mathbf{f}_n - \mathbf{f}_{n_1}) < \frac{1}{2} \text{ pentru orice } n \geqslant n\left(\frac{1}{2}\right).$$

Luînd $\varepsilon = \frac{1}{2^2}$ și $n_2 > n\left(\frac{1}{2^2}\right)$ astfel ca $n_2 > n_1$, avem

$$N_p(\mathbf{f}_n - \mathbf{f}_{n_2}) < \frac{1}{2^2} \text{ pentru orice } n \geqslant n\left(\frac{1}{2^2}\right)$$

și

$$N_p(\mathbf{f}_{n_2} - \mathbf{f}_{n_1}) < \frac{1}{2},$$

Să presupunem că am ales $n_k \geqslant n\left(\frac{1}{2^k}\right)$ astfel ca

$$N_p(\mathbf{f}_n - \mathbf{f}_{n_k}) < \frac{1}{2^k} \text{ pentru orice } n \geqslant n\left(\frac{1}{2^k}\right)$$

Luînd $\varepsilon = \frac{1}{2^{k+1}}$ și $n_{k+1} \geqslant n\left(\frac{1}{2^{k+1}}\right)$ astfel ca $n_{k+1} > n_k$, avem

$$N_p(\mathbf{f}_n - \mathbf{f}_{n_{k+1}}) < \frac{1}{2^{k+1}}, \text{ pentru orice } n \geqslant n\left(\frac{1}{2^{k+1}}\right)$$

și

$$N_p(\mathbf{f}_{n_{k+1}} - \mathbf{f}_{n_k}) < \frac{1}{2^k}.$$

Am demonstrat astfel, prin recurență, că putem extrage un subșir $(\mathbf{f}_{n_k})$ cu proprietatea următoare:

$$N_p(\mathbf{f}_{n_{k+1}} - \mathbf{f}_{n_k}) < \frac{1}{2^k}, \text{ pentru orice } k \in N.$$

Atunci

$$\sum_{k=1}^{\infty} N_p(\mathbf{f}_{n_{k+1}} - \mathbf{f}_{n_k}) < \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} < +\infty.$$

Pentru fiecare $t \in T$, să notăm

$$h(t) = \sum_{k=1}^{\infty} |\mathbf{f}_{n_{k+1}}(t) - \mathbf{f}_{n_k}(t)| \leqslant +\infty.$$

Avem

$$N_p(h) = N_p\left(\sum_{k=1}^{\infty} |\mathbf{f}_{n_{k+1}} - \mathbf{f}_{nk}|\right) \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} N_p(\mathbf{f}_{n_{k+1}} - \mathbf{f}_{nk}) < +\infty$$

Notînd $g = h + |\mathbf{f}_{n_1}|$, avem $g \geqslant 0$ și

$$N_p(g) = N_p(h + |\mathbf{f}_{n_1}|) \leqslant N_p(h) + N_p(\mathbf{f}_{n_1}) < +\infty.$$

Pe de altă parte,

$$g = h + |\mathbf{f}_{n_1}| = \sum_{k=1}^{\infty} |\mathbf{f}_{n_{k+1}} - \mathbf{f}_{n_k}| + |\mathbf{f}_{n_1}| \geqslant \sum_{k<i} |\mathbf{f}_{n_{k+1}} - \mathbf{f}_{n_k}| + |\mathbf{f}_{n_1}| \geqslant$$

$$\geqslant \sum_{k<i} [|\mathbf{f}_{n_{k+1}}| - |\mathbf{f}_{n_k}|] + |\mathbf{f}_{n_1}| = |\mathbf{f}_{n_i}|$$

de unde rezultă că $|\mathbf{f}_{n_i}| \leqslant g$ pentru orice $i \in N$, adică $|\mathbf{f}_{n_i}(t)| \leqslant g(t)$ pentru orice $i \in N$ și orice $t \in T$, și propoziția este demonstrată.

Observație. Dacă funcțiile $(\mathbf{f}_n)$ sînt *continue*, atunci funcția g se poate alege astfel încît să fie *semicontinuă inferior*.

Într-adevăr, cu notațiile din demonstrația propoziției 5, funcția h este semicontinuă inferior și deci funcția $g = h + |\mathbf{f}_{n_1}|$ este de asemenea semicontinuă inferior.

Teorema 2. *Spațiul $\mathcal{F}_E^p$ este complet.*

Fie $(\mathbf{f}_n)$ un șir Cauchy de funcții din $\mathcal{F}_E^p$. Conform propoziției 5, există un subșir $(\mathbf{f}_{n_k})$ astfel ca

$$\sum_{k=1}^{\infty} N_p(\mathbf{f}_{n_{k+1}} - \mathbf{f}_{n_k}) < +\infty.$$

Din propoziția 4 rezultă că există o funcție $\mathbf{f} \in \mathcal{F}_E^p$ astfel încît seria

$$\sum_{k=1}^{\infty} [\mathbf{f}_{n_{k+1}}(t) - \mathbf{f}_{n_k}(t)]$$

converge către $\mathbf{f}(t)$, μ-aproape peste tot, și în medie de ordin p:

$$\lim_{i\to\infty} N_p(\mathbf{f} - \sum_{k<i} [\mathbf{f}_{n_{k+1}} - \mathbf{f}_{n_k}] = 0.$$

Dar

$$\mathbf{f} - \sum_{k<i} [\mathbf{f}_{n_{k+1}} - \mathbf{f}_{n_k}] = \mathbf{f} - (\mathbf{f}_{n_2} - \mathbf{f}_{n_1}) - (\mathbf{f}_{n_3} - \mathbf{f}_{n_2}) - \ldots - (\mathbf{f}_{n_i} - \mathbf{f}_{n_{i-1}}) =$$

$$= \mathbf{f} + \mathbf{f}_{n_1} - \mathbf{f}_{n_i}$$

deci

$$\lim_{i\to\infty} N_p(\mathbf{f} + \mathbf{f}_{n_1} - \mathbf{f}_{n_i}) = 0.$$

Aceasta înseamnă că subșirul $(\mathbf{f}_{n_i})$ al șirului Cauchy $(\mathbf{f}_n)$,converge μ-aproape peste tot și în medie de ordin p către funcția $\mathbf{f} + \mathbf{f}_{n_1} \in \mathcal{F}_E^p$. Rezultă atunci că șirul Cauchy $(\mathbf{f}_n)$ converge de asemenea în medie de ordin p către $\mathbf{f} + \mathbf{f}_{n_1}$ și teorema este demonstrată.

Din demonstrația acestei teoreme și din propoziția 5 rezultă

Propoziția 6. *Pentru orice șir Cauchy $(\mathbf{f}_n)$ de funcții din $\mathcal{F}_E^p$ există un subșir $(\mathbf{f}_{n_k})$, convergent μ-aproape peste tot și în medie de ordin p către o funcție din $\mathcal{F}_E^p$, și o funcție $g \geqslant 0$ astfel încît $N_p(g) < +\infty$ și $|\mathbf{f}_{n_k}(t)| \leqslant g(t)$ pentru orice k și orice $t \in T$.*

Propoziția 7. *Fie $(\mathbf{f}_n)$ un șir de funcții din $\mathcal{F}_E^p$. Dacă toate funcțiile $(\mathbf{f}_n)$ au suporturile conținute în aceeași mulțime compactă $K \subset T$ și dacă șirul $(\mathbf{f}_n)$ converge uniform către o funcție $\mathbf{f}_0$, atunci $\mathbf{f}_0 \in \mathcal{F}_E^p$ și $(\mathbf{f}_n)$ converge către $\mathbf{f}_0$ în medie de ordin p.*

Într-adevăr, fie $\varepsilon > 0$; există un indice $n(\varepsilon)$, astfel încît pentru orice $n > n(\varepsilon)$ să avem

$$|\mathbf{f}_n(t) - \mathbf{f}_0(t)| < \varepsilon, \text{ oricare ar fi } t \in T.$$

Deoarece $\mathbf{f}_n$ au suporturile conținute în K, urmează că și limita $\mathbf{f}_0$ are suportul conținut în K. Așadar pentru $t \notin K$ avem

$$|\mathbf{f}_n(t) - \mathbf{f}_0(t)| = 0.$$

Fie φ o funcție *continuă cu suport compact* definită pe T cu valori în $[0, 1]$, astfel ca $\varphi(t) = 1$ pentru $t \in K$. Atunci

$$|\mathbf{f}_n(t) - \mathbf{f}_0(t) \leqslant \varepsilon\varphi(t), \quad \text{pentru } t \in T$$

și deci

$$N_p(\mathbf{f}_n - \mathbf{f}_0) \leqslant \varepsilon N_p(\varphi) < +\infty.$$

Urmează pe de o parte că

$$N_p(\mathbf{f}_0) \leqslant N_p(\mathbf{f}_n - \mathbf{f}_0) + N_p(\mathbf{f}_n) < +\infty$$

deci $\mathbf{f}_0 \in \mathcal{F}_E^p$, iar pe de altă parte

$$\lim_{n\to\infty} N_p(\mathbf{f}_n - \mathbf{f}_0) = 0$$

și cu aceasta propoziția este demonstrată.

Observație. Propoziția afirmă că pe mulțimea funcțiilor $\mathbf{f} \in \mathcal{F}_E^p$ care au suportul conținut într-o aceeași mulțime compactă $K \subset T$, topologia convergenței uniforme este mai fină decît topologia convergenței în medie de ordin p.

Propoziția 8. *Dacă* μ *și* ν *sînt două măsuri pozitive și dacă* $\mu \geqslant \nu$, *atunci* $\mathcal{F}_E^p(\mu) \subset \mathcal{F}_E^p(\nu)$ *și topologia spațiului* $\mathcal{F}_E^p(\mu)$ *este mai fină decît topologia indusă de spațiul* $\mathcal{F}_E^p(\nu)$.

Într-adevăr, $\mu^* \geqslant \nu^*$, deci pentru orice funcție $\mathbf{f} : T \to E$ avem

$$\int^* |\mathbf{f}|^p \, d\mu \geqslant \int^* |\mathbf{f}|^p \, d\nu$$

de unde

$$N_p(\mathbf{f}, \mu) \geqslant N_p(\mathbf{f}, \nu).$$

Din această inegalitate rezultă că $\mathcal{F}_E^p(\mu) \subset \mathcal{F}_E^p(\nu)$ și că pe $\mathcal{F}_E^p(\mu)$, topologia convergenței în medie de ordin p pentru măsura μ este mai fină decît topologia convergenței în medie de ordin p pentru ν.

Propoziția 9. *Dacă* μ *și* ν *sînt două măsuri pozitive și* $\alpha > 0$, *atunci* :

1) $\mathcal{F}_E^p(\alpha\mu) = \mathcal{F}_E^p(\mu)$;

2) $\mathcal{F}_E^p(\mu + \nu) = \mathcal{F}_E^p(\mu) \cap \mathcal{F}_E^p(\nu)$.

Propoziția rezultă din relațiile

$$N_p(\alpha\mathbf{f}) = \alpha N_p(\mathbf{f})$$

și

$$N_p(\mathbf{f}, \mu + \nu) \leqslant N_p(\mathbf{f}, \mu) + N_p(\mathbf{f}, \nu) \leqslant 2N_p(\mathbf{f}, \mu + \nu).$$

4. Spațiile $\mathcal{L}^p$

Fie μ o măsură pozitivă pe T și E un spațiu Banach (real sau complex). Spațiul $\mathcal{K}_E(T)$ al aplicațiilor $\mathbf{f} : T \to E$ continue cu suport compact este conținut în fiecare spațiu $\mathcal{F}_E^p$, $(1 \leqslant p < +\infty)$.

Într-adevăr, dacă $\mathbf{f} \in \mathcal{K}_E(T)$, atunci $|\mathbf{f}| \in \mathcal{K}(T)$, deci $|\mathbf{f}|^p \in \mathcal{K}(T)$ și deci

$$N_p(\mathbf{f}) = \left(\int |\mathbf{f}|^p \, d\mu \right)^{\frac{1}{p}} < +\infty.$$

Vom nota cu $\mathcal{L}_E^p(T, \mu)$ sau $\mathcal{L}_E^p(\mu)$ sau $\mathcal{L}_E^p$ închiderea spațiului $\mathcal{K}_E(T)$ în spațiul $\mathcal{F}_E^p$ și cu $L_E^p(T, \mu)$ sau $L_E^p(\mu)$ sau L_E^p spațiul cît $\mathcal{L}_E^p / \mathcal{N}_E$ al spațiului $\mathcal{L}_E^p$ prin subspațiul $\mathcal{N}_E$ al funcțiilor μ-neglijabile.

În loc de $\mathcal{L}_R^p$ și L_R^p vom scrie $\mathcal{L}^p$ respectiv L^p. Spațiul $\mathcal{L}_E^p$ este *spațiu vectorial* real sau complex după cum E este real sau complex.

Deoarece funcția identic egală cu 0 este continuă cu suport compact (suportul este vid), iar aderența acestei funcții în spațiul $\mathcal{F}_E^p$ este mulțimea $\mathcal{N}_E$ a funcțiilor neglijabile, rezultă că orice funcție μ-neglijabilă $\mathbf{f} : T \to E$ aparține spațiului $\mathcal{L}_E^p$ oricare ar fi p, cu $1 \leqslant p < +\infty$.

Să remarcăm că funcțiile din $\mathcal{L}_E^p$ (respectiv $\mathcal{L}^p$) sînt definite (respectiv definite și *finite*) pe *întreg spațiul* T.

Funcțiile din $\mathcal{L}_E^1$ sînt numite *funcții integrabile* în raport cu μ sau funcții μ-integrabile.

Funcțiile $\mathbf{f}$ din $\mathcal{L}_E^p$ sînt numite *funcții de putere p integrabilă* sau funcții p-integrabile. Această denumire va fi justificată mai departe de faptul că dacă $\mathbf{f} \in \mathcal{L}_E^p$, atunci funcția numerică $|\mathbf{f}|^p$ este integrabilă (corolarul 2 al teoremei 6).

Prin extensiune, vom numi funcție p-integrabilă, orice funcție cu valori în E (respectiv $\overline{R}$) definită *aproape peste tot* pe T (respectiv definită și *finită aproape peste tot* pe T) echivalentă cu o funcție $\mathbf{f} \in \mathcal{L}_E^p$ (respectiv $\mathbf{f} \in \mathcal{L}^p$).

Majoritatea rezultatelor de mai jos, enunțate pentru funcții din $\mathcal{L}_E^p$ (respectiv $\mathcal{L}^p$) rămîn adevărate dacă se enunță pentru funcții p-integrabile, definite (respectiv definite și finite) aproape peste tot pe T.

Orice funcție $\mathbf{f} : T \to E$, echivalentă cu o funcție din $\mathcal{L}_E^p$ aparține de asemenea lui $\mathcal{L}_E^p$.

Propoziția 10. *Spațiul* $\mathcal{K}_E(T)$ *este dens în fiecare spațiu* $\mathcal{L}_E^p$, $(1 \leqslant p < +\infty)$: *pentru orice funcție* $\mathbf{f} \in \mathcal{L}_E^p$ *și orice* $\varepsilon > 0$ *există o funcție* $\mathbf{g} \in \mathcal{K}_E(T)$ *astfel încît* $N_p(\mathbf{f} - \mathbf{g}) < \varepsilon$.

Teorema 3. *Spațiul* $\mathcal{L}_E^p$ *este complet. Spațiul* L_E^p *este un spațiu Banach.*

Într-adevăr, $\mathcal{L}_E^p$ este închis în spațiul complet $\mathcal{F}_E^p$ deci și $\mathcal{L}_E^p$ este complet. Atunci spațiul cît $L_E^p / \mathcal{N}_E$ este de asemenea complet. Deoarece $N_p(\tilde{\mathbf{f}})$ este o normă pe L_E^p, rezultă că L_E^p este un spațiu Banach.

În continuare, norma $N_p(\tilde{\mathbf{f}})$ va fi notată de asemenea cu $\|\tilde{\mathbf{f}}\|_p$.

Propoziția 11. *Pentru orice șir* $(\mathbf{f}_n)$ *de funcții din* $\mathcal{L}_E^p$ *convergent în medie de ordin p către o funcție* $\mathbf{f} \in \mathcal{L}_E^p$, *există un subșir* $(\mathbf{f}_{n_k})$ *convergent* μ*-aproape peste tot către* $\mathbf{f}$, *și o funcție* $g \geqslant 0$ *astfel încît* $N_p(g) < +\infty$ *și* $|\mathbf{f}_{n_k}(t)| \leqslant g(t)$ *pentru orice k și orice* $t \in T$.

Deoarece șirul $(\mathbf{f}_n)$ este convergent (în $\mathcal{L}_E^p$), el este un șir Cauchy de funcții în $\mathcal{F}_E^p$. Conform propoziției 5, există un subșir $(\mathbf{f}_{n_k})$, convergent

în medie de ordin p și aproape peste tot către o funcție $\mathbf{h} \in \mathcal{F}_E^p$ și o funcție $g \geqslant 0$ astfel încît $N_p(g) < +\infty$ și $|\mathbf{f}_{n_k}(t)| \leqslant g(t)$ pentru orice k și orice $t \in T$.

Dar $(\mathbf{f}_{n_k})$ converge în medie de ordin p către $\mathbf{f}$ ca subșir al șirului $(\mathbf{f}_n)$. Urmează că $N_p(\mathbf{f} - \mathbf{h}) = 0$, adică funcțiile $\mathbf{f}$ și $\mathbf{h}$ sînt echivalente și deci $(\mathbf{f}_{n_k})$ converge μ-aproape peste tot către $\mathbf{f}$.

Corolar. *Dacă* $(\mathbf{f}_n)$ *este un șir convergent în spațiul* $\mathcal{L}_E^p$ *și dacă* $(\mathbf{f}_n(t))$ *are o limită* $\mathbf{f}(t) \in E$ *aproape peste tot, atunci funcția* $\mathbf{f}$ *(definită aproape peste tot) este p-integrabilă iar* $(\mathbf{f}_n)$ *converge și în medie de ordin p către* $\mathbf{f}$.

Într-adevăr, există un subșir $(\mathbf{f}_{n_k})$ convergent aproape peste tot și în medie de ordin p către o funcție $\mathbf{h} \in \mathcal{L}_E^p$. Rezultă că șirul Cauchy $(\mathbf{f}_n)$ converge în medie de ordin p către $\mathbf{h}$.

Deoarece $(\mathbf{f}_n)$ converge aproape peste tot către $\mathbf{f}$, urmează că subșirul $(\mathbf{f}_{n_k})$ converge către $\mathbf{f}$ aproape peste tot, deci $\mathbf{f}(t) = \mathbf{h}(t)$, aproape peste tot.

Rezultă că $\mathbf{f}$ este p-integrabilă și că $(\mathbf{f}_n)$ converge către $\mathbf{f}$ în medie de ordin p.

Propoziția 12. *Fie* $\mathcal{A}$ *o submulțime densă în* $\mathcal{L}_E^p$. *Pentru orice funcție* $\mathbf{f} \in \mathcal{L}_E^p$ *există un șir* $(\mathbf{f}_n)$ *de funcții din* $\mathcal{A}$, *convergent către* $\mathbf{f}$ *în medie de ordin p și aproape peste tot, și o funcție* $g \geqslant 0$ *astfel încît* $N_p(g) < +\infty$ *și* $|\mathbf{f}_n(t)| \leqslant g(t)$ *pentru orice n și orice* $t \in T$.

Într-adevăr, pentru orice n natural, există o funcție $\mathbf{h}_n \in \mathcal{A}$ astfel încît $N_p(\mathbf{h}_n - \mathbf{f}) < \frac{1}{n}$. Atunci șirul $(\mathbf{h}_n)$ este format din funcții din $\mathcal{A}$ și converge în medie de ordin p către $\mathbf{f}$. Conform propoziției 11, șirul $(\mathbf{h}_n)$ conține un subșir $(\mathbf{f}_n)$ convergent aproape peste tot și în medie de ordin p către $\mathbf{f}$, și există o funcție $g \geqslant 0$ astfel încît $N_p(g) < +\infty$ și $|\mathbf{f}_n(t)| \leqslant g(t)$ pentru orice n și orice $t \in T$.

Corolar. *Pentru orice funcție* $\mathbf{f} \in \mathcal{L}_E^p$ *există un șir* $(\mathbf{f}_n)$ *de funcții din* $\mathcal{K}_E(T)$, *convergent către* $\mathbf{f}$ *în medie de ordin p și aproape peste tot și o funcție semicontinuă inferior* $g \geqslant 0$, *astfel încît* $N_p(g) < +\infty$ *și* $|\mathbf{f}_n(t)| \leqslant g(t)$ *pentru orice n și orice* $t \in T$.

Într-adevăr, $\mathcal{K}_E(T)$ este un subspațiu dens în $\mathcal{L}_E^p$. Faptul că funcția g poate fi aleasă astfel încît să fie semicontinuă inferior rezultă din observația care urmează propoziției 5.

Observație. Mai departe (prop. 23, § 8) vom arăta că funcțiile boreliene etajate sînt p-integrabile și formează o submulțime densă în $\mathcal{L}_E^p$. Va rezulta atunci că orice funcție din $\mathcal{L}_E^p$ se poate aproxima aproape peste tot și în medie de ordin p prin funcții boreliene etajate.

5. Relații între spațiile $\mathcal{L}_E^p(\mu)$ și $\mathcal{L}_F^p(\mu)$

Propoziția 13. *Combinațiile liniare* $\sum_{i=1}^{n} a_i \varphi_i$ *de funcții pozitive* φ_i *continue cu suport compact, cu coeficienți* a_i *din* E, *formează un subspațiu dens în* $\mathcal{L}_E^p$.

Într-adevăr, orice funcție $\mathbf{f} \in \mathcal{K}_E(T)$ poate fi aproximată uniform cu funcții de forma $\sum_i a_i \varphi_i$, unde $a_i \in E$ iar φ_i sînt funcții din $\mathcal{K}_+(T)$, cu suportul conținut într-o vecinătate compactă fixă a suportului lui $\mathbf{f}$. Aceasta înseamnă că funcțiile de forma $\sum_i a_i \varphi_i$, $\varphi_i \in \mathcal{K}(T)$, $a_i \in E$, formează o submulțime a lui $\mathcal{K}_E(T)$ densă în $\mathcal{K}_E(T)$ pentru topologia convergenței uniforme, și deci și pentru topologia mai puțin fină a convergenței în medie de ordin p; cum $\mathcal{K}_E(T)$ este dens în $\mathcal{L}_E^p$ pentru ultima topologie, rezultă că mulțimea funcțiilor de forma $\sum a_i \varphi_i$ este densă în $\mathcal{L}_E^p$ pentru această topologie.

Corolar *Combinațiile liniare* $\sum_{i=1}^n a_i \varphi_i$ *de funcții pozitive din* $\mathcal{L}^p$ *cu coeficienți* a_i *din* E, *formează un subspațiu dens în* $\mathcal{L}_E^p$.

Fie funcția $\mathbf{f} = \sum_{i=1}^n a_i \varphi_i$, $\varphi_i \in \mathcal{L}^p$, $a_i \in E$, și fie $\varepsilon > 0$. Pentru fiecare i există o funcție $\psi_i \in \mathcal{K}(T)$ astfel ca $N_p(\varphi_i - \psi_i) < \frac{\varepsilon}{A}$, unde $A > 0$ este ales astfel ca $\sum_{i=1}^n |a_i| < A$. Atunci funcția $\mathbf{g} = \sum_{i=1}^n a_i \psi_i$ aparține spațiului $\mathcal{K}_E(T)$, și

$$N_p(\mathbf{f} - \mathbf{g}) = N_p\left(\sum_{i=1}^n a_i(\varphi_i - \psi_i)\right) \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{i=1}^n |a_i| N_p(\varphi_i - \psi_i) \leqslant \sum_{i=1}^n |a_i| \frac{\varepsilon}{A} \leqslant \varepsilon$$

deci $\mathbf{f} \in \mathcal{L}_E^p$.

Deoarece funcțiile $\sum_{i=1}^n a_i \varphi_i$, $a_i \in E$, $\varphi_i \in \mathcal{L}^p$, conțin funcțiile de aceeași formă, cu $\varphi_i \in \mathcal{K}(T)$, și deoarece acestea sînt dense în $\mathcal{L}_E^p$, urmează că și primele sînt dense în $\mathcal{L}_E^p$.

Teorema 4. *Fie* E *și* F *două spații Banach, și* $U : E \to F$ *o aplicație liniară și continuă. Pentru orice funcție* $\mathbf{f} \in \mathcal{L}_E^p$, *funcția compusă* $U \circ \mathbf{f}$ *aparține spațiului* $\mathcal{L}_F^p$.

Într-adevăr, fie $\mathbf{f} \in \mathcal{L}_E^p$ și $\varepsilon > 0$; există o funcție $\mathbf{g} \in \mathcal{K}_E(T)$ astfel ca $N_p(\mathbf{g} - \mathbf{f}) < \varepsilon$. Dar pentru orice $t \in T$ avem

$$|(U \circ \mathbf{f})(t) - (U \circ \mathbf{g})(t)| = |U(\mathbf{f}(t)) - U(\mathbf{g}(t))| = |U[\mathbf{f}(t) - \mathbf{g}(t)]| \leqslant$$

$$\leqslant \|U\| |\mathbf{f}(t) - \mathbf{g}(t)|$$

și deci

$$N_p(U \circ \mathbf{f} - U \circ \mathbf{g}) \leqslant \|U\| N_p(\mathbf{f} - \mathbf{g}) \leqslant \varepsilon \|U\|.$$

Cum $U \circ \mathbf{f} \in \mathcal{K}_F(T)$, rezultă că $U \circ \mathbf{f} \in \mathcal{K}_F$, și teorema este demonstrată.

Corolar. *Pentru orice funcție* $\mathbf{f} \in \mathcal{L}_E^p$ *și orice element* $a' \in E'$, *funcția scalară* $t \to < \mathbf{f}(t), a' >$ *aparține spațiului* $\mathcal{L}^p$ *sau* $\mathcal{L}_C^p$, *după cum* E *este un spațiu Banach real sau complex.*

Într-adevăr, a' este o aplicație liniară și continuă a lui E în R respectiv C.

Propoziția 14. *Dacă* $\mathbf{f} \in \mathcal{L}_E^p$, *atunci* $|\mathbf{f}| \in \mathcal{L}^p$ *și aplicația* $\mathbf{f} \to |\mathbf{f}|$ *este uniform continuă (pentru topologia convergenței în medie de ordin* p*).*

Într-adevăr, fie $\mathbf{f} \in \mathcal{L}_E^p$ și $\varepsilon > 0$; există o funcție $\mathbf{g} \in \mathcal{K}_E(T)$ astfel ca $N_p(\mathbf{f} - \mathbf{g}) < \varepsilon$. Atunci $|\mathbf{f}| \in \mathcal{K}_+(T)$ și deoarece $||\mathbf{f}| - |\mathbf{g}|| \leqslant |\mathbf{f} - \mathbf{g}|$ avem $N_p(|\mathbf{f}| - |\mathbf{g}|) < \varepsilon$, de unde deducem că $|\mathbf{f}| \in \mathcal{L}^p$. Faptul că aplicația $\mathbf{f} \to |\mathbf{f}|$ este uniform continuă, rezultă din inegalitatea

$$N_p(|\mathbf{f}_1| - |\mathbf{f}_2|) \leqslant N_p(\mathbf{f}_1 - \mathbf{f}_2), \quad \mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2 \in \mathcal{L}_E^p.$$

6. Relații între spațiile $\mathcal{L}_E^p(\mu)$ și $\mathcal{L}_E^p(\nu)$

Propoziția 15. *Fie* μ *și* ν *două măsuri pozitive. Dacă* $\mu \geqslant \nu$, *atunci* $\mathcal{L}_E^p(\mu) \subset \mathcal{L}_E^p(\nu)$, $1 \leqslant p < +\infty$, *și topologia spațiului* $\mathcal{L}_E^p(\mu)$ *este mai fină decît topologia indusă pe* $\mathcal{L}_E^p(\mu)$ *de topologia spațiului* $\mathcal{L}_E^p(\nu)$.

Din inegalitatea $\mu^* \geqslant \nu^*$ deducem

$$N_p(\mathbf{f}, \mu) \geqslant N_p(\mathbf{f}, \nu)$$

Dacă $\mathbf{f} \in \mathcal{L}_E^p(\nu)$, există un șir $(\mathbf{g}_n)$ de funcții din $\mathcal{K}_E(T)$ astfel încît să avem

$$\lim_{n \to \infty} N_p(\mathbf{f} - \mathbf{g}_n, \mu) = 0.$$

Atunci

$$\lim_{n \to \infty} N_p(\mathbf{f} - \mathbf{g}_n, \nu) = 0,$$

deci $\mathbf{f} \in \mathcal{L}_E^p(\nu)$. Așadar $\mathcal{L}_E^p(\mu) \subset \mathcal{L}_E^p(\nu)$.

Afirmația relativă la topologii rezultă tot din inegalitatea

$$N_p(\mathbf{f}, \mu) \geqslant N_p(\mathbf{f}, \nu).$$

Propoziția 16. *Dacă* μ *este o măsură pozitivă și* $\alpha > 0$, *atunci* $\mathcal{L}_E^p(\alpha\mu) = \mathcal{L}_E^p(\mu)$, $1 \leqslant p < +\infty$, *și topologiile celor două spații sînt echivalente.*

Într-adevăr, avem

$$N_p(\mathbf{f}, \alpha\mu) = \alpha N_p(\mathbf{f}, \mu).$$

Observație. Se va arăta mai departe (prop. 5, § 11) că dacă μ și ν sînt două măsuri pozitive, atunci

$$\mathcal{L}_E^p(\mu + \nu) = \mathcal{L}_E^p(\mu) \cap \mathcal{L}_E^p(\nu).$$

Din propoziția 15 putem deduce doar incluziunea

$$\mathcal{L}_E^p(\mu + \nu) \subset \mathcal{L}_E^p(\mu) \cap \mathcal{L}_E^p(\nu)$$

(deoarece $\mu + \nu \geqslant \mu$ și $\mu + \nu \geqslant \nu$).

7. Funcții reale p-integrabile

Propoziția 17. *O funcție reală f definită pe T aparține spațiului $\mathcal{L}^p$ dacă și numai dacă funcțiile f^+ și f^- aparțin spațiului $\mathcal{L}^p$.*

Într-adevăr, dacă $f \in \mathcal{L}$, atunci $|f| \in \mathcal{L}^p$, și deci funcția $f^+ = \frac{1}{2}(|f| + f)$ și funcția $f^- = \frac{1}{2}(|f| - f)$ aparțin lui $\mathcal{L}^p$. Reciproc, dacă f^+ și f^- aparțin spațiului $\mathcal{L}^p$, atunci $f = f^+ - f^- \in \mathcal{L}^p$.

Corolar. *Anvelopa superioară și anvelopa inferioară a unei familii finite de funcții din $\mathcal{L}^p$, aparțin lui $\mathcal{L}^p$.*

Într-adevăr,

$$\sup(f, g) = \frac{1}{2}(f + g + |f - g|),$$

$$\inf(f, g) = \frac{1}{2}(f + g - |f - g|).$$

Dacă $f, g \in \mathcal{L}^p$, atunci $f + g \in \mathcal{L}^p$ și $|f - g| \in \mathcal{L}^p$ de unde rezultă că $\sup(f, g)$ și $\inf(f, g)$ aparțin de asemenea lui $\mathcal{L}^p$. Se demonstrează apoi prin inducție completă că afirmația rămîne adevărată pentru orice familie finită de funcții din $\mathcal{L}^p$.

Propoziția 18. *Fie f o funcție numerică, finită sau infinită, definită aproape peste tot pe T. Dacă pentru fiecare număr $\varepsilon > 0$, există două funcții p-integrabile g și h astfel ca $g \leqslant f \leqslant h$, μ-aproape peste tot și $N_p(h - g) < \varepsilon$, atunci f este p-integrabilă.*

Într-adevăr, deoarece g și h sînt p-integrabile, sînt finite aproape peste tot; din inegalitățile $g \leqslant f \leqslant h$ rezultă că și f este finită aproape peste tot.

Fie f_1, g_1, h_1 trei funcții definite și finite peste tot echivalente respectiv cu f, g, h.

Urmează că g_1 și h_1 sînt p-integrabile, deci $g_1, h_1 \in \mathcal{L}^p$. Avem $N_p(h_1 - g_1) < \varepsilon$ și $g_1 \leqslant f_1 \leqslant h_1$ aproape peste tot, deci $0 \leqslant f_1 - g_1 \leqslant h_1 - g_1$ aproape peste tot. Urmează că

$$N_p(f_1 - g_1) \leqslant N_p(h_1 - g_1) < \varepsilon \quad \text{și} \quad N_p(f_1) \leqslant N_p(h_1) < +\infty.$$

Așadar $f_1 \in \mathcal{F}^p$ și se poate aproxima în medie de ordin p cu funcții din $\mathcal{L}^p$. Deoarece $\mathcal{L}^p$ este închis, deducem că $f_1 \in \mathcal{L}^p$. Din relația $f \sim f_1$, rezultă că f este p-integrabilă, și propoziția este demonstrată.

Lema 3. *Dacă $0 \leqslant \beta \leqslant \alpha \leqslant +\infty$ și dacă β este finit, atunci*

$$(\alpha - \beta)^p \leqslant \alpha^p - \beta^p.$$

Într-adevăr, $\alpha - \beta \geqslant 0$ și notînd $a = \alpha - \beta$, și $b = \beta$, din lema 2 deducem

$$(\alpha - \beta)^p + \beta^p \leqslant (\alpha - \beta + \beta)^p = \alpha^p,$$

de unde rezultă inegalitatea de demonstrat.

Propoziția 19. *Dacă f și g sînt două funcții $\geqslant 0$ din $\mathcal{L}^p$ și dacă $f \geqslant g$, atunci*

$$(N_p(f-g))^p \leqslant (N_p(f))^p - (N_p(g))^p.$$

Din lema de mai sus deducem $(f-g)^p \leqslant f^p - g^p$. Dacă f și g sînt continue cu suport compact, atunci funcțiile $(f-g)^p$, f^p și g^p sînt de asemenea continue cu suport compact. Din faptul că integrala funcțiilor continue cu suport compact este crescătoare, deducem

$$\int (f-g)^p \, d\mu \leqslant \int f^p \, d\mu - \int g^p \, d\mu$$

adică

$$(N_p(f-g))^p \leqslant (N_p(f))^p - (N_p(g))^p.$$

Să presupunem acum că f și g sînt două funcții oarecare din $\mathcal{L}^p$ astfel ca $f \geqslant g \geqslant 0$. Avem $f-g \geqslant 0$ și $f-g \in \mathcal{L}^p$. Există atunci două șiruri (g_n) și (h_n) de funcții $\geqslant 0$, continue cu suport compact, convergente în medie de ordin p respectiv către g și $f-g$. Funcțiile $f_n = g_n + h_n$ sînt $\geqslant 0$, continue cu suport compact și

$$\lim_{n\to\infty} f_n = \lim_{n\to\infty} g_n + \lim_{n\to\infty} h_n = g + f - g = f,$$

limita fiind în sensul convergenței în medie de ordin p. Avem de asemenea $f_n \geqslant g_n$ pentru orice n. Din prima parte a demonstrației rezultă că

$$(N_p(f_n - g_n))^p \leqslant (N_p(f_n))^p - (N_p g_n))^p.$$

Observînd că șirul $(f_n - g_n)$ tinde în medie de ordin p către $f-g$, și trecînd la limită în ultima inegalitate, obținem

$$(N_p(f-g))^p \leqslant (N_p(f))^p - (N_p(g))^p.$$

Propoziția 20. *Orice funcție $f \geqslant 0$ din $\mathcal{L}^p(\mu)$ este nulă pe complementara reuniunii unui șir de mulțimi compacte și a unei mulțimi neglijabile.*

Într-adevăr, fie $f \geqslant 0$ o funcție din $\mathcal{L}^p$. Avem

$$N_p(f) = \sup_K N_p(f\varphi_K), \quad K \text{ compact.}$$

Există deci un șir crescător (K_n) de mulțimi compacte, astfel încît să avem,

$$N_p(f) = \sup_n N_p(f\varphi_{K_n}) = \lim_{n\to\infty} N_p(f\,\varphi_{K_n}).$$

Notînd $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} K_n$ și $f' = f\varphi_A$, avem

$$f - f' = f - f\varphi_A \leqslant f - f\,\varphi_{K_n}, \text{ pentru fiecare } n,$$

deci

$$N_p(f-f') \leqslant N_p(f - f\,\varphi_{K_n}).$$

Din propoziția precedentă deducem

$$N_p(f - f\varphi_{K_n})^p \leqslant N_p(f)^p - N_p(f\varphi_{K_n})^p$$

de unde

$$\lim_{n\to\infty} N_p(f - f\varphi_{K_n}) = 0 .$$

Rezultă atunci că $N_p(f-f') = 0$, deci $f - f'$ este μ-neglijabilă, adică f și f' sînt echivalente. Urmează că f se anulează pe complementara reuniunii lui A cu o mulțime neglijabilă.

Teorema 5. *Fie (f_n) un șir crescător de funcții din $\mathcal{L}^p$ și $f = \sup_n f_n$. Funcția f este p-integrabilă dacă și numai dacă $\sup_n N_p(f_n) < +\infty$. În acest caz, șirul (f_n) converge către f în medie de ordin p. Dacă funcțiile f_n sînt $\geqslant 0$, atunci*

$$N_p(\sup_n f_n) = \sup_n N_p(f_n) = \lim_{n\to\infty} N_p(f_n).$$

Să presupunem mai întîi că $f_n \geqslant 0$ pentru orice $n \in N$. Dacă f este p-integrabilă, avem $N_p(f) < +\infty$. Pentru orice $n \in N$ avem $f_n \leqslant f$, deci $N_p(f_n) \leqslant N_p(f)$, de unde $\sup_n N_p(f_n) \leqslant N_p(f) < +\infty$.

Reciproc, să presupunem că $\sup_n N_p(f_n) < +\infty$. Deoarece șirul (f_n) este crescător, iar seminorma N_p este crescătoare, rezultă că șirul de numere $(N_p(f_n))$ este crescător; fiind și mărginit, este covergent. Atunci șirul puterilor $(N_p(f_n))^p$ este de asemenea convergent, deci este un șir Cauchy de numere. Pentru orice $\varepsilon > 0$, există deci un număr $n(\varepsilon)$, astfel încît, oricare ar fi $n \geqslant n(\varepsilon)$ și $k \geqslant 1$, să avem

$$N_p(f_{n+k})^p - N_p(f_n)^p < \varepsilon^p.$$

Din inegalitatea demonstrată în lema 3 :

$$N_p(f_{n+k} - f_n)^p \leqslant N_p(f_{n+k})^p - N_p(f_n)^p,$$

deducem că

$$N_p(f_{n+k} - f_n) < \varepsilon$$

adică (f_n) este un șir Cauchy de funcții din $\mathcal{L}^p$. Deoarece $\mathcal{L}^p$ este complet, șirul (f_n) converge în medie de ordin p către o funcție din $\mathcal{L}^p$. Dar șirul (f_n) este crescător, deci avem

$$\lim_{n\to\infty} f_n(t) = \sup_n f_n(t) = f(t) \text{ pentru orice } t \in T.$$

Așadar șirul Cauchy (f_n) converge punctual către f. Rezultă că f este p-integrabilă și că (f_n) converge către f în medie de ordin p :

$$\lim_{n\to\infty} N_p(f - f_n) = 0 .$$

Urmează că

$$\lim_{n\to\infty} N_p(f_n) = N_p(f) = N_p(\sup_n f_n).$$

Egalitatea

$$\lim_{n\to\infty} N_p(f_n) = \sup_n N_p(f_n)$$

rezultă din faptul că șirul de numere $(N_p(f_n))$ este crescător.

Să presupunem acum că (f_n) este un șir crescător oarecare de funcții din $\mathcal{L}^p$. Pentru fiecare $n \in N$ să punem $g_n = f_n + f_1^-$. Funcțiile g_n sînt $\geqslant 0$, aparțin spațiului $\mathcal{L}^p$, iar șirul (g_n) este crescător. Din prima parte a demonstrației deducem că funcția $g = \sup_n g_n$ este p-integrabilă dacă și numai dacă $\sup_n N_p(g_n) < +\infty$. Avem

$$g = \sup_n g_n = \sup_n f_n + f_1^- = f + f_1^-$$

deci g este p-integrabilă dacă și numai dacă f este p-integrabilă. Avem apoi

$$N_p(g_n) = N_p(f_n + f_1^-) \leqslant N_p(f_n) + N_p(f_1^-)$$

și

$$N_p(f_n) = N_p(g_n - f_1^-) \leqslant N_p(g_n) + N_p(f_1^-)$$

deci $\sup_n N_p(f_n) < +\infty$ dacă și numai dacă $\sup_n N_p(g_n) < +\infty$. Din cele de mai sus rezultă că $f = \sup_n f_n$ este p-integrabilă dacă și numai dacă

$$\sup_n N_p(f_n) < +\infty.$$

În acest caz, $g = \sup_n g_n$ este p-integrabilă, deci șirul (g_n) converge în medie de ordin p către g:

$$\lim_{n\to\infty} N_p(g_n - g) = 0.$$

Dar

$$f_n - f = g_n - f_1^- - (g - f_1^-) = g_n - g$$

deci

$$\lim_{n\to\infty} N_p(f_n - f) = 0$$

adică șirul (f_n) converge în medie de ordin p către f.

Cu aceasta teorema este demonstrată.

Corolarul 1. *Dacă (f_n) este un șir descrescător de funcții $\geqslant 0$ din $\mathcal{L}^p$, atunci funcția $f = \inf_n f_n$ aparține spațiului $\mathcal{L}^p$, șirul (f_n) converge în medie de ordin p către f și avem*

$$N_p(\inf_n f_n) = \inf_n N_p(f_n) = \lim_{n\to\infty} N_p(f_n).$$

Într-adevăr, șirul $g_n = f_1 - f_n$ este crescător, este format din funcții $\geqslant 0$ și

$$N_p(g_n) = N_p(f_1 - f_n) \leqslant N_p(f_1) + N_p(f_n) \leqslant N_p(f_1) + N_p(f_1)$$

deci

$$\sup_n N_p(g_n) \leqslant 2\, N_p(f_1) < +\infty.$$

Din teorema precedentă rezultă că funcția $g = \sup_n g_n = f_1 - \inf_n f_n$ este de putere p-integrabilă, iar șirul (g_n) converge în medie de ordin p către g.

Să observăm că funcția $\inf_n f_n$ este definită și finită peste tot pe T, deci și funcția g este definită și finită peste tot; fiind p-integrabilă, rezultă că $g \in \mathcal{L}^p$ și deci

$$f = \inf_n f_n = f_1 - g \in \mathcal{L}^p.$$

Deoarece șirul (g_n) converge în medie de ordin p către $g = f_1 - f$, urmează că șirul $f_n = f_1 - g_n$ converge în medie de ordin p către $f_1 - g = f$:

$$\lim_{n\to\infty} N_p(f_n - f) = 0.$$

Rezultă atunci că

$$\inf_n N_p(f_n) = \lim_{n\to\infty} N_p(f_n) = N_p(f) = N_p(\inf_n f_n).$$

Corolarul 2. *Fie (f_n) un șir descrescător de funcții din $\mathcal{L}^p$. Funcția $f = \inf_n f_n$ este p-integrabilă dacă și numai dacă $\sup_n N_p(f_n) < +\infty$. În acest caz șirul (f_n) converge în medie de ordin p către f.*

Șirul $g_n = -f_n$ este crescător și $N_p(g_n) = N_p(f_n)$. Apoi, $\sup_n g_n = -\inf_n f_n$. Rezultă că $\inf_n f_n$ este p-integrabilă dacă și numai dacă $\sup_n g_n$ este p-integrabilă. Dar $\sup_n g_n$ este p-integrabilă, dacă și numai dacă $\sup_n N_p(g_n) = \sup_n N_p(f_n) < +\infty$. Rezultă că $\inf_n f_n$ este p-integrabilă dacă și numai dacă $\sup_n N_p(f_n) < +\infty$.

Dacă $f = \inf_n f_n$ este p-integrabilă, atunci $g = \sup_n g_n$ este p-integrabilă, deci (g_n) converge în medie de ordin p. Urmează că $f_n = -g_n$ converge în medie de ordin p către $f = -g$.

Corolarul 3. *Pentru ca anvelopa superioară $f = \sup_n f_n$ a unui șir (f_n) de funcții din $\mathcal{L}^p$ să fie p-integrabilă, este necesar și suficient să existe o funcție $g \geqslant 0$ (nu neapărat din $\mathcal{L}^p$) astfel ca $\int^* g^p \, d\mu < +\infty$ și $f_n \leqslant g$ pentru orice n.*

Dacă f este p-integrabilă, atunci f^+ este p-integrabilă și luînd $g = f^+$, avem $g \geqslant 0$, $\int^* g^p \, d\mu < +\infty$ și $f_n \leqslant f \leqslant f^+$, deci $f_n \leqslant g$ pentru orice n.

Reciproc, să presupunem că există $g \geqslant 0$ cu $\int^* g^p \, d\mu < +\infty$ astfel ca $f_n \leqslant g$ pentru orice n. Pentru fiecare n să punem $g_n = \sup_{k \leqslant n} f_k \leqslant g$. Șirul (g_n) este crescător și format din funcții din $\mathcal{L}^p$. Funcțiile $h_n = g_n + g_1^-$ sînt $\geqslant 0$, aparțin spațiului $\mathcal{L}^p$; șirul (h_n) este de asemenea crescător și $g_n + g_1^- \leqslant g + g_1^-$ deci

$$N_p(h_n) = N_p(g_n + g_1^-) \leqslant N_p(g + g_1^-) < +\infty.$$

Din teorema 5 rezultă că $\sup_n h_n$ este p-integrabilă și deci și $f = \sup_n f_n = \sup_n g_n = \sup_n h_n - g_1^-$ este p-integrabilă.

Corolarul 4. *Pentru ca anvelopa inferioară* $f = \inf_n f_n$ *a unui șir* (f_n) *de funcții din* $\mathcal{L}^p$ *să fie* p*-integrabilă, este necesar și suficient să existe o funcție* $g \leqslant 0$, *astfel ca* $f_n \geqslant g$ *pentru orice* n *și* $\int^* |g|^p \, d\mu < +\infty$.

Pentru fiecare n să notăm $h_n = -f_n$. Avem $\sup_n h_n = -\inf_n f_n$ Dacă $\inf_n f_n$ este p-integrabilă, atunci $\sup_n h_n$ este p-integrabilă și deci, conform corolarului 3, există o funcție $h \geqslant 0$ astfel ca $\int^* h \, d\mu < +\infty$ și $h_n \leqslant h$ pentru orice n. Punînd $g = -h$, avem $g \leqslant 0$, $f_n \geqslant g$ și $\int^* |g|^p \, d\mu < +\infty$.

Reciproc, dacă există $g \leqslant 0$ cu $\int^* |g|^p \, d\mu < +\infty$ astfel ca $f_n \geqslant g$, atunci $h = -g \geqslant 0$, $\int^* h^p \, d\mu < +\infty$ și $h_n \leqslant h$, deci $\sup_n h_n$ este p-integrabilă. Rezultă atunci că $\inf_n f_n = -\sup_n h_n$ este de asemenea p-integrabilă.

Corolarul 5. *Fie* A *o mulțime numărabilă de indici, ordonată și filtrantă pentru o relație de ordine* $\leqslant$, *și fie* $(f_\alpha)_{\alpha \in A}$ *o familie de funcții* $\geqslant 0$ *din* $\mathcal{L}^p$. *Dacă există o funcție* $g \geqslant 0$ *astfel ca* $N_p(g) < +\infty$ *și* $f_\alpha \leqslant g$ *pentru orice* $\alpha \in A$, *atunci funcția* $\limsup_{\alpha \in A} f_\alpha$ *este* p*-integrabilă și*

$$\limsup_{\alpha \in A} N_p(f_\alpha) \leqslant N_p(\limsup_{\alpha \in A} f_\alpha).$$

Pentru fiecare indice $\alpha \in A$ să considerăm secțiunea

$$S_\alpha = \{\beta \mid \beta \in A, \quad \beta \geqslant \alpha\}.$$

Putem construi un șir *descrescător* (A_n) de secțiuni, astfel încît fiecare secțiune S_α să conțină o secțiune din acest șir.

Pentru aceasta, să așezăm într-un șir

$$\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n, \ldots$$

într-o ordine oarecare, toate elementele mulțimii A. Luăm $A_1 = S_{\beta_1}$. Există un indice α_2, astfel ca $\alpha_2 \geqslant \beta_1$ și $\alpha_2 \geqslant \beta_2$; luăm $A_2 = S_{\alpha_2}$ și avem

$A_1 \supset A_2$, $S_{\beta_2} \supset A_2$. Presupunînd că am ales $A_n = S_{\alpha_n}$, putem găsi un indice α_{n+1}, astfel ca $\alpha_{n+1} \geqslant \alpha_n$ și $\alpha_{n+1} \geqslant \beta_{n+1}$; luăm $A_{n+1} = S_{\alpha_{n+1}}$ și avem $A_n \supset A_{n+1}$ și $S_{\beta_{n+1}} \supset A_{n+1}$. Șirul (A_n) astfel construit corespunde cerinței de mai sus.

Pentru fiecare indice n să punem $g_n = \sup_{\alpha \in A_n} f_\alpha$. Din relația $A_n \supset A_{n+1}$ pentru orice n, rezultă că șirul (g_n) este *descrescător*. Deoarece familia $(f_\alpha)_{\alpha \in A}$ este numărabilă și deoarece $f_\alpha \leqslant g$ iar $N_p(g) < +\infty$, din corolarul 2 deducem că g_n este p-integrabilă. Pe de altă parte, $g_n \geqslant f_\alpha$ pentru $\alpha \in A_n$, deci $N_p(g_n) \geqslant N_p(f_\alpha)$ pentru $\alpha \in A$ și deci

$$N_p(g_n) \geqslant \sup_{\alpha \in A_n} N_p(f_\alpha).$$

Deoarece șirul (A_n) este descrescător, rezultă că punînd $\varphi_n = \sup_{\alpha \in A_n} N_p(f_\alpha)$, șirul (φ_n) este *descrescător*, și

$$\inf_n (\sup_{\alpha \in A_n} N_p(f_\alpha)) = \lim_{n \to \infty} (\sup_{\alpha \in A_n} N_p(f_\alpha)) = \lim_{\alpha \in A} \inf N_p(f_\alpha).$$

Deoarece șirul (g_n) este descrescător și este format din funcții p-integrabile, din corolarul 1 rezultă că funcția $\inf_n g_n$ este p-integrabilă și

$$N_p(\inf_n g_n) = \inf_n N_p(g_n) \geqslant (\inf_n \sup_{\alpha \in A_n} N_p(f_\alpha)) = \lim_{\alpha \in A} \inf N_p(f_\alpha).$$

Dar

$$\inf_n g_n = \inf_n (\sup_{\alpha \in A_n} f_\alpha) = \lim_{\alpha \in A} \inf f_\alpha$$

și deci

$$N_p(\lim_{\alpha \in A} \inf f_\alpha) \geqslant \lim_{\alpha \in A} \inf N_p(f_\alpha).$$

8. Teorema lui Lebesgue

Teorema lui Lebesgue. *Dacă* $(\mathbf{f}_n)$ *este un șir de funcții din* $\mathcal{L}^p_E$, *astfel încît* :

1) *șirul* $(\mathbf{f}_n(t))$ *converge aproape peste tot către o limită* $\mathbf{f}(t) \in E$;

2) *există o funcție numerică* $g \geqslant 0$ *astfel ca* $\int^* g^p \, d\mu < +\infty$ *și* $|\mathbf{f}_n(t)| \leqslant g(t)$, *aproape peste tot, pentru fiecare* n,

atunci funcția $\mathbf{f}$ (*definită* μ-*aproape peste tot*) *este* p-*integrabilă iar șirul* $(\mathbf{f}_n)$ *converge în medie de ordin* p *către* $\mathbf{f}$.

Pentru demonstrație se aplică corolarul 3 al teoremei 5, familiei $g_{m,n} = |\mathbf{f}_m - \mathbf{f}_n|$ de funcții $\geqslant 0$, luînd mulțimea indicilor $A = \{(m, n) \mid m, n \in N\}$, cu relația de ordine $(m, n) \leqslant (m', n')$ echivalentă cu $m \leqslant m'$ și $n \leqslant n'$; A este filtrantă pentru această relație de ordine, deci familia

$(g_{m,n})_{(m,n)\in A}$ este dirijată. Avem $\lim_{\substack{m\to\infty\\ n\to\infty}} g_{m,n}(t) = \lim_{(m,n)\in A} g_{m,n}(t) = 0$ aproape peste tot, și $|g_{m,n}(t)| \leqslant 2g(t)$, aproape peste tot, iar $N_p(2g) < +\infty$. Conform corolarului 3 al teoremei 5 avem

$$\limsup_{(m,n)\in A} N_p(g_{m,n}) \leqslant N_p(\limsup_{(m,n)\in A} g_{m,n}) = N_p(0) = 0$$

și deoarece $N_p(\mathbf{f}_m - \mathbf{f}_n) \geqslant 0$, rezultă

$$\lim_{\substack{m\to\infty\\ n\to\infty}} N_p(\mathbf{f}_m - \mathbf{f}_n) = 0.$$

Aceasta înseamnă că $(\mathbf{f}_n)$ este un șir Cauchy în $\mathcal{L}^p_E$. Deoarece $(\mathbf{f}_n)$ converge aproape peste tot către $\mathbf{f}$, urmează că $\mathbf{f}$ este p-integrabilă și că

$$\lim_{n\to\infty} N_p(\mathbf{f}_n - \mathbf{f}) = 0$$

adică șirul $(\mathbf{f}_n)$ converge către $\mathbf{f}$ în medie de ordin p.

Corolar. *Fie A o mulțime numărabilă de indici, ordonată și filtrantă pentru o relație de ordine $\leqslant$ și fie $(\mathbf{f}_\alpha)_{\alpha\in A}$ o familie de funcții din spațiul $\mathcal{L}^p_E$.*

Dacă:

1) *familia $(\mathbf{f}_\alpha(t))_{\alpha\in A}$ are o limită $\mathbf{f}(t)\in E$, aproape peste tot;*

2) *există o funcție numerică $g \geqslant 0$ astfel ca $\int^* g^p \, d\mu < +\infty$ și $|\mathbf{f}_\alpha(t)| \leqslant g(t)$, aproape peste tot, pentru fiecare $\alpha\in A$, atunci funcția $\mathbf{f}$ este p-integrabilă și familia $(\mathbf{f}_\alpha)_{\alpha\in A}$ converge în medie de ordin p către $\mathbf{f}$.*

Fie (A_n) un șir descrescător de secțiuni, astfel ca fiecare secțiune $S_\alpha = \{\beta \mid \beta\in A,\ \beta \geqslant \alpha\}$ să conțină o secțiune din șir (v. demonstrația corolarului 5 al teoremei 5). Pentru fiecare n să alegem un indice $\alpha_n \in A$. Șirul $(\mathbf{f}_{\alpha_n})$ converge punctual către $\mathbf{f}$, aproape peste tot; ținînd seama și de ipoteza 2), deducem din teorema lui Lebesgue că funcția $\mathbf{f}$ este p-integrabilă și că $\lim_{n\to\infty} N_p(\mathbf{f}_{\alpha_n} - \mathbf{f}) = 0$. Rămîne să arătăm că $\lim_{\alpha\in A} N_p(\mathbf{f}_\alpha - \mathbf{f}) = 0$. Aceasta înseamnă că pentru orice $\varepsilon > 0$ există o secțiune A_n, astfel ca pentru orice $\alpha \in A_n$ să avem $N_p(\mathbf{f}_\alpha - \mathbf{f}) < \varepsilon$. Să presupunem prin absurd că $\lim_{\alpha\in A} N_p(\mathbf{f}_\alpha - \mathbf{f}) \neq 0$. Aceasta înseamnă că există un număr $\varepsilon_0 > 0$ cu proprietatea că în orice secțiune A_n există un indice α_n, astfel încît $N_p(\mathbf{f}_{\alpha_n} - \mathbf{f}) > \varepsilon_0$. Am format astfel un șir $(\mathbf{f}_{\alpha_n})$ cu $\alpha_n \in A_n$ pentru fiecare n. Din prima parte a demonstrației rezultă că $\lim_{n\to\infty} N_p(\mathbf{f}_{\alpha_n} - \mathbf{f}) = 0$, ceea ce este în contradicție cu inegalitățile $N_p(\mathbf{f}_{\alpha_n} - \mathbf{f}) > \varepsilon_0 > 0$, pentru fiecare n. Rezultă așadar că

$$\lim_{\alpha\in A} N_p(f_\alpha - f) = 0$$

și corolarul este demonstrat.

Observație. În demonstrație nu s-a folosit faptul că mulțimea dirijată A este numărabilă, ci doar faptul că filtrul secțiunilor are o bază numărabilă. Corolarul rămîne adevărat, pentru orice familie A de indici, pe care

există un filtru $\mathcal{F}$ cu bază numărabilă. În acest caz convergența aproape peste tot sau în medie de ordin p, trebuie înțeleasă după filtrul $\mathcal{F}$.

Dacă filtrul $\mathcal{F}$ nu are bază numărabilă, corolarul nu mai este în general adevărat.

9. Relații între spațiile $\mathcal{L}^p_E(\mu)$ și $\mathcal{L}^q_E(\mu)$

Teorema 6. *Fie* $1 \leqslant p < +\infty$ *și* $1 \leqslant q < +\infty$. *Pentru ca* $\mathbf{f} \in \mathcal{L}^p_E$ *este necesar și suficient ca* $|\mathbf{f}|^{\frac{p}{q}-1}\mathbf{f} \in \mathcal{L}^q_E$.

Fie $\mathbf{f} \in \mathcal{L}^p_E$. Există un șir $(\mathbf{h}_n)$ de funcții din $\mathcal{K}_E(T)$ convergent în medie de ordin p către $\mathbf{f}$. Acest șir conține un subșir $(\mathbf{h}_{n_k})$ astfel ca

$$\sum_{k=1}^{\infty} N_p(\mathbf{h}_{n_{k+1}} - \mathbf{h}_{n_k}) < +\infty$$

și astfel ca seria

$$\sum_{k=1}^{\infty} (\mathbf{h}_{n_{k+1}} - \mathbf{h}_{n_k})$$

să fie convergentă aproape peste tot. Dacă pentru fiecare k punem $\mathbf{f}_{k+1} = \mathbf{h}_{n_{k+1}} - \mathbf{h}_{n_k}$ și $\mathbf{f}_1 = \mathbf{h}_{n_1}$, atunci funcțiile $(\mathbf{f}_n)$ sînt din $\mathcal{K}_E(T)$ și avem

$$\sum_{n=1}^{\infty} N_p(\mathbf{f}_n) < +\infty$$

și

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{f}_n(t) = \mathbf{f}(t), \text{ aproape peste tot.}$$

Să punem

$$\mathbf{g}_n = |\mathbf{f}_1 + \mathbf{f}_2 + \ldots + \mathbf{f}_n|^{\frac{p}{q}-1}(\mathbf{f}_1 + \mathbf{f}_2 + \ldots + \mathbf{f}_n).$$

Funcțiile $\mathbf{g}_n$ sînt din $\mathcal{K}_E(T)$ și

$$|\mathbf{g}_n|^q = |\mathbf{f}_1 + \mathbf{f}_2 + \ldots + \mathbf{f}_n|^p \leqslant (|\mathbf{f}_1| + |\mathbf{f}_2| + \ldots + |\mathbf{f}_n|)^p \leqslant \left(\sum_{n=1}^{\infty} |\mathbf{f}_n|\right)^p.$$

Dacă notăm $\mathbf{h} = \left(\sum_{n=1}^{\infty} |\mathbf{f}_n|\right)^{\frac{p}{q}}$, avem $\mathbf{h} \geqslant 0$, $|\mathbf{g}_n| \leqslant \mathbf{h}$ pentru fiecare n și

$$N_q(\mathbf{h})^q = \int^* \mathbf{h}^q \, d\mu = \int^* \left(\sum_{n=1}^{\infty} |\mathbf{f}_n|\right)^p d\mu = \left[N_p\left(\sum_{n=1}^{\infty} |\mathbf{f}_n|\right)\right]^p \leqslant$$

$$\leqslant \left[\sum_{n=1}^{\infty} N_p(\mathbf{f}_n)\right]^p < +\infty.$$

Cum

$$\lim_{n\to\infty} g_n(t) = \lim_{n\to\infty} \Big|\sum_{k\leqslant n} f_k(t)\Big|^{\frac{p}{q}-1} \sum_{k\leqslant n} f_k(t) =$$

$$= \Big|\sum_{k=1}^{\infty} f_k(t)\Big|^{\frac{p}{q}-1} \sum_{k=1}^{\infty} f_k(t) = |f(t)|^{\frac{p}{q}-1} f(t), \text{ aproape peste tot,}$$

rezultă că funcția limită $|f|^{\frac{p}{q}-1} f$ este q-integrabilă, conform teoremei lui Lebesgue.

Reciproc, dacă funcția $g = |f|^{\frac{p}{q}-1} f$ este p-integrabilă, atunci $f = |g|^{\frac{q}{p}-1} g$, și din prima parte a demonstrației rezultă că f este p-integrabilă.

Observație. Se poate arăta că $f \to |f|^{\frac{p}{q}-1} f$ este un omeomorfism al spațiului $\mathcal{L}^p_E$ pe spațiul $\mathcal{L}^q_E$.

Corolarul 1. *Pentru ca $f \in \mathcal{L}^p_E$ este necesar și suficient ca $|f|^{p-1} f \in \mathcal{L}^1_E$.*

Corolarul 2. *Pentru ca o funcție $f \geqslant 0$ să aparțină spațiului $\mathcal{L}^p$ este necesar și suficient ca $f^p \in \mathcal{L}^1$.*

10. Mulțimi filtrante în L^p

În § 6, punctul 5, s-a definit o relație de ordine $\tilde{f} \leqslant \tilde{g}$ în mulțimea $\widetilde{\mathcal{F}}$ a claselor de echivalență de funcții numerice definite și finite μ—aproape peste tot pe T.

Dacă $\tilde{f}_1, \tilde{f}_2 \in \widetilde{\mathcal{F}}$, atunci anvelopa superioară $g = \sup(f_1, f_2)$ și anvelopa inferioară $h = \inf(f_1, f_2)$ sînt definite și finite aproape peste tot și avem

$$\tilde{g} = \sup(\tilde{f}_1, \tilde{f}_2), \quad \tilde{h} = \inf(\tilde{f}_1, \tilde{f}_2),$$

deci $\widetilde{\mathcal{F}}$ este un spațiu vectorial *reticulat* (spațiu Riesz).

Conform corolarului propoziției 17, subspațiul L^p al lui $\widetilde{\mathcal{F}}$ este de asemenea reticulat pentru relația de ordine $\tilde{f} \leqslant \tilde{g}$ și marginea superioară în L^p, a două elemente $\tilde{f}, \tilde{g} \in L^p$, coincide cu marginea lor superioară în $\widetilde{\mathcal{F}}$.

Propoziția 21. *În spațiul Banach reticulat L^p, aplicația $\tilde{f} \to |\tilde{f}|$ este uniform continuă și mulțimea P a elementelor $\tilde{f} \geqslant 0$ este închisă.*

Continuitatea uniformă a aplicației $\tilde{f} \to |\tilde{f}|$ rezultă din inegalitatea

$$\| |\tilde{f}| - |\tilde{g}| \|_p \leqslant \| \tilde{f} - \tilde{g} \|_p.$$

Fie $\tilde{f} \in \overline{P}$; există un șir $(\tilde{g}_n)$ de elemente din P astfel încît $\tilde{g}_n \to \tilde{f}$ în L^p.

Deoarece aplicația $\tilde{f} \to |\tilde{f}|$ este continuă, rezultă că $|\tilde{g}_n| \to |\tilde{f}|$ în L^p. Dar $\tilde{g}_n \geqslant 0$, deci $\tilde{g}_n = |\tilde{g}_n|$, de unde rezultă că $|\tilde{f}| = \tilde{f}$. Urmează că $\tilde{f} \geqslant 0$, deci $\tilde{f} \in P$ și deci P este închisă.

Teorema 7. *Fie $H \subset L^p$ o parte filtrantă pentru relația $\leqslant$ formată din clase $\geqslant 0$. Mulțimea H are margine superioară în L^p, dacă și numai dacă* $\sup_{\tilde{f} \in H} \|\tilde{f}\|_p < \infty$. *În acest caz* sup H este *limita (în L^p) a filtrului secțiunilor lui H.*

Dacă există marginea superioară $\tilde{g} = \sup H$ în L^p, atunci $\tilde{f} \leqslant \tilde{g}$, deci $\|\tilde{f}\|_p \leqslant \|\tilde{g}\|_p$ pentru orice $\tilde{f} \in H$, deci

$$\sup_{\tilde{f} \in H} \|\tilde{f}\|_p \leqslant \|\tilde{g}\|_p < +\infty$$

Reciproc, să presupunem că $\sup_{\tilde{f} \in H} \|\tilde{f}\|_p < +\infty$. Deoarece aplicația $\tilde{f} \to \|\tilde{f}\|_p$ este crescătoare, rezultă că această aplicație are limită după filtrul secțiunilor lui H și

$$\lim_{\tilde{f} \in H} \|\tilde{f}\|_p = \sup_{\tilde{f} \in H} \|\tilde{f}\|_p.$$

Din inegalitatea (propoziția 19)

$$(\|\tilde{f} - \tilde{h}\|_p)^p \leqslant (\|\tilde{f}\|_p)^p - (\|\tilde{h}\|_p)^p$$

deducem că filtrul secțiunilor lui H este un filtru Cauchy în spațiul Banach L^p, deci are o limită $\tilde{g} \in L^p$. Urmează atunci că g este marginea superioară a mulțimii filtrante H și teorema este demonstrată.

Corolarul 1. *Dacă $\tilde{g}$ este marginea superioară a lui H în L^p, atunci*

$$\|\tilde{g}\|_p = \lim_{\tilde{f} \in H} \|\tilde{f}\|_p = \sup_{\tilde{f} \in H} \|\tilde{f}\|.$$

Într-adevăr, aplicația $\tilde{f} \to \|\tilde{f}\|_p$ este continuă și crescătoare.

Corolarul 2. *Orice mulțime majorată nevidă $A \subset L^p$ are margine superioară în L.*

Mulțimea B a marginilor superioare ale părților finite ale lui A este *filtrantă* pentru relația $\leqslant$.

Fie $\tilde{h} \in B$ și secțiunea $B_{\tilde{h}} = \{\tilde{f} \in A\ ;\ \tilde{f} \geqslant \tilde{h}\}$.

Mulțimea $H = B_{\tilde{h}} - \tilde{h}$ este formată din elemente $\geqslant 0$, este majorată și filtrantă pentru relația $\leqslant$, deci are o margine superioară $\tilde{g}$ în L^p. Urmează că $\tilde{g} + \tilde{h}$ este marginea superioară a secțiunii $B_{\tilde{h}}$. Rezultă atunci că $\tilde{g} + \tilde{h}$ este și marginea superioară a mulțimii A.

Observație. Concluzia teoremei 7 nu mai este adevărată pentru funcții din $\mathcal{L}^p$. Dacă $M \subset \mathcal{L}^p$ este o mulțime filtrantă pentru relația $\leqslant$ formată din funcții $\geqslant 0$, astfel încît $\sup_{f \in M} N_p(f) < +\infty$, clasa de echivalență a anvelopei superioare $g = \sup_{f \in M} f$ nu mai este identică, în general, cu marginea superioară în L^p a mulțimii $\{\tilde{f}\ ;\ f \in M\}$. Este posibil ca g să nu aparțină spațiului $\mathcal{L}^p$, și chiar dacă $g \in \mathcal{L}^p$ egalitatea $N_p(g) = \sup_{f \in M} N_p(f)$ nu este, în general, adevărată.

§ 8. FUNCȚII INTEGRABILE

1. Definiția funcțiilor integrabile în raport cu o măsură majorată

Fie E și F două spații Banach (fiind considerate ambele reale sau ambele complexe). În particular, unul sau ambele spații E și F pot fi egale cu R sau cu C.

Fie $\mathbf{m} : \mathcal{K}_E(T) \to F$ o măsură *majorată* și fie $|\mathbf{m}|$ modulul lui $\mathbf{m}$. În particular, putem avea $\mathbf{m} = |\mathbf{m}|$, dacă $\mathbf{m}$ este pozitivă.

Să considerăm spațiul $\mathcal{L}^1_E(|\mathbf{m}|)$, cu topologia convergenței în medie definită de seminorma

$$N_1(\mathbf{f}, |\mathbf{m}|) = \int^* |\mathbf{f}| \, \mathrm{d} \, |\mathbf{m}|.$$

Funcțiile din spațiul $\mathcal{L}^1_E(|\mathbf{m}|)$ se numesc funcții *integrabile în raport cu măsura pozitivă* $|\mathbf{m}|$, sau funcții $|\mathbf{m}|$ -integrabile.

Funcțiile $\mathbf{g}$ din $\mathcal{K}_E(T)$ verifică inegalitatea

$$\left| \int \mathbf{g} \, \mathrm{d} \, \mathbf{m} \right| \leqslant \int |\mathbf{g}| \, \mathrm{d} \, |\mathbf{m}|.$$

Pentru funcțiile $\mathbf{g}$ din $\mathcal{K}_E(T)$ avem $|\mathbf{g}| \in \mathcal{K}_+(T)$, deci

$$\int^* |\mathbf{g}| \, \mathrm{d} \, |\mathbf{m}| = \int |\mathbf{g}| \, \mathrm{d} \, |\mathbf{m}|$$

și deci

$$N_1(\mathbf{g}, |\mathbf{m}|) = \int |\mathbf{g}| \, \mathrm{d} \, |\mathbf{m}|$$

astfel încît inegalitatea de mai sus se scrie

$$\left| \int \mathbf{g} \, \mathrm{d} \, \mathbf{m} \right| \leqslant N_1(\mathbf{g}, |\mathbf{m}|).$$

Această inegalitate arată că aplicația liniară $\mathbf{g} \to \int \mathbf{g} \, \mathrm{d} \, \mathbf{m}$ a lui $\mathcal{K}_E(T)$ în F este *continuă* pe $\mathcal{K}_E(T)$ *pentru topologia convergenței în medie*. Cum spațiul $\mathcal{K}_E(T)$ este dens în spațiul $\mathcal{L}^1_E(|\mathbf{m}|)$ pentru această topologie, aplicația liniară $\mathbf{g} \to \int \mathbf{g} \, \mathrm{d} \, \mathbf{m}$ a lui $\mathcal{K}_E(T)$ în F se poate prelungi în mod unic la o aplicație liniară continuă a întregului spațiu $\mathcal{L}^1_E(|\mathbf{m}|)$ în F.

Definiția 1. *Spunem că o funcție* $\mathbf{f} : T \to E$ *este integrabilă în raport cu măsura majorată* $\mathbf{m}$, *sau că este* $\mathbf{m}$-*integrabilă, dacă este integrabilă în raport cu* $|\mathbf{m}|$. *Pentru orice funcție* $\mathbf{m}$-*integrabilă* $\mathbf{f} \in \mathcal{L}^1_E(|\mathbf{m}|)$, *valoarea în* $\mathbf{f}$ *a prelungirii prin continuitate la* $\mathcal{L}^1_E(|\mathbf{m}|)$ *a aplicației* $\mathbf{g} \to \int \mathbf{g} \, \mathrm{d} \, \mathbf{m}$ *a lui*

$\mathcal{K}_E(T)$ *în* F, *se numește integrala lui* $\mathbf{f}$ *în raport cu* $\mathbf{m}$ *și se notează* $\mathbf{m}(\mathbf{f})$ *sau* $\int \mathbf{f}\, \mathbf{dm}$ *sau* $\int \mathbf{f}(t)\, \mathbf{dm}(t)$.

Spațiul funcțiilor $\mathbf{m}$-integrabile $\mathbf{f}: T \to E$ va fi notat $\mathcal{L}^1_E(\mathbf{m})$. Așadar $\mathcal{L}^1_E(\mathbf{m}) = \mathcal{L}^1_E(|\mathbf{m}|)$. De asemenea spațiul $\mathcal{L}^p_E(|\mathbf{m}|)$ al funcțiilor p-sumabile $\mathbf{f}: T \to E$ în raport cu măsura $|\mathbf{m}|$ va fi notat, uneori, $\mathcal{L}^p_E(\mathbf{m})$.

Propoziția 1. *Pentru orice funcție* $\mathbf{f} \in \mathcal{L}^1_E(\mathbf{m})$ *avem*

$$\left| \int \mathbf{f}\, \mathbf{dm} \right| \leqslant N_1(\mathbf{f}, |\mathbf{m}|).$$

Într-adevăr, fie $(\mathbf{f}_n)$ un șir de funcții din $\mathcal{K}_E(T)$, convergent în medie către $\mathbf{f}$. Deoarece integrala și seminorma sînt continue în această topologie, ca funcții de $\mathbf{f}$, avem

$$\int \mathbf{f}_n\, \mathbf{dm} \to \int \mathbf{f}\, \mathbf{dm} \text{ și } N_1(\mathbf{f}_n, |\mathbf{m}|) \to N_1(\mathbf{f}, |\mathbf{m}|).$$

Dar pentru funcțiile $\mathbf{f}_n$ din $\mathcal{K}_E(T)$ avem inegalitatea

$$\left| \int \mathbf{f}_n\, \mathbf{dm} \right| \leqslant N_1(\mathbf{f}_n, |\mathbf{m}|).$$

Trecînd la limită în această inegalitate, obținem inegalitatea din enunț.

Seminorma $N_1(\mathbf{f}, |\mathbf{m}|)$ va fi notată de asemenea $N_1(\mathbf{f}, \mathbf{m})$:

$$N_1(\mathbf{f}, \mathbf{m}) = \int^* |\mathbf{f}|\, \mathbf{d}\, |\mathbf{m}|.$$

Cu această notație, inegalitatea de mai sus se scrie

$$\left| \int \mathbf{f}\, \mathbf{dm} \right| \leqslant N_1(\mathbf{f}, \mathbf{m}) \text{ pentru } \mathbf{f} \in \mathcal{L}^1_E(\mathbf{m}).$$

2. Integrarea în raport cu o măsură scalară

Fie $\mu : \mathcal{K}(T) \to C$ o *măsură reală* (respectiv *complexă*) și E un spațiu Banach real (respectiv complex). În particular, μ poate fi o măsură pozitivă, iar E *poate fi spațiul* R *al numerelor reale sau spațiul* C *al numerelor complexe* (considerat ca spațiu vectorial real sau complex, după cum măsura μ este reală sau complexă).

După cum știm (teorema 1, § 2 și prop. 10, § 3), măsurii μ îi corespunde o măsură $\mathbf{m} : \mathcal{K}_E(T) \to E$ și numai una, care verifică egalitatea

$$\mathbf{m}(\varphi x) = \mu(\varphi)x \text{ pentru } \varphi \in \mathcal{K}(T) \text{ și } x \in E.$$

Măsura $\mathbf{m}$ este majorată și $|\mathbf{m}| = |\mu|$.

Putem aplica definiția 1 pentru măsura **m**. Deoarece $|\mathbf{m}| = |\mu|$, avem

$$\mathcal{L}^1_E(\mathbf{m}) = \mathcal{L}^1_E(|\mu|) = \mathcal{L}^1_E(\mu).$$

Mai înainte am identificat măsurile **m** și μ și am scris $\int \mathbf{f}\, d\mu$ în loc de $\int \mathbf{f}\, d\mathbf{m}$ pentru funcțiile **f** din $\mathcal{K}_E(T)$. Conform acestei identificări, avem

$$\int \varphi x\, d\mu = x \int \varphi\, d\mu \quad \text{pentru } \varphi \in \mathcal{K}(T) \text{ și } x \in E.$$

Funcțiile **m**-integrabile $\mathbf{f}: T \to E$ vor fi numite funcții μ-integrabile, iar spațiul $\mathcal{L}^1_E(\mathbf{m})$ va fi notat $\mathcal{L}^1_E(\mu)$. În loc de $\int \mathbf{f}\, d\mathbf{m}$ vom scrie $\int \mathbf{f}\, d\mu$ și vom spune că este integrala funcției $\mathbf{f}: T \to E$ în raport cu măsura scalară μ.

Seminorma $N_1(\mathbf{f}, \mathbf{m})$ va fi notată cu $N_1(\mathbf{f}, \mu)$:

$$N_1(\mathbf{f}, \mu) = \int^* |\mathbf{f}|\, d\, |\mu|$$

Cu aceste notații avem

$$\left| \int \mathbf{f}\, d\mu \right| \leqslant N_1(\mathbf{f}, \mu), \text{ pentru } \mathbf{f} \in \mathcal{L}^1_E(\mu).$$

Teorema 1. *Fie μ o măsură reală (respectiv complexă), E și F două spații Banach reale (respectiv complexe) și $U: E \to F$ o aplicație liniară și continuă. Pentru orice funcție μ-integrabilă $\mathbf{f}: T \to E$, funcția $U \circ \mathbf{f}: T \to F$ este μ-integrabilă și*

$$\int U(\mathbf{f}(t))\, d\mu(t) = U\left(\int \mathbf{f}(t)\, d\mu(t) \right).$$

Mai înainte s-a demonstrat (teorema 4, § 7) că dacă **f** este o funcție $|\mu|$-integrabilă din $\mathcal{L}^1_E(\mu)$, atunci $U \circ \mathbf{f} \in \mathcal{L}^1_F(|\mu|)$ adică $U \circ \mathbf{f}$ este $|\mu|$-integrabilă. S-a demonstrat de asemenea că egalitatea din enunț este adevărată pentru funcțiile $\mathbf{f} \in \mathcal{K}_E(T)$ (teorema 2, § 2).

Fie acum **f** o funcție oarecare din $\mathcal{L}_E(\mu)$ și fie $(\mathbf{f}_n)$ un șir de funcții din $\mathcal{K}_E(T)$, convergent în medie către **f**. Atunci:

$$\lim_{n\to\infty} \int \mathbf{f}_n\, d\mu = \int \mathbf{f}\, d\mu, \text{ deci } \lim_{n\to\infty} U\left(\int \mathbf{f}_n\, d\mu \right) = U\left(\int \mathbf{f}\, d\mu \right).$$

Din inegalitatea

$$N_1(U \circ \mathbf{f}_n - U \circ \mathbf{f}, |\mu|) = \int^* |U \circ \mathbf{f}_n - \mathbf{f}|\, d\, |\mu| \leqslant$$

$$\leqslant |U| \int |\mathbf{f}_n - \mathbf{f}|\, d\, |\mu| = |U|\, N_1(\mathbf{f}_n - \mathbf{f}, |\mu|),$$

rezultă că $U \circ \mathbf{f}_n$ converge în medie către $U \circ \mathbf{f}$, deci

$$\lim_{n\to\infty} \int U(\mathbf{f}_n(t))\, d\mu(t) = \int U(\mathbf{f}(t))\, d\mu(t).$$

Trecînd la limită în egalitatea

$$\int U(\mathbf{f}_n(t))\, d\mu(t) = U\left(\int \mathbf{f}_n(t)\, d\mu(t)\right)$$

obținem egalitatea din enunț.

Corolarul 1. *Fie μ o măsură scalară, E și F două spații Banach. Dacă $\mathbf{f}: T \to \mathcal{L}(E, F)$ este o funcție μ-integrabilă și $x \in E$, funcția $t \to \mathbf{f}(t)x$ (definită pe T cu valori în F) este μ-integrabilă și*

$$\int \mathbf{f}(t)\, x\, d\mu(t) = \left(\int \mathbf{f}(t)\, d\mu(t)\right) x.$$

Se aplică teorema precedentă, pentru aplicația liniară și continuă $Uz = zx$ a lui $\mathcal{L}(E, F)$ în F.

Corolarul 2. *Fie μ o măsură scalară și E un spațiu Banach. Dacă φ este o funcție scalară μ-integrabilă și $x \in E$, atunci $\varphi x: T \to E$ este μ-integrabilă și*

$$\int \varphi x\, d\mu = x \int \varphi\, d\mu.$$

Se aplică corolarul precedent luînd $F = E$ și considerînd $\varphi: T \to \mathcal{L}(E, E)$, sau se aplică teorema pentru aplicația liniară și continuă $U\alpha = \alpha x$ a lui C (sau R) în E.

Observație. Corolarul 2 arată că se ajunge la același rezultat dacă, plecînd de la o măsură scalară $\mu: \mathcal{K}(T) \to C$, mai întîi se definește măsura $\mu: \mathcal{K}_E(T) \to E$ prin prelungirea egalității

$$\mu(\varphi x) = \mu(\varphi)x, \text{ pentru } \varphi \in \mathcal{K}(T) \text{ și } x \in E$$

și apoi se extinde μ la spațiul $\mathcal{L}^1_E(\mu)$, sau mai întîi se extinde măsura μ la spațiul $\mathcal{L}^1(\mu)$ și apoi se definește integrala funcțiilor din $\mathcal{L}^1_E(\mu)$ prin prelungirea egalității

$$\int \varphi x\, d\mu = x \int \varphi\, d\mu, \text{ pentru } \varphi \in \mathcal{L}^1(\mu) \text{ și } x \in E.$$

Corolarul 3. *Fie μ o măsură scalară și E un spațiu Banach. Dacă $\mathbf{f}: T \to E$ este o funcție μ-integrabilă și $z' \in E'$, atunci funcția scalară $t \to \langle \mathbf{f}(t), z' \rangle$ este μ-integrabilă și*

$$\int \langle \mathbf{f}, z' \rangle\, d\mu = \left\langle \int \mathbf{f}\, d\mu, z' \right\rangle.$$

3. Integrarea funcțiilor scalare în raport cu o măsură majorată

Fie E și F două spații Banach (considerate ambele reale sau ambele complexe), $\mathbf{m} : \mathcal{K}_E(T) \to F$ o măsură *majorată* și $|\mathbf{m}|$ modulul său.

După cum știm (propoziția 1, § 2), măsurii $\mathbf{m}$ îi corespunde o măsură $\mu : \mathcal{K}(T) \to \mathcal{L}(E, F)$ și numai una care verifică egalitatea

$$\mu(\varphi)x = \mathbf{m}(\varphi x) \text{ pentru } \varphi \in \mathcal{K}(T) \text{ și } x \in E.$$

Măsura μ este de asemenea majorată și $|\mu| \leqslant |\mathbf{m}|$ deci

$$\left|\int \varphi \, d\mu\right| \leqslant \int |\varphi| \, d|\mu| \leqslant \int |\varphi| \, d|\mathbf{m}|, \text{ pentru } \varphi \in \mathcal{K}(T).$$

Mai departe se va arăta că avem chiar egalitatea $|\mu| = |\mathbf{m}|$.

Din inegalitatea $|\mu| \leqslant |\mathbf{m}|$ deducem

$$\int^* |\varphi| \, d|\mu| \leqslant \int^* |\varphi| \, d|\mathbf{m}|, \text{ adică } N_1(\varphi, |\mu|) \leqslant N_1(\varphi, |\mathbf{m}|).$$

Rezultă

$$\mathcal{L}^1(|\mathbf{m}|) \subset \mathcal{L}^1(|\mu|) = \mathcal{L}^1(\mu).$$

Funcțiile $|\mathbf{m}|$ -integrabile $\varphi \in \mathcal{L}^1(|\mathbf{m}|)$ sînt în același timp μ-integrabile.

Mai înainte am identificat măsurile $\mathbf{m}$ și μ și am scris $\int \varphi \, d\mathbf{m}$ în loc de $\int \varphi \, d\mu$ pentru funcțiile φ din $\mathcal{K}(T)$. Cu această notație avem

$$\left(\int \varphi \, d\mathbf{m}\right) x = \int \varphi x \, d\mathbf{m}, \text{ pentru } \varphi \in \mathcal{K}(T) \text{ și } x \in E$$

și

$$\left|\int \varphi \, d\mathbf{m}\right| \leqslant \int |\varphi| \, d|\mathbf{m}| = N_1(\varphi, |\mathbf{m}|), \text{ pentru } \varphi \in \mathcal{K}(T).$$

În conformitate cu această identificare, funcțiile numerice μ -integrabile φ din $\mathcal{L}^1(|\mathbf{m}|)$ vor fi numite funcții $\mathbf{m}$-integrabile, iar spațiul $\mathcal{L}^1(|\mathbf{m}|)$ va fi notat $\mathcal{L}^1(\mathbf{m})$. Pentru funcțiile φ din $\mathcal{L}^1(\mathbf{m})$ vom scrie $\int \varphi d\mathbf{m}$ în loc de $\int \varphi \, d\mu$, și vom spune că $\int \varphi d\mathbf{m}$ este integrala funcției numerice φ în raport cu măsura vectorială $\mathbf{m}$.

Seminorma $N_1(\varphi, |\mathbf{m}|)$ va fi notată cu $N_1(\varphi, \mathbf{m})$:

$$N_1(\varphi, \mathbf{m}) = \int^* |\varphi| \, d(|\mathbf{m}|$$

Cu această notație avem

$$\left|\int \varphi \, d\mathbf{m}\right| \leqslant N_1(\varphi, \mathbf{m}), \text{ pentru } \varphi \in \mathcal{L}^1(\mathbf{m}).$$

Observație. Mai departe, (teorema 5), după ce va fi demonstrată egalitatea $|\mu| = |\mathbf{m}|$, va rezulta că $\mathcal{L}^1(\mathbf{m}) = \mathcal{L}^1(\mu)$, iar identificarea măsurilor $\mathbf{m}$ și μ va fi perfect justificată.

Propoziția 1'. *Dacă* $\mathbf{m} : \mathcal{K}_E \to F$ *este o măsură majorată, atunci pentru orice funcție numerică* $\mathbf{m}$*-integrabilă* $\varphi \in \mathcal{L}^1(\mathbf{m})$ *și orice* $x \in E$ *avem*

$$\int \varphi \, x \, d\mathbf{m} = \left(\int \varphi \, d\mathbf{m}\right) x.$$

Fie $\varphi \in \mathcal{L}^1(\mathbf{m})$, și fie (φ_n) un șir de funcții din $\mathcal{K}(T)$ convergent în $\mathcal{L}^1(\mathbf{m})$ către φ. Pentru funcțiile φ_n din $\mathcal{K}(T)$ avem

$$\mathbf{m}(\varphi_n)\, x = \mathbf{m}(\varphi_n x), \; x \in E.$$

Deoarece $\varphi_n \to \varphi$ în $\mathcal{L}^1(\mathbf{m})$, avem $\mathbf{m}(\varphi_n) \to \mathbf{m}(\varphi)$ în $\mathcal{L}(E, F)$ și deci $\mathbf{m}(\varphi_n)\, x \to \mathbf{m}(\varphi)\, x$ în F, pentru $x \in E$. Pe de altă parte, deoarece $\varphi_n \to \varphi$ în $\mathcal{L}^1(\mathbf{m})$, avem $\varphi_n x \to \varphi x$ în $\mathcal{L}^1_E(\mathbf{m})$ pentru fiecare $x \in E$ și deci $\mathbf{m}(\varphi_n x) \to \mathbf{m}(\varphi x)$. Trecînd la limită în egalitatea de mai sus, obținem

$$\mathbf{m}(\varphi)\, x = \mathbf{m}(\varphi x)$$

adică

$$\int \varphi x \, d\mathbf{m} = \left(\int \varphi \, d\mathbf{m}\right) x.$$

Observație. Această propoziție arată că se ajunge la același rezultat dacă, plecînd de la o măsură majorată $\mathbf{m} : \mathcal{K}_E(T) \to F$, mai întîi se definește măsura $\mathbf{m} : \mathcal{K}(T) \to \mathcal{L}(E, F)$ prin egalitatea

$$\mathbf{m}(\varphi)\, x = \mathbf{m}(\varphi x), \text{ pentru } \varphi \in \mathcal{K}(T) \text{ și } x \in E$$

și apoi se extinde la $\mathcal{L}^1(\mathbf{m})$, sau mai întîi se extinde măsura $\mathbf{m}$ la $\mathcal{L}^1_E(\mathbf{m})$ și apoi se definește integrala funcțiilor din $\mathcal{L}^1(|\mathbf{m}|)$ prin egalitatea

$$\left(\int \varphi \, d\mathbf{m}\right) x = \int \varphi x \, d\mathbf{m}.$$

4. Funcții integrabile definite aproape peste tot

Din cele de mai sus rezultă că oricare ar fi măsura majorată $\mathbf{m}$, vectorială sau scalară, se pot integra în raport cu $\mathbf{m}$ atît funcții vectoriale cît și funcții scalare. Integrabilitatea în raport cu $\mathbf{m}$ se reduce la integrabilitatea în raport cu măsura pozitivă $|\mathbf{m}|$.

Din inegalitatea

$$\left|\int \mathbf{f} \, d\mathbf{m}\right| \leqslant N_1(\mathbf{f}, \mathbf{m}) = \int^* |\mathbf{f}| \, d\,|\mathbf{m}|,$$

valabilă pentru orice funcție $\mathbf{m}$-integrabilă $\mathbf{f}$, deducem că, dacă $\mathbf{f}$ este este $|\mathbf{m}|$ -neglijabilă, avem $\int \mathbf{f}\,\mathbf{dm} = 0$. Implicația reciprocă nu este în general adevărată : putem avea $\int \mathbf{f}\,\mathbf{dm} = 0$ fără ca $\mathbf{f}$ să se anuleze în vreun punct.

Funcțiile $|\mathbf{m}|$-neglijabile vor fi numite de asemenea funcții $\mathbf{m}$-neglijabile. Despre proprietățile care au loc $|\mathbf{m}|$-aproape peste tot vom spune de asemenea că sînt valabile $\mathbf{m}$-aproape peste tot.

Dacă $\mathbf{f}$ și $\mathbf{g}$ sînt două funcții echivalente din $\mathcal{L}^1_E(\mathbf{m})$, atunci $N_1(\mathbf{f}-\mathbf{g}, \mathbf{m}) = 0$, deci

$$\int \mathbf{f}\,\mathbf{dm} = \int \mathbf{g}\,\mathbf{dm}.$$

Rezultă că integrala $\int \mathbf{f}\,\mathbf{dm}$ nu depinde decît de clasa de echivalență $\tilde{\mathbf{f}}$ a lui $\mathbf{f}$. De aceea punem, prin definiție,

$$\mathbf{m}(\tilde{\mathbf{f}}) = \int \mathbf{f}\,\mathbf{dm}, \quad \text{pentru } \tilde{\mathbf{f}} \in L^1_E.$$

Aplicația $\tilde{\mathbf{f}} \to \mathbf{m}(\tilde{\mathbf{f}})$ definită pe spațiul L^1_E este continuă și

$$|\mathbf{m}(\tilde{\mathbf{f}})| \leqslant N_1(\mathbf{f}, \mathbf{m}).$$

Dacă acum $\mathbf{f}$ este o funcție cu valori în E, definită $\mathbf{m}$-aproape peste tot pe T, și dacă $\mathbf{f}$ este echivalentă cu o funcție $\mathbf{m}$-integrabilă din $\mathcal{L}^1_E(\mathbf{m})$ (definită peste tot), adică dacă $\tilde{\mathbf{f}} \in L^1_E(\mathbf{m})$, atunci spunem de asemenea că $\mathbf{f}$ este $\mathbf{m}$-integrabilă și punem prin definiție

$$\int \mathbf{f}\,\mathbf{dm} = \mathbf{m}(\tilde{\mathbf{f}}).$$

$\int \mathbf{f}\,\mathbf{dm}$ se numește, încă, integrala lui $\mathbf{f}$ în raport cu $\mathbf{m}$ și verifică inegalitatea

$$\left|\int \mathbf{f}\,\mathbf{dm}\right| \leqslant N_1(\mathbf{f}, \mathbf{m}).$$

Dacă f este o funcție *numerică*, definită și finită $\mathbf{m}$-aproape peste tot pe T, și dacă f este echivalentă cu o funcție $\mathbf{m}$-integrabilă din $\mathcal{L}^1(\mathbf{m})$ (definită și finită peste tot), adică dacă $\tilde{f} \in L^1(\mathbf{m})$, spunem și în acest caz că f este $\mathbf{m}$-integrabilă, iar integrala $\int f\,\mathbf{dm}$ se definește prin egalitatea

$$\int f\,\mathbf{dm} = \mathbf{m}(\tilde{f})$$

și verifică inegalitatea

$$\left|\int f \mathrm{d}\mathbf{m}\right| \leqslant N_1(f, \mathbf{m}).$$

Majoritatea rezultatelor care urmează sînt enunțate pentru funcții integrabile din $\mathscr{L}^1_E$ sau din $\mathscr{L}^1$, dar rămîn adevărate și pentru funcții integrabile definite aproape peste tot sau definite și finite aproape peste tot.

5. Proprietățile funcțiilor integrabile

Fie μ o măsură *pozitivă*. În particular, μ poate fi modulul $|\mathbf{m}|$ al unei măsuri majorate $\mathbf{m}$.

Propoziția 2. *Pentru orice funcție μ-integrabilă $f \geqslant 0$, avem*

$$\int f \mathrm{d}\mu = \int^* f \mathrm{d}\mu = N_1(f, \mu).$$

Fie (g_n) un șir de funcții din $\mathscr{K}(T)$ convergent în medie către f:

$$\lim_{n\to\infty} N_1(g_n - f, \mu) = 0.$$

Deoarece $f \geqslant 0$ avem

$$\big||g_n| - f\big| = \big||g_n| - |f|\big| \leqslant |g_n - f|$$

și deci

$$\lim_{n\to\infty} N_1(|g_n| - f, \mu) = 0.$$

Așadar, șirul $(|g_n|)$ de funcții *pozitive* din $\mathscr{K}(T)$ converge în medie către f; integrala fiind continuă, deducem

$$\lim_{n\to\infty} \int |g_n| \,\mathrm{d}\mu = \int f \mathrm{d}\mu.$$

Seminorma N_1 fiind de asemenea continuă pe $\mathscr{L}^1(\mu)$, avem

$$\lim_{n\to\infty} N_1(|g_n|, \mu) = N_1(f, \mu).$$

Dar pentru funcțiile $|g_n|$ din $\mathscr{K}_+(T)$ avem

$$\int |g_n| \,\mathrm{d}\mu = \int^* |g_n| \,\mathrm{d}\mu = N_1(|g_n| \,\mu).$$

Trecînd la limită în aceste egalități, obținem

$$\int f \mathrm{d}\mu = \int^* f \mathrm{d}\mu = N_1(f, \mu).$$

Corolarul 1. *Pentru orice funcție* μ*-integrabilă* $\mathbf{f}$ *din* $\mathcal{L}^1_E(\mu)$, $|\mathbf{f}|$ *este o funcție* μ*-integrabilă din* $\mathcal{L}^1(\mu)$ *și*

$$\int |\mathbf{f}|\, d\mu = \int^* |\mathbf{f}|\, d\mu = N_1(\mathbf{f}, \mu).$$

Faptul că dacă $\mathbf{f} \in \mathcal{L}^1_E(\mu)$, atunci $|\mathbf{f}| \in \mathcal{L}^1(\mu)$ a fost deja demonstrat (propoziția 14, § 7). Egalitatea rezultă din propoziția de mai sus.

Corolarul 2. *O funcție* $\mathbf{f}$ *este* μ*-neglijabilă dacă și numai dacă este* μ*-integrabilă și* $\int |\mathbf{f}|\, d\mu = 0$.

Într-adevăr, dacă $\mathbf{f}$ este μ-neglijabilă, atunci $\mathbf{f}$ este μ-integrabilă și $\mathbf{f}(t) = 0$, μ-aproape peste tot, deci $|\mathbf{f}(t)| = 0$, μ-aproape peste tot și deci $\int^* |\mathbf{f}|\, d\mu = 0$; în baza corolarului 1 rezultă $\int |\mathbf{f}|\, d\mu = 0$.

Reciproc, dacă $\mathbf{f}$ este μ-integrabilă și dacă $\int |\mathbf{f}|\, d\mu = 0$, atunci $\int^* |\mathbf{f}|\, d\mu = \int |\mathbf{f}|\, d\mu$ deci $\int^* |\mathbf{f}|\, d\mu = 0$, adică $|\mathbf{f}|$ este μ-neglijabilă, deci și $\mathbf{f}$ este μ-neglijabilă.

Corolarul 3. *Pentru ca două funcții* μ*-integrabile* $\mathbf{f}$ *și* $\mathbf{g}$ *din* $\mathcal{L}^1_E(\mu)$ *să fie echivalente, este necesar și suficient ca*

$$\int |\mathbf{f} - \mathbf{g}|\, d\mu = 0.$$

Într-adevăr, funcțiile $\mathbf{f}$ și $\mathbf{g}$ din $\mathcal{L}^1_E(\mu)$ sînt echivalente dacă și numai dacă $\mathbf{f} - \mathbf{g}$ este μ-neglijabilă.

Propoziția 3. *Dacă* $\mathbf{f}$ *este o funcție din* $\mathcal{L}^p_E(\mu)$, $1 \leqslant p < +\infty$, *atunci* $|\mathbf{f}|^p$ *este o funcție* μ*-integrabilă, din* $\mathcal{L}^1(\mu)$ *și*

$$N_p(\mathbf{f}, \mu) = \left(\int |\mathbf{f}|^p\, d\mu\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Într-adevăr, dacă $\mathbf{f} \in \mathcal{L}^p_E(\mu)$, atunci (corolarul 1 al teoremei 6, § 7) funcția $|\mathbf{f}|^{p-1}\mathbf{f}$ aparține spațiului $\mathcal{L}^1_E(\mu)$, adică este μ-integrabilă. Din corolarul 1 deducem că funcția

$$|\mathbf{f}|^p = \big||\mathbf{f}|^{p-1}\mathbf{f}\big|$$

este μ-integrabilă și

$$\int |\mathbf{f}|^p\, d\mu = \int^* |\mathbf{f}|^p\, d\mu.$$

Atunci

$$N_p(\mathbf{f}, \mu) = \left(\int^* |\mathbf{f}|^p\, d\mu\right)^{\frac{1}{p}} = \left(\int |\mathbf{f}|^p\, d\mu\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Corolar. *Pentru orice măsură majorată* $\mathbf{m}$ *definită pe* $\mathcal{K}_E(T)$ *și pentru orice funcție* $\mathbf{m}$*-integrabilă* $\mathbf{f}$ *din* $\mathcal{L}^1_E(\mathbf{m})$ *sau din* $\mathcal{L}^1(\mathbf{m})$, *avem*

$$\left|\int \mathbf{f}\,d\mathbf{m}\right| \leqslant \int |\mathbf{f}|\,d|\mathbf{m}|, \quad \left|\int |\mathbf{f}|\,d\mathbf{m}\right| \leqslant \int |\mathbf{f}|\,d|\mathbf{m}|, \quad \text{și} \quad \left|\int \mathbf{f}\,d|\mathbf{m}|\right| \leqslant \int |\mathbf{f}|\,d|\mathbf{m}|.$$

Într-adevăr, pentru orice funcție $\mathbf{f}$ din $\mathcal{L}^1_E(\mathbf{m})$ sau din $\mathcal{L}^1(\mathbf{m})$ avem

$$\left|\int \mathbf{f}\,d\mathbf{m}\right| \leqslant N_1(\mathbf{f}, \mathbf{m}) = N_1(\mathbf{f}, |\mathbf{m}|)$$

$$\left|\int |\mathbf{f}|\,d\mathbf{m}\right| \leqslant N_1(|\mathbf{f}|, \mathbf{m}) = N_1(\mathbf{f}, |\mathbf{m}|)$$

$$\left|\int \mathbf{f}\,d|\mathbf{m}|\right| \leqslant N_1(\mathbf{f}, |\mathbf{m}|)$$

iar

$$N_1(\mathbf{f}, |\mathbf{m}|) = \int |\mathbf{f}|\,d|\mathbf{m}|.$$

Propoziția 4. *Fie* μ *și* ν *două măsuri pozitive. Dacă* $\mu \leqslant \nu$ *și dacă funcția* $\mathbf{f}: T \to E$ *este* ν*-integrabilă, atunci* $\mathbf{f}$ *este* μ*-integrabilă și*

$$\int |\mathbf{f}|\,d\mu \leqslant \int |\mathbf{f}|\,d\nu.$$

Într-adevăr, deoarece $\nu \geqslant \mu$, avem $\mathcal{L}^1_E(\nu) \subset \mathcal{L}^1_E(\mu)$, deci dacă $\mathbf{f}$ este ν-integrabilă, atunci $\mathbf{f}$ este μ-integrabilă. În acest caz avem

$$\int |\mathbf{f}|\,d\mu = \int^* |\mathbf{f}|\,d\mu \leqslant \int^* |\mathbf{f}|\,d\nu = \int |\mathbf{f}|\,d\nu.$$

6. Trecerea la limită în integrale

Fie E și F două spații Banach distincte sau nu și $\mathbf{m}: \mathcal{K}_E \to F$ o măsură *majorată*. În particular $\mathbf{m}$ poate fi o măsură scalară și în acest caz $\mathbf{m}$ poate fi o măsură pozitivă, $\mathbf{m} = |\mathbf{m}|$.

Propoziția 5. *Fie* $(\mathbf{f}_n)$ *un șir de funcții* $\mathbf{m}$*-integrabile din* $\mathcal{L}^1_E(\mathbf{m})$ (*sau din* $\mathcal{L}^1(\mathbf{m})$). *Dacă toate funcțiile* $\mathbf{f}_n$ *au suporturile conținute în aceeași mulțime compactă* $K \subset T$ *și dacă șirul* $(\mathbf{f}_n)$ *converge uniform pe* T *către o funcție* $\mathbf{f}_0$, *atunci* $\mathbf{f}_0$ *este* $\mathbf{m}$*-integrabilă și*

$$\int \mathbf{f}_0\,d\mathbf{m} = \lim_{n\to\infty} \int \mathbf{f}_n\,d\mathbf{m}.$$

Într-adevăr, din propoziția 7, § 7, rezultă că $\mathbf{f}_0 \in \mathcal{L}^1_E(|\mathbf{m}|)$ (sau $\mathbf{f}_0 \in \mathcal{L}^1(|\mathbf{m}|)$) și că șirul $(\mathbf{f}_n)$ converge în medie către $\mathbf{f}_0$. Urmează atunci că

$$\lim_{n\to\infty} \int \mathbf{f}_n \, d\mathbf{m} = \int \mathbf{f}_0 \, d\mathbf{m}.$$

Teorema 2. *Fie* $(\mathbf{f}_n)$ *un șir de funcții* **m**-*integrabile din* $\mathcal{L}^1_E(\mathbf{m})$ (*sau din* $\mathcal{L}^1(\mathbf{m})$). *Dacă șirul* $(\mathbf{f}_n)$ *converge* **m**-*aproape peste tot către o funcție* $\mathbf{f}_0$, *și dacă există o funcție* $\varphi \geqslant 0$ *definită pe* T *astfel încît* $\int^* \varphi \, d|\mathbf{m}| < +\infty$ *și* $|\mathbf{f}_n(t)| \leqslant \varphi(t)$ *aproape peste tot, pentru fiecare* $n \in N$, *atunci funcția* $\mathbf{f}_0$ (*definită* **m**-*aproape peste tot pe* T) *este* **m**-*integrabilă și*

$$\int \mathbf{f}_0 \, d\mathbf{m} = \lim_{n\to\infty} \int \mathbf{f}_n \, d\mathbf{m}.$$

Conform teoremei lui Lebesgue funcția $\mathbf{f}_0$ este echivalentă cu o funcție din $\mathcal{L}^1_E(|\mathbf{m}|)$, deci $\mathbf{f}_0$ este **m**-integrabilă — iar șirul $(\mathbf{f}_n)$ converge în medie către $\mathbf{f}_0$. Urmează atunci că

$$\lim_{n\to\infty} \int \mathbf{f}_n \, d\mathbf{m} = \int \mathbf{f}_0 \, d\mathbf{m}.$$

Corolar. *Fie* $(\mathbf{f}_n)$ *un șir de funcții* **m**-*integrabile din* $\mathcal{L}^1_E(\mathbf{m})$ (*sau din* $\mathcal{L}^1(\mathbf{m})$). *Dacă seria* $\sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{f}_n(t)$ *converge* **m**-*aproape peste tot către o funcție* $\mathbf{f}_0$ *și dacă există o funcție* $\varphi \geqslant 0$ *definită pe* T *astfel încît* $\int^* \varphi \, d|\mathbf{m}| < +\infty$ *și* $|\sum_{k\leqslant n} \mathbf{f}_k(t)| \leqslant \varphi(t)$, $|\mathbf{m}|$ — *aproape peste tot, pentru fiecare* $n \in N$, *atunci funcția* $\mathbf{f}_0$ (*definită* **m**-*aproape peste tot pe* T) *este* **m**-*integrabilă și*

$$\int \mathbf{f} \, d\mathbf{m} = \sum_{n=1}^{\infty} \int \mathbf{f}_n \, d\mathbf{m}.$$

Se aplică teorema precedentă șirului $\mathbf{g}_n = \sum_{k\leqslant n} \mathbf{f}_k$.

Propoziția 6. *Fie* (f_n) *un șir crescător* (*respectiv descrescător*) *de funcții numerice* **m**-*integrabile din* $\mathcal{L}^1(\mathbf{m})$. *Anvelopa superioară* $f = \sup_n f_n$ (*respectiv anvelopa inferioară* $f = \inf_n f_n$) *este* **m**-*integrabilă dacă și numai dacă* $\sup_n \int f_n \, d|\mathbf{m}| < +\infty$ $\left(\text{respectiv } \inf_n \int f_n \, d|\mathbf{m}| > -\infty\right)$.

În acest caz avem

$$\int f \, d\mathbf{m} = \lim_{n\to\infty} \int f_n \, d\mathbf{m}.$$

Să presupunem că f este $\mathbf{m}$-integrabilă. Avem atunci $\sup_n N_1(f, |\mathbf{m}|) < +\infty$, fie că șirul (f_n) este crescător, fie că este descrescător (teorema 5 și corolarul 2, § 7). Din inegalitatea

$$\left|\int f_n \, \mathrm{d}|\mathbf{m}|\right| \leqslant \int |f_n| \, \mathrm{d}|\mathbf{m}| \leqslant N_1(f_n, |\mathbf{m}|)$$

rezultă că

$$\sup_n \int f_n \, \mathrm{d}|\mathbf{m}| \leqslant \sup_n \left|\int f_n \, \mathrm{d}|\mathbf{m}|\right| \leqslant \sup_n N_1(f_n, |\mathbf{m}|) < +\infty$$

și de asemenea

$$\inf_n \int f_n \, \mathrm{d}|\mathbf{m}| \geqslant -\sup_n \left|\int f_n \, \mathrm{d}|\mathbf{m}|\right| > -\infty.$$

Din teorema 5 și corolarul 2, § 7, rezultă că în acest caz șirul (f_n) converge în medie către f și deci

$$\lim_{n\to\infty} \int f_n \, \mathrm{d}\mathbf{m} = \int f \, \mathrm{d}\mathbf{m}.$$

Reciproc, să presupunem că șirul (f_n) este crescător și că $\sup_n \int f_n \, \mathrm{d}|\mathbf{m}| < +\infty$. Atunci funcțiile $g_n = f_n + f_1^-$ sînt *pozitive*, $|\mathbf{m}|$-integrabile și formează un șir crescător, iar

$$N_1(g_n, |\mathbf{m}|) = \int g_n \, \mathrm{d}|\mathbf{m}| = \int f_n \, \mathrm{d}|\mathbf{m}| + \int f_1^- \, \mathrm{d}|\mathbf{m}|.$$

Urmează că

$$\sup_p N_1(g_n, |\mathbf{m}|) = \sup_n \int f_n |\mathbf{m}| + \int f_1^- \mathrm{d}|\mathbf{m}| < +\infty,$$

deci funcția $g = \sup_n g_n = \sup_n f_n + f_1^- = f + f_1^-$ este $|\mathbf{m}|$-integrabilă. Deducem atunci că și funcția $f = g - f_1^-$ este $|\mathbf{m}|$-integrabilă.

Dacă (f_n) este descrescător și $\inf_n \int f_n \, \mathrm{d}|\mathbf{m}| > -\infty$, funcțiile $g_n = -f_n$ formează un șir crescător și $\sup_n \int g_n \, \mathrm{d}|\mathbf{m}| = -\inf_n \int f_n \, \mathrm{d}|\mathbf{m}| < +\infty$. Din cele de mai sus rezultă că funcția $g = \sup_n g_n = -\inf_n f_n = -f$ este $|\mathbf{m}|$-integrabilă și deci și $f = \inf_n f_n = -g$ este $|\mathbf{m}|$-integrabilă.

Cu aceasta propoziția este demonstrată.

Propoziția 7. *Fie (f_n) un șir de funcții numerice $\mathbf{m}$-integrabile din $\mathcal{L}^1(\mathbf{m})$. Pentru ca anvelopa superioară $f = \sup_n f_n$ să fie $\mathbf{m}$-integrabilă, este necesar și suficient să existe o funcție $g \geqslant 0$ astfel ca $\int^* g \, \mathrm{d}|\mathbf{m}| < +\infty$ și $f_n \leqslant g$ pentru orice n.*

Într-adevăr, se ia $p = 1$ și $\mu = |\mathbf{m}|$ în corolarul 3 al teoremei 5, § 7.

Propoziția 8. *Fie* (f_n) *un șir de funcții numerice* **m***-integrabile din* $\mathcal{L}^1(\mathbf{m})$. *Pentru ca anvelopa inferioară* $f = \inf_n f_n$ *să fie* **m***-integrabilă, este necesar și suficient să existe o funcție* $g \leqslant 0$ *astfel ca* $\int^* |g|\,d|\mathbf{m}| < +\infty$ *și* $f_n \geqslant g$ *pentru orice* n.

Se ia $p = 1$ și $\mu = |\mathbf{m}|$ în corolarul 4 al teoremei 5, § 7.

Corolar. *Dacă* (f_n) *este un șir de funcții pozitive* **m***-integrabile din* $\mathcal{L}^1$ (**m**), *atunci anvelopa inferioară* $f = \inf_n f_n$ *este o funcție* **m***-integrabilă din* $\mathcal{L}^1$ (**m**).

Se ia în propoziția precedentă $g(t) \equiv 0$.

7. Caracterizarea funcțiilor numerice integrabile

Fie μ o măsură pozitivă pe T. În particular, μ poate fi modulul $|\mathbf{m}|$ al unei măsuri scalare sau vectoriale.

Propoziția 9. *Pentru ca o funcție numerică* $f \geqslant 0$ (*finită sau infinită*) *semicontinuă inferior să fie* μ*-integrabilă este necesar și suficient ca* $\int^* f\,d\mu < +\infty$.

Condiția $\int^* f\,d\mu < +\infty$ este necesară pentru orice funcție $f \geqslant 0$, μ-integrabilă. Reciproc, să presupunem că $\int^* f\,d\mu < +\infty$. Din definiția integralei superioare $\int^* f\,d\mu = \mu^*(f)$ pentru funcțiile $f \in \mathcal{J}_+$ rezultă că pentru orice $\varepsilon > 0$, există o funcție $g \geqslant 0$, continuă cu suport compact, astfel ca

$$g \leqslant f \quad \text{și} \quad \mu^*(f) \leqslant \mu(g) + \varepsilon.$$

Dar $f - g$ este $\geqslant 0$ și semicontinuă inferior, deci

$$\mu^*(f) = \mu^*(g + f - g) = \mu^*(g) + \mu^*(f - g)$$

de unde

$$N_1(f - g, \mu) = \mu^*(f - g) = \mu^*(f) - \mu(g) < \varepsilon.$$

Rezultă că f este μ-integrabilă.

Corolar. *Pentru ca o funcție finită* $f \geqslant 0$ *semicontinuă superior și cu suport compact să fie* μ*-integrabilă, este* (*necesar și*) *suficient ca* $\int^* f\,d\mu < +\infty$.

Dacă $\int^* f\,d\mu < +\infty$, există o funcție $h \in \mathcal{J}_+$ astfel ca $f \leqslant h$ și $\int^* h\,d\mu < +\infty$. Funcția h este finită μ-aproape peste tot. Funcția $h - f$ este definită peste tot, este semicontinuă inferior și avem

$$\int^* (h - f)\,d\mu \leqslant \int^* h\,d\mu < +\infty$$

deci $h - f$ este μ-integrabilă. Avem apoi $f(t) = h(t) - (h(t) - f(t))$, μ-aproape peste tot; deoarece h și $h-f$ sînt μ-integrabile, rezultă că și f este μ-integrabilă.

Observație. Mai departe (corolarul prop. 5, § 10 și teorema 1, § 11) se va arăta că orice funcție $f \geqslant 0$ semicontinuă superior cu $\int^* f\,d\mu < +\infty$, este μ-integrabilă chiar dacă nu are suport compact.

Teorema 3. *Pentru ca o funcție $f \geqslant 0$ să fie μ-integrabilă, este necesar și suficient ca pentru fiecare număr $\varepsilon > 0$, să existe o funcție semicontinuă superior $g \leqslant f$, finită, $\geqslant 0$ și cu suport compact, și o funcție semicontinuă inferior și μ-integrabilă $h \geqslant g$, astfel încît să avem $f(t) \leqslant h(t)$, μ-aproape peste tot și $\int (h - g)\,d\mu < \varepsilon$.*

Condiția este suficientă: h și g sînt μ-integrabile și $h - f \leqslant h - g$, deci $N_1(h - f) \leqslant N_1(h - g) = \int (h - g)\,d\mu < \varepsilon$. Rezultă că $N_1(f) \leqslant N_1(f) + N_1(h - f) < +\infty$, deci $f \in \mathcal{F}^1$. Rezultă de asemenea că f este aderentă spațiului închis $\mathcal{L}^1$, deci f este μ-integrabilă.

Reciproc, să presupunem că f este μ-integrabilă. Există un șir (K_n) de mulțimi compacte astfel încît, notînd $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} K_n$ și $f' = f\varphi_A$, să avem $f' = f$, μ-aproape peste tot. Funcția f' este de asemenea μ-integrabilă și $\int f'\,d\mu = \int f\,d\mu$.

Fie $\varepsilon > 0$. Există o funcție $\varphi \in \mathcal{K}_+(T)$ astfel ca $N_1(f' - \varphi) < \frac{\varepsilon}{4}$, adică $\mu^*(|f' - \varphi|) < \frac{\varepsilon}{4}$. Deoarece $|f' - \varphi|$ este nulă în afara reuniunii unui șir de mulțimi compacte, există o funcție semicontinuă inferior $\psi \geqslant |f' - \varphi|$ astfel încît $\mu^*(\psi) < \frac{\varepsilon}{2}$. Funcția ψ este deci μ-integrabilă. Avem

$$-\psi(t) \leqslant f'(t) - \varphi(t) \leqslant \psi(t), \text{ pentru } t \in T.$$

Deoarece $\varphi(t)$ este finită, deducem

$$\varphi(t) - \psi(t) \leqslant f'(t) \leqslant \varphi(t) + \psi(t), \text{ pentru } t \in T$$

Deoarece $f'(t) \geqslant 0$, avem chiar

$$(\varphi(t) - \psi(t))^+ \leqslant f'(t) \leqslant \varphi(t) + \psi(t), \text{ pentru } t \in T.$$

Funcția $g = (\varphi - \psi)^+$ este $\geqslant 0$, semicontinuă superior, finită (deoarece $\psi \geqslant 0$, deci $\varphi - \psi$ nu ia valoarea $+\infty$) și cu suport compact (deoarece dacă $\varphi(t) = 0$ și $\psi(t) > 0$, atunci $g(t) = 0$); funcția $h = \varphi + \psi$ este semicontinuă inferior și avem $g \leqslant f' \leqslant h$ și

$$\int (h - g)\,d\mu \leqslant \int [(\varphi + \psi) - (\varphi - \psi)]\,d\mu = 2\int \psi\,d\mu < \varepsilon.$$

Deoarece $f(t) = f'(t)$ μ-aproape peste tot, deducem $f(t) \leqslant h(t)$, μ-aproape peste tot.

Cu aceasta teorema este demonstrată.

Observație. Din demonstrație rezultă că dacă f este majorată de o funcție semicontinuă inferior integrabilă, atunci se poate alege h astfel încît să avem $h(t) \geqslant f(t)$ peste tot.

Corolar. *Fie* $\mathbf{m} : \mathcal{K}_B(T) \to F$ *o măsură majorată.*

Pentru orice funcție numerică $|\mathbf{m}|$ *-integrabilă* $f \geqslant 0$, *există un șir crescător* (g_n) *de funcții* $\geqslant 0$, *finite, semicontinue superior și cu suport compact, și un șir descrescător* (h_n) *de funcții* $\geqslant 0$ *semicontinue inferior* μ*-integrabile astfel încît* :

1) $g_n(t) \leqslant f(t)$ *și* $g_n(t) \leqslant h_n(t)$, *pentru orice* $t \in T$ *și orice* $n \in N$, $f(t) \leqslant h_n(t)$, μ*-aproape peste tot, pentru fiecare* $n \in N$;

2) $f(t) = \sup_n g_n(t)$, $|\mathbf{m}|$ *-aproape peste tot și*

$f(t) = \inf_n h_n(t)$, $|\mathbf{m}|$ *-aproape peste tot* ;

3) $\int f \, \mathrm{d}\mathbf{m} = \lim_{n\to\infty} \int g_n \, \mathrm{d}\mathbf{m} = \lim_{n\to\infty} \int h_n \, \mathrm{d}\mathbf{m}$.

Pentru orice n există o funcție $\psi_n \geqslant 0$ finită, semicontinuă superior și cu suport compact și o funcție $\varphi_n \geqslant 0$ semicontinuă inferior și μ-integrabilă astfel încît

$$\psi_n \leqslant f, \quad \psi_n \leqslant \varphi_n, \quad f(t) \leqslant \varphi_n(t), \quad |\mathbf{m}|\text{-aproape peste tot}$$

și

$$\int (\varphi_n - \psi_n) \, \mathrm{d}|\mathbf{m}| < \frac{1}{n}.$$

Luăm pentru fiecare n,

$$g_n = \sup(\psi_1, \ldots, \psi_n) \quad \text{și} \quad h_n = \inf(\varphi_1, \ldots \varphi_n).$$

Funcțiile g_n și h_n au proprietățile din enunț și îndeplinesc condiția 1).

Fie $g + \sup_n g_n$ și $h = \inf_n h_n$. Deoarece $\sup_n \int^* g_n \, \mathrm{d}|\mathbf{m}| \leqslant \int^* f \mathrm{d}|\mathbf{m}| < +\infty$, rezultă că g este $|\mathbf{m}|$ -integrabilă și

$$\int (f - g_n) \, \mathrm{d}|\mathbf{m}| \leqslant \int (\varphi_n - \psi_n) \, \mathrm{d}|\mathbf{m}| \leqslant \frac{1}{n}$$

deci

$$\int (f - g) \, \mathrm{d}|\mathbf{m}| = \lim_{n\to\infty} \int (f - g_n) \, \mathrm{d}|\mathbf{m}| = 0 .$$

Rezultă că f și g sînt echivalente, adică egale $|\mathbf{m}|$-aproape peste tot. La fel se arată că f și h sînt egale $|\mathbf{m}|$-aproape peste tot și astfel condiția 2) este îndeplinită. Condiția 3) rezultă din propoziția 6 :

$$\int f \mathrm{d}\mathbf{m} = \int g \, \mathrm{d}\mathbf{m} = \lim_{n\to\infty} \int g_n \, \mathrm{d}\mathbf{m} ,$$

$$\int f \mathrm{d}\mathbf{m} = \int h \, \mathrm{d}\mathbf{m} = \lim_{n\to\infty} \int h_n \, \mathrm{d}\mathbf{m} .$$

Observație. Dacă funcția f este majorată de o funcție semicontinuă inferior integrabilă, atunci se pot alege funcțiile h_n astfel încît să avem $f(t) \leqslant h_n(t)$, pentru orice $t \in T$ și orice n.

8. Mulțimi integrabile

Fie E și F două spații Banach distincte sau nu (considerate ambele reale sau ambele complexe). În particular unul sau ambele spații E și F pot fi egale cu R sau cu C.

Fie $\mathbf{m} : \mathcal{K}_E(T) \to F$ o măsură majorată și $\mu = |\mathbf{m}|$. În particular, $\mathbf{m}$ poate fi o măsură pozitivă și în acest caz $\mu = \mathbf{m}$.

Definiția 2. *Spunem că o mulțime $A \subset T$ este integrabilă în raport cu* $\mathbf{m}$, *sau* $\mathbf{m}$-*integrabilă, dacă funcția sa caracteristică* φ_A *este o funcție* $\mathbf{m}$-*integrabilă, din* $\mathcal{L}^1(\mathbf{m})$. *Integrala* $\int \varphi_A \, d\mathbf{m}$ *a funcției caracteristice* φ_A *în raport cu* $\mathbf{m}$ *se numește măsura mulțimii* A *și se notează* $\mathbf{m}(A)$:

$$\mathbf{m}(A) = \int \varphi_A \, d\mathbf{m}.$$

Să observăm că măsura $\mathbf{m}(A)$ a unei mulțimi A $\mathbf{m}$-integrabile este un element al spațiului $\mathcal{L}(E, F)$.

Dacă m este o măsură scalară (reală sau complexă), atunci $m(A)$ este un scalar (număr real, respectiv complex). Dacă m este o măsură *pozitivă*, atunci $0 \leqslant m(A) < +\infty$.

Să observăm, de asemenea, că o măsură scalară m poate fi totdeauna extinsă la spațiul $\mathcal{K}_E(T)$ cu valori în E și deci măsura $m(A)$ poate fi considerată un element din $\mathcal{L}(E, E)$, oricare ar fi spațiul Banach E.

Pentru orice mulțime $\mathbf{m}$-integrabilă $A \subset T$ avem

$$|\mathbf{m}(A)| \leqslant \mu(A).$$

Într-adevăr, $\left|\int \varphi_A \, d\mathbf{m}\right| \leqslant \int \varphi_A \, d\mu$ și $\mathbf{m}(A) = \int \varphi_A \, d\mathbf{m}$ iar $\mu(A) = \int \varphi_A \, d\mu$.

Dacă E și F sînt spații Banach cu involuție și dacă $A \subset T$ este $\mathbf{m}$-integrabilă, atunci A este $\overline{\mathbf{m}}$-integrabilă și avem

$$\overline{\mathbf{m}}(A) = \overline{\mathbf{m}(A)}.$$

Propoziția 10. *Dacă A este o mulțime μ-integrabilă, atunci* $\mu(A) = \mu^*(A)$.

Într-adevăr, $\mu(A) = \int \varphi_A \, d\mu$ și $\mu^*(A) = \int^* \varphi_A \, d\mu$.

Pe de altă parte, dacă A este μ-integrabilă, atunci funcția pozitivă φ_A este integrabilă în raport cu măsura pozitivă μ, deci $\int \varphi_A \, d\mu = \int^* \varphi_A \, d\mu$. Rezultă atunci că $\mu(A) = \mu^*(A)$.

Corolar. *O mulțime A este μ-neglijabilă dacă și numai dacă A este μ-integrabilă și $\mu(A) = 0$.*

În particular, mulțimea vidă $\varnothing$ este μ-integrabilă și $\mu(\varnothing) = 0$.

Să notăm cu $\mathcal{B}(\mathbf{m})$ mulțimea părților **m**-integrabile $A \subset T$. Avem $\mathcal{B}(\mathbf{m}) = \mathcal{B}(\mu)$. Vom arăta că $\mathcal{B}(\mathbf{m})$ este un semitrib *) care conține semitribul $\mathcal{B}$ al părților boreliene relativ compacte.

Propoziția 11. *Dacă (A_n) este un șir de părți μ-integrabile, atunci intersecția $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$ este μ-integrabilă. Dacă există o mulțime C astfel încît $\mu^*(C) < +\infty$ (în particular dacă C este μ-integrabilă) și astfel încît $A_n \subset C$ pentru orice $n \in N$, atunci reuniunea $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ este μ-integrabilă.*

Să notăm mai întîi $A = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$. Avem $\varphi_A = \inf_n \varphi_{A_n}$ iar funcțiile φ_{A_n} sînt pozitive și μ-integrabilă.

Din corolarul propoziției 8 rezultă că φ_A este μ-integrabilă, deci A este μ-integrabilă.

Să notăm acum $B = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$. Avem $\varphi_B = \sup_n \varphi_{A_n}$, φ_{A_n} sînt μ-integrabile, $\int^* \varphi_C \, d\mu = \mu^*(C) < +\infty$ și $\varphi_{A_n} \leqslant \varphi_C$ pentru orice $n \in N$. Rezultă atunci că B este μ-integrabilă.

Corolarul 1. *Dacă (A_n) este un șir de mulțimi μ-integrabile și dacă $\sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n) < +\infty$, atunci reuniunea $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ este μ-integrabilă.*

Într-adevăr, luînd $C = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ avem $A_n \subset C$ pentru orice $n \in N$ și

$$\mu^*(C) = \mu^*\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(A_n) < +\infty .$$

Din propoziția precedentă rezultă că $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ este μ-integrabilă.

Corolarul 2. *Intersecția și reuniunea unei familii finite $(A_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ de mulțimi μ-integrabile, sînt mulțimi μ-integrabile.*

Într-adevăr, luînd $A_{n+p} = A_n$ pentru orice $p \in N$, șirul $(A_i)_{1 \leqslant i < \infty}$ este format din funcții μ-integrabile, deci intersecția

$$\bigcap_{i=1}^{n} A_i = \bigcap_{i=1}^{\infty} A_i$$

*) Un semitrib este o clasă nevidă de părți, care conține diferențele, reuniunile finite și intersecțiile numărabile.

este o mulțime μ-integrabilă.

Pe de altă parte, luînd $A_{n+p} = \varnothing$ pentru orice $p \in N$, șirul $(A_i)_{1 \leqslant i < +\infty}$ este format din funcții μ-integrabile și

$$\sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i) = \sum_{i=1}^{n} \mu(A_i) < +\infty .$$

Urmează că mulțimea

$$\bigcup_{i=1}^{n} A_i = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$$

este μ-integrabilă.

Propoziția 12. *Dacă A și B sînt două mulțimi μ-integrabile, atunci $A - B$ este o mulțime integrabilă.*

Într-adevăr,

$$A - B = A - (A \cap B)$$

iar $A \cap B \subset A$, deci $\varphi_{A-B} = \varphi_A - \varphi_{A \cap B}$. Mulțimile A și $A \cap B$ sînt μ-integrabile, deci funcțiile φ_A și $\varphi_{A \cap B}$ sînt μ-integrabile. Rezultă atunci că φ_{A-B} este integrabilă, deci $A - B$ este μ-integrabilă.

Propoziția aceasta și corolarul 2 al propoziției precedente arată că $\mathcal{B}(\mathbf{m})$ este un semitrib.

Propoziția 13. *Mulțimile boreliene relativ compacte sînt integrabile pentru orice măsură μ.*

Într-adevăr, mulțimile compacte $K \subset T$ sînt μ-integrabile, deoarece funcțiile lor caracteristice φ_K sînt finite, semicontinue superior, cu suportul compact și $\mu^*(\varphi_K) < +\infty$. Deoarece semitribul mulțimilor μ-integrabile conține toate mulțimile compacte, el conține toate mulțimile boreliene relativ compacte.

Propoziția 14. *O mulțime deschisă $G \supset T$ este μ-integrabilă dacă și numai dacă $\mu^*(G) < +\infty$.*

Într-adevăr, funcția φ_G este semicontinuă inferior, deci este μ-integrabilă dacă și numai dacă $\mu^*(\varphi_G) < +\infty$.

Observație. Se va arăta mai departe (corolarul prop. 5, § 10 și teorema 1, § 11) că o mulțime închisă $A \subset T$ este μ-integrabilă dacă și numai dacă $\mu^*(A) < +\infty$.

Vom arăta acum că aplicația $A \to \mathbf{m}(A)$ este o funcție de mulțime numărabil aditivă.

Propoziția 15. *Dacă (A_n) este un șir de mulțimi $\mathbf{m}$-integrabile, disjuncte două cîte două, și dacă reuniunea $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ este $\mathbf{m}$-integrabilă, atunci*

$$\mathbf{m}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{m}(A_n) .$$

Într-adevăr, dacă $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$, atunci $\varphi_A = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_{A_n}$, $\sum_{i=1}^{n} \varphi_{A_i} \leqslant \varphi_A$ pentru fiecare $n \in N$ și $\int^* \varphi_A \, d\mu = \mu(A) < +\infty$. Rezultă atunci din corolarul teoremei 2 că

$$\mathbf{m}(A) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{m}(A_n).$$

Corolar. *Dacă $(A_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ este o familie finită de mulțimi integrabile, disjuncte două cîte două, atunci*

$$\mathbf{m}\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{m}(A_i).$$

Într-adevăr, reuniunea $\bigcup_{i=1}^{n} A_i$ este m-integrabilă.

Luînd $A_{n+p} = \varnothing$ pentru orice $p \in N$, $(A_i)_{1 \leqslant i < +\infty}$ este un șir de mulțimi m-integrabile a cărei reuniune

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i = \bigcup_{i=1}^{n} A_i$$

este m-integrabilă. Rezultă atunci că

$$\mathbf{m}\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \mathbf{m}\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mathbf{m}(A_i) = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{m}(A_i).$$

Propoziția 16. *Dacă A și B sînt două mulțimi* m*-integrabile și dacă $A \supset B$, atunci* $\mathbf{m}(A - B) = \mathbf{m}(A) - \mathbf{m}(B)$.

Într-adevăr, $\varphi_{A-B} = \varphi_A - \varphi_B$, deci $\int \varphi_{A-B} \, \mathbf{dm} = \int \varphi_A \, \mathbf{dm} - \int \varphi_B \, \mathbf{dm}$ de unde

$$\mathbf{m}(A - B) = \mathbf{m}(A) - \mathbf{m}(B).$$

Propoziția 17. *Fie (A_n) un șir crescător de părți* m*-integrabile. Pentru ca reuniunea $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ să fie* m*-integrabilă, este necesar și suficient ca $\sup_n \mu(A_n) < +\infty$. În acest caz avem*

$$\mathbf{m}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \lim_{n \to \infty} \mathbf{m}(A_n).$$

Într-adevăr, $\varphi_A = \sup_n \varphi_{A_n}$ și (φ_{A_n}) este un șir crescător de funcții m-integrabile. Atunci funcția φ_A este m-integrabilă dacă și numai dacă $\sup_n \int \varphi_{A_n} \, d\mu < +\infty$ și în acest caz avem

$$\int \varphi_A \, \mathbf{dm} = \lim_{n \to \infty} \int \varphi_{A_n} \, \mathbf{dm}.$$

Rezultă că A este m-integrabilă dacă și numai dacă $\sup_n \mu(A_n) < +\infty$ și în acest caz avem

$$\mathrm{m}(A) = \lim_{n\to\infty} \mathrm{m}(A_n).$$

Propoziția 18. *Pentru orice șir descrescător* (A_n) *de mulțimi* m-*integrabile avem*

$$\mathrm{m}\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \lim_{n\to\infty} \mathrm{m}(A_n).$$

Într-adevăr, dacă $A = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$, atunci $\varphi_A = \inf_n \varphi_{A_n}$ iar (φ_{A_n}) formează un șir descrescător de funcții pozitive m-integrabile. Rezultă atunci că

$$\mathrm{m}(A) = \lim_{n\to\infty} \mathrm{m}(A_n).$$

Măsurile pozitive au proprietăți suplimentare.

Propoziția 19. *Pentru orice familie* (A_i) *finită sau numărabilă de mulțimi* μ-*integrabile a căror reuniune este* μ-*integrabilă, avem*

$$\mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) \leqslant \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i).$$

Într-adevăr, mulțimile A_i și $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$ fiind μ-integrabile, avem

$$\mu(A_i) = \mu^*(A_i) \quad \text{și} \quad \mu\left(\bigcup_i A_i\right) = \mu^*\left(\bigcup_i A_i\right).$$

Propoziția rezultă atunci din inegalitatea

$$\mu^*\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) \leqslant \sum_{i=1}^{\infty} \mu^*(A_i).$$

Propoziția 20. *Dacă* A *și* B *sînt două mulțimi integrabile și dacă* $A \subset B$, *atunci* $\mu(A) \leqslant \mu(B)$.

Într-adevăr, $\varphi_A \leqslant \varphi_B$, deci $\int \varphi_A \, d\mu \leqslant \int \varphi_B \, d\mu$ de unde $\mu(A) \leqslant \mu(B)$.

Propoziția 21. *Dacă* (A_n) *este un șir crescător* (*respectiv descrescător*) *de mulțimi* μ-*integrabile a căror reuniune este* μ-*integrabilă, atunci*

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \lim_{n\to\infty} \mu(A_n) = \sup_n \mu(A_n)$$

$$\left(\textit{respectiv } \mu\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \lim_{n\to\infty} \mu(A_n) = \inf_n \mu(A_n)\right).$$

Într-adevăr, șirul $(\mu(A_n))$ este crescător (respectiv descrescător) și

$$\sup_n \mu(A_n) = \lim_{n\to\infty} \mu(A_n)$$

(respectiv $\inf_n \mu(A_n) = \lim_{n\to\infty} \mu(A_n)$).

Teorema 4. *Fie $A \subset T$ o mulțime astfel încît*

$$\mu^*(A) = \inf_{G \supset A} \mu^*(G), \quad G \text{ deschisă.}$$

Mulțimea A este μ-integrabilă dacă și numai dacă pentru orice număr $\varepsilon > 0$ există o mulțime compactă K și o mulțime deschisă μ-integrabilă G, astfel încît $K \subset A \subset G$ și

$$\mu(G - K) = \mu(G) - \mu(K) < \varepsilon .$$

Să presupunem mai întîi că pentru orice $\varepsilon > 0$, există o mulțime compactă $K_\varepsilon \subset A$ și o mulțime deschisă μ-integrabilă $G_\varepsilon \supset A$ astfel încît $\mu(G_\varepsilon - A_\varepsilon) < \varepsilon$. Atunci $\varphi_{K_\varepsilon} \leqslant \varphi_A \leqslant \varphi_{G_\varepsilon}$, deci

$$\mu^*(\varphi_A - \varphi_{K_\varepsilon}) \leqslant \mu^*(\varphi_{G_\varepsilon} - \varphi_{K_\varepsilon}) < \varepsilon$$

de unde

$$\mu^*(\varphi_A) \leqslant \mu^*(\varphi_A - \varphi_{K_\varepsilon}) + \mu(K_\varepsilon) < +\infty .$$

Rezultă mai întîi că $\varphi_A \in \mathcal{F}^1$, și apoi că φ_A poate fi aproximată în medie prin funcțiile μ-integrabile φ_{K_ε}, deci φ_A este μ-integrabilă și deci A este μ-integrabilă.

Reciproc, să pesupunem că A este μ-integrabilă și fie $\varepsilon > 0$. Există o mulțime deschisă $G \supset A$ astfel ca $\mu^*(G) < \mu(A) + \frac{\varepsilon}{2} < +\infty$. Mulțimea G este μ-integrabilă și $\mu(G) - \mu(A) < \frac{\varepsilon}{2}$.

Deoarece φ_A este μ-integrabilă, există o funcție $f \geqslant 0$ semicontinuă superior și cu suportul compact H, astfel ca $f \leqslant \varphi_A$ și $\int (\varphi_A - f)\, d\mu < \frac{\varepsilon}{4}$. Rezultă că

$$\mu(A) \leqslant \int f\, d\mu + \frac{\varepsilon}{4} .$$

Fie $\delta < 0$ astfel ca $\delta\mu(A) < \frac{\varepsilon}{4}$ și fie $K = \{t \mid t \in H,\ f(t) \geqslant \delta\}$. Mulțimea K este închisă și conținută în H, deci K este compactă. Deoarece $f \leqslant \varphi_A$, avem $K \subset A$. Mulțimea $B = A - K$ este μ-integrabilă și $f \leqslant \varphi_K + \delta\varphi_B$, deci

$$\int f\, d\mu \leqslant \mu(K) + \delta\mu(B) \leqslant \mu(K) + \delta\mu(A) \leqslant \mu(K) + \frac{\varepsilon}{4}$$

de unde

$$\mu(A) \leqslant \int f\, d\mu + \frac{\varepsilon}{2} \leqslant \mu(K) + \frac{\varepsilon}{2} .$$

Rezultă atunci

$$\mu(G - K) = \mu(G) - \mu(K) = \mu(G) - \mu(A) + \mu(A) - \mu(K) < \varepsilon$$

și teorema este demonstrată.

Corolarul 1. *Fie A o mulțime conținută în reuniunea unui șir de mulțimi compacte. Mulțimea A este μ-integrabilă dacă și numai dacă pentru orice $\varepsilon > 0$ există o mulțime compactă K și o mulțime deschisă μ-integrabilă G astfel încît $K \subset A \subset G$ și $\mu(G - K) < \varepsilon$.*

Într-adevăr, în acest caz

$$\mu^*(A) = \inf_{G \supset A} \mu^*(G), \quad G \text{ deschisă}.$$

În particular, teorema este adevărată pentru mulțimile relativ compacte.

Corolarul 2. *Pentru orice mulțime boreliană relativ compactă A și orice număr $\varepsilon > 0$, există o mulțime compactă $K \subset A$ și o mulțime deschisă relativ compactă $G \supset A$, astfel încît, oricare ar fi mulțimea boreliană relativ compactă A' cu $K \subset A' \subset G$, să avem $|\mathbf{m}(A) - \mathbf{m}(A')| < \varepsilon$.*

Într-adevăr, mulțimea boreliană relativ compactă A este μ-integrabilă. Pentru $\varepsilon > 0$, există o mulțime compactă $K \subset A$ și o mulțime deschisă μ-integrabilă $G \supset A$, pe care o putem alege relativ compactă, astfel încît $\mu(G - K) < \frac{\varepsilon}{2}$. Dacă A' este o mulțime boreliană relativ compactă și $K \subset A' \subset G$, avem

$$|\mathbf{m}(A) - \mathbf{m}(A')| = |\mathbf{m}(A) - \mathbf{m}(K) - (\mathbf{m}(A') - \mathbf{m}(K))| =$$
$$= |\mathbf{m}(A - K) - \mathbf{m}(A' - K)| \leqslant |\mathbf{m}(A - K)| + |\mathbf{m}(A' - K)| \leqslant$$
$$\leqslant \mu(A - K) + \mu(A' - K) \leqslant 2\mu(G - K) < \varepsilon.$$

Corolarul 2 exprimă faptul că măsura $\mathbf{m}$ este *regulată*.

Teorema 5. *O mulțime $A \subset T$ este μ-integrabilă, dacă și numai dacă, pentru fiecare număr $\varepsilon > 0$, există o mulțime compactă $K \subset A$ astfel încît $\mu^*(A - K) < \varepsilon$.*

Dacă pentru fiecare $\varepsilon > 0$ există o mulțime compactă $K \subset A$ cu $\mu^*(A - K) < \varepsilon$, se arată ca în teorema 3 că A este μ-integrabilă.

Reciproc, să presupunem că A este μ-integrabilă și fie $\varepsilon > 0$.

Deoarece

$$\mu^*(A) = \sup_K \mu^*(A \cap K), \quad K \text{ compactă},$$

există o mulțime compactă L astfel încît

$$\mu^*(A) \leqslant \mu^*(A \cap L) + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Mulțimea $A \cap L$ este μ-integrabilă și relativ compactă, deci

$$\mu^*(A \cap L) = \inf_{G \supset A \cap L} \mu^*(G), \quad G \text{ deschisă}.$$

Conform teoremei 3, există o mulțime compactă $K \subset A \cap L$ și o mulțime deschisă μ-integrabilă $G \supset A \cap L$ astfel încît $\mu(G - K) < \frac{\varepsilon}{2}$. Atunci $K \subset A$ și

$$\mu(A - K) = \mu(A) - \mu(K) \leqslant \mu(A \cap L) - (K) + \frac{\varepsilon}{2} \leqslant$$
$$\leqslant \mu(G) - \mu(K) + \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon.$$

Corolarul 1. *Dacă $A \subset T$ este o mulțime integrabilă, există un șir (K_n) de mulțimi compacte conținute în A, disjuncte două cîte două, astfel încît mulțimea $A - \bigcup_{n=1}^{\infty} K_n$ să fie μ-neglijabilă. Avem atunci*

$$\mu(A) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(K_n).$$

Definim șirul (K_n) prin recurență astfel: alegem $K_1 \subset A$ astfel încît $\mu(A - K_1) < 1$; pentru orice $n > 1$, alegem $K_n \subset A - \bigcup_{i<n} K_i$ astfel încît

$$\mu[(A - \bigcup_{i<n} K_i) - K_n] < \frac{1}{n}.$$

Aceasta înseamnă că

$$\mu(A - \bigcup_{i \leqslant n} K_i) < \frac{1}{n} \text{ pentru fiecare } n \in N.$$

Mulțimile K_n astfel alese sînt disjuncte două cîte două și

$$\mu^*\left(A - \bigcup_{i=1}^{\infty} K_i\right) \leqslant \mu\left(A - \bigcup_{i \leqslant n} K_i\right) < \frac{1}{n} \text{ pentru orice } n \in N$$

deci

$$\mu^*\left(A - \bigcup_{i=1}^{\infty} K_i\right) = 0,$$

adică mulțimea $N = A - \bigcup_{i=1}^{\infty} K_i$ este μ-neglijabilă. Atunci N este μ-integrabilă, deci mulțimea $A - N = \bigcup_{i=1}^{\infty} K_i$ este μ-integrabilă și

$$\mu(A) = \mu(A - N) = \mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} K_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(K_i).$$

Corolarul 2. *Dacă $A \subset T$ este o mulțime μ-integrabilă, există un șir crescător (K_n) de mulțimi compacte conținute în A astfel ca mulțimea $A - \bigcup_{n=1}^{\infty} K_n$ să fie μ-neglijabilă și*

$$\mu(A) = \sup_n \mu(K_n) = \lim_{n \to \infty} \mu(K_n).$$

Dacă A este μ-integrabilă și dacă $\mu(A) = \inf_{G \supset A} \mu^*(G)$, G deschisă, există un șir descrescător (G_n) de mulțimi deschise μ-integrabile care conțin pe A, astfel încît mulțimea $\bigcap_{n=1}^{\infty} G_n - A$ să fie μ-neglijabilă și

$$\mu(A) = \inf_n \mu(G_n) = \lim_{n \to \infty} \mu(G_n).$$

Se aplică teoremele 3 și 4 pentru $\varepsilon = \frac{1}{n}$: se obține un șir (H_n) de mulțimi compacte conținute în A, astfel încît $\mu(A) - \mu(H_n) < \frac{1}{n}$, respectiv un șir $U_n \supset A$ de mulțimi deschise μ-integrabile astfel ca $\mu(U_n) - \mu(A) < \frac{1}{n}$. Deducem că

$$\lim_{n \to \infty} \mu(H_n) = \mu(A) \quad \text{și} \quad \lim_{n \to \infty} \mu(U_n) = \mu(A).$$

Pentru fiecare n să notăm $K_n = \bigcup_{i=1}^{n} H_i$ respectiv $G_n = \bigcap_{i=1}^{n} U_i$. Mulțimile (K_n) sînt compacte, conținute în A și formează un șir crescător; mulțimile (G_n) sînt deschise, μ-integrabile, conțin pe A și formează un șir descrescător, și avem

$$\mu(H_n) \leqslant \mu(K_n) \leqslant \mu(A), \quad \text{respectiv} \quad \mu(A) \leqslant \mu(G_n) < \mu(U_n)$$

deci

$$\lim_{n \to \infty} \mu(K_n) = \mu(A), \quad \text{respectiv} \quad \mu(A) = \lim_{n \to \infty} \mu(G_n).$$

Egalitățile $\lim_{n \to \infty} \mu(K_n) = \sup_n \mu(K_n)$ și $\lim_{n \to \infty} \mu(G_n) = \inf_n \mu(G_n)$ rezultă din faptul că șirul $(\mu(K_n))$ este crescător, iar șirul $(\mu(G_n))$ este descrescător. Avem apoi

$$\mu^*\left(A - \bigcup_{n=1}^{\infty} K_n\right) \leqslant \mu(A - K_n) < \frac{1}{n} \text{ pentru orice } n,$$

respectiv

$$\mu^*\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} G_n - A\right) \leqslant \mu(G_n - A) \leqslant \frac{1}{n}, \text{ pentru orice } n$$

deci

$$\mu^*\left(A - \bigcup_{n=1}^{\infty} K_n\right) = 0 \quad \text{respectiv} \quad \mu^*\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} G_n - A\right) = 0$$

de unde rezultă că mulțimea $A - \bigcup_{n=1}^{\infty} K_n$, respectiv mulțimea $\bigcap_{n=1}^{\infty} G_n - A$, este μ-neglijabilă.

Corolarul 3. *Pentru orice mulțime μ-integrabilă $A \subset T$ avem*

$$\mu(A) = \sup_{K \subset A} \mu(K), \quad K \text{ compactă.}$$

Dacă A este μ-integrabilă și

$$\mu(A) = \inf_{G \supset A} \mu^*(G), \quad G \text{ deschisă,}$$

avem

$$\mu(A) = \inf_{G \supset A} \mu(G), \quad G \text{ dechisă, } \mu\text{-integrabilă.}$$

9. Funcții etajate integrabile

Propoziția 22. *Fie μ o măsură pozitivă. Dacă A este o mulțime μ-integrabilă relativ compactă, atunci funcția φ_A este p-sumabilă oricare ar fi p astfel ca $1 \leqslant p < +\infty$.*

Fie $\varepsilon > 0$; există o mulțime compactă $K \subset A$ și o mulțime deschisă μ-integrabilă $G \supset A$ astfel încît $\mu(G) - \mu(K) < \varepsilon^p$. Deoarece A este relativ compactă, putem alege mulțimea G relativ compactă, înlocuind-o, la nevoie, cu intersecția sa cu o vecinătate deschisă relativ compactă a lui $\bar{A}$.

Există o funcție $\varphi : T \to [0,1]$, continuă cu suport compact, egală cu 1 pe K și nulă pe $\complement G$. Atunci $|\varphi_A(t) - \varphi(t)| \leqslant 1$ pentru orice $t \in T$ și $\varphi(t) = \varphi_A(t)$ pentru $t \in K$ și pentru $t \in \complement G$. Deducem că $|\varphi_A(t) - \varphi(t)| \leqslant \varphi_{G-K}(t)$, deci

$$N_p(\varphi_A - \varphi) = \left(\int^* |\varphi_A(t) - \varphi(t)|^p \, d\mu\right)^{\frac{1}{p}} \leqslant$$

$$\leqslant \left(\int \varphi_{G-K}(t) \, d\mu\right)^{\frac{1}{p}} = [\mu(G - K)]^{\frac{1}{p}} < \varepsilon.$$

Așadar φ_A se poate aproxima în medie de ordin p cu funcții din $\mathcal{K}(T)$. Rezultă că $\varphi_A \in \mathcal{L}^p(\mu)$.

Corolar. *Oricare ar fi măsura μ și oricare ar fi p cu $1 \leqslant p < \infty$, spațiul $\mathcal{L}^p_E(\mu)$ conține spațiul $\mathcal{E}_E(\mathcal{B})$ al funcțiilor boreliene etajate de forma $\sum_{i=1}^{n} \varphi_{A_i} x_i$ cu $A_i \in \mathcal{B}$ și $x_i \in E$.*

Într-adevăr, orice mulțime boreliană relativ compactă A este μ-integrabilă, oricare ar fi măsura pozitivă μ. Urmează că pentru $A_i \in \mathcal{B}$ avem $\varphi_{A_i} \in \mathcal{L}^p(\mu)$ și deci pentru $x_i \in E$ avem $\varphi_{A_i} x \in \mathcal{L}^p_E(\mu)$, de unde $\sum_{i=1}^{n} \varphi_{A_i} x_i \in \mathcal{L}^p_E(\mu)$.

Lema 1. *Fie Φ un clan*) de părți ale lui T, astfel încît pentru fiecare punct $t \in T$, Φ conține un sistem fundamental de vecinătăți ale lui t. Atunci, pentru orice funcție continuă $\mathfrak{f} : T \to E$ cu suportul compact K, și pentru orice vecinătate U a lui K, există un șir de funcții Φ-etajate de forma $\sum_i \varphi_{A_i} x_i$ cu $A_i \in \Phi$ și $x_i \in E$, cu suporturile conținute în U, uniform convergent către $\mathfrak{f}$.*

Fie $\varepsilon > 0$. Deoarece $\mathfrak{f}$ este continuă, pentru orice punct $t_0 \in K$ există o vecinătate $V_0 \in \Phi$ a lui t_0 astfel încît $V_0 \subset U$ și

$$|\mathfrak{f}(t) - \mathfrak{f}(t_0)| < \frac{\varepsilon}{2} \text{ pentru orice } t \in V_0.$$

Dacă $t, t' \in V_0$, atunci $|\mathfrak{f}(t) - \mathfrak{f}(t')| < \varepsilon$.

*) Un clan este o clasă nevidă de părți ale lui T, care conține diferențele și reuniunile finite.

Deoarece K este compact, putem găsi o familie finită $V_1, \ldots, V_n$ de mulțimi din Φ, conținute în U, al căror interior acoperă pe K, astfel încît pentru fiecare i să avem

$$|\mathbf{f}(t) - \mathbf{f}(t')| < \varepsilon, \text{ dacă } t, t' \in V_i.$$

Să notăm $A_1 = V_1$ și pentru $1 < k \leqslant n$ să definim

$$A_k = V_k - \bigcup_{i<k} A_i.$$

Mulțimile A_k aparțin lui Φ, sînt conținute în U, sînt disjuncte două cîte două

$$\bigcup_{i=1}^{n} A_i = \bigcup_{i=1}^{n} V_i \supset K$$

și $A_i \subset V_i$ pentru fiecare i, deci

$$|\mathbf{f}(t) - \mathbf{f}(t')| < \varepsilon \text{ dacă } t, t' \in A_i.$$

Pentru fiecare i să alegem un punct $t_i \in A_i$ și să notăm $x_i = \mathbf{f}(t_i)$. Să definim funcția Φ -etajată

$$\mathbf{f}_\varepsilon = \sum_{i=1}^{n} \varphi_{A_i} x_i.$$

Funcția $\mathbf{f}_\varepsilon$ are suportul conținut în U și pentru orice $t \in T$ avem $|\mathbf{f}(t) - \mathbf{f}_\varepsilon(t)| < \varepsilon$. Într-adevăr, dacă t nu aparține nici uneia din mulțimile A_i, avem $\mathbf{f}(t) = 0$ și $\mathbf{f}_\varepsilon(t) = 0$; dacă t aparține unei mulțimi A_k, atunci

$$\mathbf{f}_\varepsilon(t) = \sum_{i=1}^{n} \varphi_{A_i}(t)\, x_i = x_k = \mathbf{f}(t_k)$$

și deci

$$|\mathbf{f}(t) - \mathbf{f}_\varepsilon(t)| = |\mathbf{f}(t) - \mathbf{f}(t_k)| < \varepsilon.$$

Luînd $\varepsilon = 1, \frac{1}{2}, \ldots, \frac{1}{n}, \ldots$ obținem un șir $(\mathbf{f}_n)$ de funcții etajate cu suporturile conținute în U, uniform convergent către $\mathbf{f}$.

Observație. Se poate alege Φ un clan care conține toate mulțimile compacte. În acest caz funcția $\mathbf{f}$ poate fi aproximată uniform cu funcții Φ -etajate cu suporturile conținute tot în K.

Într-adevăr, în demonstrația de mai sus putem alege $A_1 = V_1 \cap K$ și pentru $1 < k \leqslant n$,

$$A_k = (V_k \cap K) - \bigcup_{i<k} A_i.$$

Mulțimile A_k pot fi alese diferențe de mulțimi compacte.

În particular, Φ poate fi semitribul $\mathcal{B}$ al părților boreliene relativ compacte.

Propoziția 23. *Fie $\mathcal{C}$ clanul generat de mulțimile compacte. Oricare ar fi măsura pozitivă μ și oricare ar fi $1 \leqslant p < \infty$, spațiul $\mathcal{E}_E(\mathcal{C})$ al funcțiilor $\mathcal{C}$ -etajate este dens în $\mathcal{L}_E^p(\mu)$.*

Să remarcăm mai întîi că mulțimile din $\mathcal{C}$ sînt boreliene și relativ compacte, deci funcțiile din $\mathcal{E}_E(\mathcal{C})$ aparțin spațiului $\mathcal{L}^p_E(\mu)$.

Fie $\mathbf{f} \in \mathcal{K}_E(T)$. Există un șir $(\mathbf{g}_n)$ de funcții $\mathcal{C}$-etajate, cu suporturile conținute în suportul K al lui $\mathbf{f}$, uniform convergent către $\mathbf{f}$. Rezultă că șirul $\mathbf{g}_n$ converge în medie de ordin p către $\mathbf{f}$.

Așadar spațiul $\mathcal{E}_E(\mathcal{C})$ este dens în $\mathcal{K}_E(T)$ pentru topologia convergenței în medie de ordin p; cum $\mathcal{K}_E(T)$ este dens în $\mathcal{L}^p_E$ pentru această topologie, deducem că $\mathcal{E}_E(\mathcal{C})$ este dens în $\mathcal{L}^p_E$.

Corolarul 1. *Spațiul $\mathcal{E}_E(\mathcal{B})$ al funcțiilor boreliene etajate este dens în $\mathcal{L}^p_E(\mu)$ oricare ar fi măsura pozitivă μ și oricare ar fi p cu $1 \leqslant p < \infty$.*

Corolarul 2. *Fie $\mathbf{m}$ și $\mathbf{n}$ două măsuri majorate. Dacă avem $\mathbf{m}(K) = \mathbf{n}(K)$ pentru orice mulțime compactă $K \subset T$, atunci $\mathbf{m} = \mathbf{n}$.*

Se verifică ușor că mulțimea părților $A \subset T$ integrabile în raport cu $\mathbf{m}$ și $\mathbf{n}$, pentru care avem $\mathbf{m}(A) = \mathbf{n}(A)$, este un clan care conține mulțimile compacte, deci și clanul $\mathcal{C}$ generat de ele.

Urmează atunci că pentru orice funcție $\mathcal{C}$-etajată $\mathbf{g} = \sum \varphi_{A_i} x_i$ avem

$$\int \mathbf{g}\,d\mathbf{m} = \sum_{i=1}^{n} \int \varphi_{A_i} x_i \, d\mathbf{m} = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{m}(A_i)\, x_i = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{n}(A_i)\, x_i = \int g\,d\mathbf{n}.$$

Spațiul $\mathcal{E}_E(\mathcal{C})$ este dens în spațiul $\mathcal{L}^1_E(|\mathbf{m}| + |\mathbf{n}|)$, pentru seminorma $N_1(\mathbf{f}, |\mathbf{m}| + |\mathbf{n}|)$. Avem apoi

$$\left|\int \mathbf{g}\,d\mathbf{m}\right| \leqslant \int |\mathbf{g}|\,|d\mathbf{m}| \leqslant \int |\mathbf{g}|\,d(|\mathbf{m}| + |\mathbf{n}|) = N_1(\mathbf{f}, |\mathbf{m}| + \mathbf{n}|)$$

și la fel

$$\left|\int \mathbf{g}\,d\mathbf{n}\right| \leqslant N_1(\mathbf{g}, |\mathbf{m}| + |\mathbf{n}|),$$

deci aplicațiile $\int \mathbf{g}\,d\mathbf{m}$ și $\int \mathbf{g}\,d\mathbf{n}$ sînt continue pentru topologia spațiului $\mathcal{L}^1_E(|\mathbf{m}| + |\mathbf{n}|)$. Cum aceste aplicații coincid pe subspațiul dens $\mathcal{E}_E(\mathcal{C})$, rezultă că

$$\int \mathbf{f}\,d\mathbf{m} = \int \mathbf{f}\,d\mathbf{n}$$

pentru orice funcție $\mathbf{f} \in \mathcal{L}^1_E(|\mathbf{m}| + |\mathbf{n}|)$, în particular pentru funcțiile $\mathbf{f} \in \mathcal{K}_E(T)$, deci $\mathbf{m} = \mathbf{n}$.

Lema 2. *Fie $\mathcal{C}$ un clan. Pentru orice familie finită $(A_i)_{i \in I}$ de părți din $\mathcal{C}$ există o familie finită $(B_j)_{j \in J}$ de părți disjuncte din $\mathcal{C}$ astfel încît fiecare mulțime A_i să fie reuniunea unui anumit număr de mulțimi B_j.*

Luăm familia $(B_j)_{j \in J}$ ca fiind familia tuturor mulțimilor de forma $\bigcap_{i \in I} C_i$, unde $C_i = A_i$ cel puțin pentru un i iar dacă $C_i \neq A_i$, atunci $C_i = \complement A_i$. Fiecare mulțime A_k este reuniunea acelor dintre mulțimile A_k pentru care $C_k = A_k$.

Lema 3. *Fie $\mathcal{C}$ un clan. Orice funcție $\mathcal{C}$-etajată* $\mathbf{f} = \sum_i \varphi_{A_i} x_i$ *se poate scrie sub forma* $\mathbf{f} = \sum_j \varphi_{B_j} y_j$, *unde B_j sînt mulțimi disjuncte din $\mathcal{C}$.*

Fie (B_j) o familie finită de părți disjuncte din $\mathcal{C}$ astfel încît fiecare A_i să fie reuniunea unui anumit număr de mulțimi B_j.

Pentru fiecare mulțime B_k, fie I_k mulțimea acelor indici i pentru care $B_k \subset A_i$ și fie $y_k = \sum_{i \in I_k} x_i$. Atunci $\mathbf{f} = \sum \varphi_{B_j} y_j$. Într-adevăr, fie $t \in \bigcup_i A_i$. Există o singură mulțime $B_k \ni t$. Atunci $t \in A_i$ pentru fiecare $i \in I_k$ și $t \notin A_i$ pentru $i \notin I_k$, deci

$$\mathbf{f}(t) = \sum_i \varphi_{A_i}(t)\, x_i = \sum_{i \in I_k} \varphi_{A_i}(t)\, x_i = \sum_{i \in I_k} x_i = y_k = \sum_j \varphi_{B_j}(t)\, y_j .$$

Lema 4. *Fie $\mathcal{C}$ un clan și $\mathbf{m} : \mathcal{C} \to \mathcal{L}(E, F)$ o funcție aditivă. Dacă* $\sum_{i=1}^{n} \varphi_{A_i} x_i = 0$, *unde $A_i \in \mathcal{C}$ și $x_i \in E$, atunci*

$$\sum_{i=1}^{n} \mathbf{m}(A_i)\, x_i = 0.$$

Dacă $A_i = \varnothing$, avem $\mathbf{m}(A_i) = \varnothing$, deci, fără a micșora generalitatea, putem presupune că mulțimile A_i sînt nevide. Conform lemei 3, există o familie $(B_j)_{j \in J}$ de mulțimi disjuncte din $\mathcal{C}$ astfel ca fiecare A_i să fie reuniunea unui anumit număr de mulțimi B_j. Putem iarăși presupune că mulțimile B_j sînt nevide, înlăturîndu-le pe cele vide.

Pentru fiecare i să notăm cu J_i mulțimea acelor indici j pentru care $B_j \subset A_i$. Așadar

$$A_i = \bigcup_{j \in J_i} B_j ,$$

deci

$$\varphi_{A_i} = \sum_{j \in J_i} \varphi_{B_j} = \sum_{j \in J} \alpha_{ij}\, \varphi_{B_j} ,$$

unde $\alpha_{ij} = 1$ pentru $j \in J_i$ și $\alpha_{ij} = 0$ pentru $j \notin J_i$. Așadar,

$$0 = \sum_i \varphi_{A_i} x_i = \sum_i \Big(\sum_j \alpha_{ij}\, \varphi_{B_j}\Big) x_i = \sum_j \Big(\sum_i x_i\, \alpha_{ij}\Big) \varphi_{B_j}$$

de unde deducem că $\sum_i x_i \alpha_{ij} = 0$ pentru fiecare j. Atunci

$$\sum_i \mathbf{m}(A_i)\, x_i = \sum_i \Big(\sum_j \alpha_{ij}\, \mathbf{m}(B_j)\Big) x_i = \sum_j \Big(\sum_i x_i\, \alpha_{ij}\Big)\, \mathbf{m}(B_j) = 0.$$

Corolar. *Dacă* $\sum_i \varphi_{A_i} x_i = \sum_j \varphi_{B_j} y_j$, *unde A_i, $B_j \in \mathcal{C}$ iar x_i, $y_j \in E$, atunci*

$$\sum_i \mathbf{m}(A_i)\, x_i = \sum_j \mathbf{m}(B_j)\, y_j .$$

Propoziția 24. *Fie* $\mathbf{m}: \mathcal{K}_E(T) \to F$ *o măsură majorată și fie* $\mu = |\mathbf{m}|$. *Pentru orice mulțime* $A \in \mathcal{B}$ *avem*

$$\mu(A) = \sup \sum_i |\mathbf{m}(A_i)|,$$

unde marginea superioară se ia pentru toate familiile finite (A_i) *de mulțimi boreliene relativ compacte și disjuncte două cîte două, conținute în* A.

Pentru orice mulțime $\mathbf{m}$-integrabilă $B \subset T$ avem

$$|\mathbf{m}(B)| \leqslant \mu(B).$$

Dacă (A_i) este o familie finită de părți disjuncte din $\mathcal{B}$ astfel ca $\bigcup_i A_i \subset A$, atunci

$$\sum_i |\mathbf{m}(A_i)| \leqslant \sum_i \mu(A_i) = \mu(\bigcup_i A_i) \leqslant \mu(A)$$

de unde rezultă inegalitatea

$$\nu(A) = \sup \sum_i |\mathbf{m}(A_i)| \leqslant \mu(A).$$

Funcția de mulțime $\nu(A)$ definită pentru $A \in \mathcal{B}$ este *variația* funcției de mulțime $\mathbf{m}(A)$. Se știe*) că ν este numărabil aditivă pe $\mathcal{B}$. Pentru orice funcție scalară etajată $\varphi = \sum_{i=1}^{n} \varphi_{A_i} \alpha_i$ din $\mathcal{E}(\mathcal{B})$ să punem

$$\nu(\varphi) = \sum_{i=1}^{n} \nu(A) \alpha_i.$$

$\nu(\varphi)$ nu depinde de forma paticulară în care φ se scrie ca funcție etajată (corolarul lemei 4). Dacă mulțimile A_i sînt disjuncte două cîte două, avem

$$|\nu(\varphi)| \leqslant \sum_{i=1}^{n} \nu(A_i) |\alpha_i| \leqslant \sum_{i=1}^{n} \mu(A_i) |\alpha_i| = \mu_i(|\varphi|) = N_1(\varphi, \mu).$$

Aplicația $\varphi \to \nu(\varphi)$ poate fi prelungită la o aplicație liniară și continuă, notată tot cu ν, a lui $\mathcal{L}^1(\mu)$ în R. Pentru $\varphi \in \mathcal{L}^1(\mu)$ avem de asemenea

$$|\nu(\varphi)| \leqslant N_1(\varphi_1, \mu) = \mu(|\varphi|).$$

În particular, această inegalitate are loc pentru funcțiile $\varphi \in \mathcal{K}(T)$, și dovedește că ν este o măsură pozitivă și $\nu \leqslant \mu$.

În același timp, inegalitatea

$$|\mathbf{m}(A)| \leqslant \nu(A), \quad \text{pentru } A \in \mathcal{B}$$

*) V. de ex. N. Dinculeanu, Teoria măsurii și funcții reale. Ed. didactică și pedagogică București, 1964.

se extinde la inegalitatea

$$\left|\int \mathbf{f}\,d\mathbf{m}\right| \leqslant \int |\mathbf{f}|\,d\nu$$

pentru funcțiile etajate $\mathbf{f} = \sum_i \varphi_{A_i} x_i$ din $\mathscr{E}_E(\mathscr{B})$, cu mulțimile A_i disjuncte două cîte două.

Cum ambii membri ai inegalității sînt funcții continue de $\mathbf{f}$, pentru seminorma $N_1(\mathbf{f}, \mu)$, rezultă că inegalitatea se menține și pentru funcțiile $\mathbf{f} \in \mathscr{L}^1_E(\mu)$, în particular pentru funcțiile $\mathbf{f} \in \mathscr{K}_E(T)$. Aceasta înseamnă că $\mathbf{m}$ este majorată de ν. Cum $\mu = |\mathbf{m}|$, μ este cea mai mică măsură pozitivă care majorează pe $\mathbf{m}$. Rezultă că $\mu \leqslant \nu$, și deci $\mu = \nu$, adică

$$\mu(A) = \sup \sum |\mathbf{m}(A_i)|$$

10. Integrarea funcțiilor vectoriale în raport cu măsuri vectoriale

Teorema 6. *Fie X, E și F trei spații Banach și $(x, y) \to x.y$ o aplicație biliniară continuă a lui $X \times E$ în F.*

Dacă $\mu : \mathscr{K}(T) \to X$ este o măsură majorată, atunci există o măsură majorată $\mathbf{m} : \mathscr{K}_E(T) \to F$ și numai una care verifică egalitatea

$$\mathbf{m}(\varphi y) = \mu(\varphi) y, \quad \text{pentru } \varphi \in \mathscr{K}(T) \text{ și } y \in E.$$

Corespondența $\mu \to \mathbf{m}$ este liniară.

Dacă $|x.y| \leqslant |x|\,|y|$ pentru orice $x \in X$ și $y \in E$, atunci

$$|\mathbf{m}| \leqslant |\mu|.$$

Dacă $|x| = \sup_{|\nu| \leqslant 1} |xy|$ pentru orice $x \in X$, în particular dacă $X \subset \mathscr{L}(E, F)$, atunci

$$|\mathbf{m}| = |\mu|.$$

Pentru orice funcție etajată $\mathbf{g} = \sum_{i=1}^{n} \varphi_{A_i} y_i$ din $\mathscr{E}_E(\mathscr{B})$ să punem

$$\mathbf{m}(\mathbf{g}) = \sum_{i=1}^{n} \mu(A_i) y_i .$$

Din corolarul lemei 4 rezultă că $\mathbf{m}(\mathbf{g})$ nu depinde de forma particulară în care $\mathbf{g}$ se scrie ca funcție etajată. Se verifică ușor că aplicația $\mathbf{g} \to \mathbf{m}(\mathbf{g})$ a lui $\mathscr{E}_E(\mathscr{B})$ în F este liniară.

Orice funcție etajată $\mathbf{g} \in \mathscr{E}_E(\mathscr{B})$ se poate scrie sub forma $\mathbf{g} = \sum_{i=1}^{n} \varphi_{A_i} y_i$ astfel încît mulțimile A_i să fie disjuncte două cîte două. Atunci

$$|\mathbf{g}| = \sum_{i=1}^{n} \varphi_{A_i} |y_i|$$

este o funcție etajată din $\mathcal{E}(\mathcal{B})$ și dacă $a > 0$ este un număr astfel încît $|xy| \leqslant a|x||y|$ pentru orice $x \in X$ și $y \in E$, atunci

$$|\mathbf{m}(\mathbf{g})| = \left|\sum_{i=1}^{n} \mu(A_i)\, x_i\right| \leqslant a \sum_{i=1}^{n} |\mu(A_i)|\,|x_i| \leqslant$$

$$\leqslant a \sum_{i=1}^{n} |\mu|(A_i)\,|x_i| = a \int \sum_{i=1}^{n} \varphi_{A_i}\,|x_i|\,\mathrm{d}|\mu| = a \int |\mathbf{g}|\,\mathrm{d}|\mu| = a N_1(\mathbf{g}, |\mu|).$$

Rezultă că aplicația $\mathbf{g} \to \mathbf{m}(\mathbf{g})$ a lui $\mathcal{E}_E(\mathcal{B})$ în F este continuă pentru topologia definită de seminorma $N_1(\mathbf{g}, |\mu|)$. Cum $\mathcal{E}_E(\mathcal{B})$ este dens în spațiul $\mathcal{L}^1_E(|\mu|)$ pentru această topologie, aplicația $\mathbf{m} : \mathcal{E}_E(\mathcal{B}) \to F$ se poate prelungi în mod unic la o aplicație liniară continuă, notată tot $\mathbf{m}$, a spațiului $\mathcal{L}^1_E(|\mu|)$ în F, care verifică în continuare inegalitatea :

$$|\mathbf{m}(\mathbf{f})| \leqslant a N_1(\mathbf{f}, |\mu|) \text{ pentru } \mathbf{f} \in \mathcal{L}^1_E(|\mu|).$$

În particular, pentru funcțiile $\mathbf{f} \in \mathcal{K}_E(T)$ avem

$$|\mathbf{m}(\mathbf{f})| \leqslant a \int |\mathbf{f}|\,\mathrm{d}|\mu| = \int |\mathbf{f}|\,\mathrm{d}(a|\mu|),$$

deci restricția lui $\mathbf{m}$ la $\mathcal{K}_E(T)$ este o aplicație liniară, majorată de măsura pozitivă $a|\mu|$, deci $\mathbf{m}$ este o *măsură majorată*, și $|\mathbf{m}| \leqslant a|\mu|$

Fie acum $\varphi = \sum_{i=1}^{n} \varphi_{A_i}\,\alpha_i$ o funcție boreliană etajată scalară și $y \in E$. Funcția

$$\alpha y = \sum_i \varphi_{A_i}\,\alpha_i\, y$$

este o funcție boreliană etajată din $\mathcal{E}_E(\mathcal{B})$ și avem

$$\mathbf{m}(\varphi y) = \sum_i \mu(A_i)\,\alpha_i\, y = \left(\sum_i \mu(A_i)\,\alpha_i\right) y =$$

$$= \left(\int \sum_i \varphi_{A_i}\,\alpha_i\,\mathrm{d}\mu\right) y = \left(\int \varphi\,\mathrm{d}\mu\right) y = \mu(\varphi)\, y.$$

Dacă $\varphi \in \mathcal{L}^1(|\mu|)$, există un șir (φ_n) de funcții din $\mathcal{E}(\mathcal{B})$ convergent către φ pentru seminorma $N_1(\varphi, |\mu|)$. Atunci șirul $(\varphi_n y)$ converge către φy pentru seminorma $N_1(\varphi, |\mu|)$. Deoarece $\mathbf{m}$ și μ sînt continue pentru topologiile definite de această seminormă respectiv pe $\mathcal{L}^1_E(|\mu|)$ și $\mathcal{L}^1(\mu)$, avem

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{m}(\varphi_n y) = \mathbf{m}(\varphi y) \text{ și } \lim_{n\to\infty} \mu(\varphi_n)\, y = \mu(\varphi)\, y.$$

Deoarece pentru funcțiile φ_n avem egalitatea

$$\mathbf{m}(\varphi_n y) = \mu(\varphi_n)\, y,$$

prin trecere la limită obținem

$$\mathbf{m}(\varphi y) = \mu(\varphi)\, y$$

În particular, această egalitate are loc pentru orice funcție $\varphi \in \mathcal{K}(T)$ și orice $y \in E$.

Dacă $\mathbf{m}' : \mathcal{K}_E(T) \to F$ este o măsură majorată care verifică de asemenea egalitatea

$$\mathbf{m}'(\varphi y) = \mu(\varphi) y, \text{ pentru } \varphi \in \mathcal{K}(T) \text{ și } y \in E,$$

atunci $\mathbf{m}' = \mathbf{m}$ conform corolarului propoziției 9, § 1.

Liniaritatea corespondenței $\mu \to \mathbf{m}$ se verifică fără dificultate.

Dacă $|x.y| \leqslant |x|\,|y|$ pentru orice $x \in X$ și $y \in E$, atunci luînd $a = 1$ în demonstrația de mai sus, deducem că $|\mathbf{m}| \leqslant |\mu|$.

În sfîrșit, dacă pentru fiecare $x \in X$, avem $|x| = \sup_{|y| \leqslant 1} |xy|$, atunci X se poate scufunda izometric în $\mathcal{L}(E, F)$. În acest caz, măsurii $\mathbf{m} : \mathcal{K}_E(T) \to F$ îi corespunde o măsură majorată $\mu' : \mathcal{K}(T) \to \mathcal{L}(E, F)$ și una singură, care verifică egalitatea

$$\mu(\varphi y) = \mu'(\varphi) y, \text{ pentru } \varphi \in \mathcal{K}(T) \text{ și } y \in E$$

și $|\mu'| \leqslant |\mathbf{m}|$. Urmează că $\mu(\varphi) y = \mu'(\varphi) y$ pentru orice $y \in E$ și $\varphi \in \mathcal{K}(T)$, deci $\mu(\varphi) = \mu'(\varphi)$ pentru orice $\varphi \in \mathcal{K}(T)$, adică $\mu = \mu'$. Deducem că în acest caz corespondența $\mu \to \mathbf{m}$ este biunivocă și $|\mu| \leqslant |\mathbf{m}|$, deci $|\mathbf{m}| = |\mu|$.

Observație. Datorită teoremei 5, putem considera măsurile majorate definite numai pe $\mathcal{K}(T)$ și apoi „prelungite" la $\mathcal{K}_E(T)$.

Teorema 7. *Să presupunem că E și F sînt două spații Banach cu involuție și fie $\mathbf{m} : \mathcal{K}(T) \to \mathcal{L}(E, F)$ o măsură majorată.* Avem $\mathcal{L}_E^1(\overline{\mathbf{m}}) = \mathcal{L}_E^1(\mathbf{m})$ *și*

$$\overline{\int \mathbf{f} d\mathbf{m}} = \int \bar{\mathbf{f}} d\overline{\mathbf{m}}, \text{ *pentru* } \mathbf{f} \in \mathcal{L}_E^1(\mathbf{m}).$$

Într-adevăr, $|\overline{\mathbf{m}}| = |\mathbf{m}|$ și deci $\mathcal{L}_E^1(\overline{\mathbf{m}}) = \mathcal{L}_E^1(\mathbf{m})$. Fie acum $\mathbf{f} \in \mathcal{L}_E^1(\mathbf{m})$ și fie $(\mathbf{f}_n)$ un șir de funcții din $\mathcal{K}_E(T)$ convergent în medie către $\mathbf{f}$. Avem atunci

$$\lim_{n \to \infty} \int \mathbf{f}_n d\mathbf{m} = \int \mathbf{f} d\mathbf{m} \text{ și } \lim_{n \to \infty} \int \mathbf{f}_n d\overline{\mathbf{m}} = \int \mathbf{f} d\overline{\mathbf{m}}.$$

Dar pentru funcțiile $\mathbf{f}_n$ din $\mathcal{K}_E(T)$ avem (observația de la propoziția 8, § 1):

$$\overline{\int \mathbf{f}_n d\mathbf{m}} = \int \bar{\mathbf{f}}_n d\overline{\mathbf{m}}$$

de unde, prin trecere la limită, deducem

$$\overline{\int \mathbf{f} d\mathbf{m}} = \int \bar{\mathbf{f}} d\overline{\mathbf{m}}.$$

Corolar. *Fie E un spațiu Banach cu involuție și μ o măsură reală pe T. Pentru orice funcție $\mathbf{f} \in \mathcal{L}_E^1(\mu)$ avem*

$$\overline{\int \mathbf{f} d\mu} = \int \bar{\mathbf{f}} d\mu.$$

FUNCȚII MĂSURABILE. SPAȚIUL $\mathcal{L}^\infty$

§ 9. FUNCȚII ȘI MULȚIMI MĂSURABILE

1. Definiția funcțiilor măsurabile

Fie μ o măsură *pozitivă* pe T și fie X un spațiu topologic oarecare.

Definiția 1. *Spunem că o funcție $f : T \to X$ este măsurabilă pentru măsura μ, sau μ-măsurabilă, dacă pentru orice mulțime compactă $K \subset T$ și orice $\varepsilon > 0$, există o mulțime compactă $K_1 \subset K$ astfel încît restricția lui f la K_1 să fie continuă și $\mu(K - K_1) < \varepsilon$.*

Din această definiție rezultă în primul rînd că orice funcție continuă $f : T \to X$ este μ-măsurabilă oricare ar fi măsura pozitivă μ. Se va arăta mai departe (teorema 1, § 11) că orice funcție p-sumabilă (pentru măsura μ) este μ-măsurabilă.

Dacă $\mathbf{m}$ este o măsură majorată, spunem că o funcție $f : T \to X$ este $\mathbf{m}$-măsurabilă dacă f este $|\mathbf{m}|$-măsurabilă.

Propoziția 1. *Dacă funcția $f : T \to X$ exte μ-măsurabilă, atunci pentru orice mulțime μ-integrabilă $A \subset T$ și orice $\varepsilon > 0$, există o mulțime compactă $K_1 \subset A$ astfel încît restricția lui f la K_1 să fie continuă și $\mu(A - K_1) < \varepsilon$.*

Fie A o mulțime μ-integrabilă și $\varepsilon > 0$. Deoarece A este μ-integrabilă, există o mulțime compactă $K \subset A$ astfel încît $\mu(A - K) < \frac{\varepsilon}{2}$. Deoarece f este μ-măsurabilă, există o măsură compactă $K_1 \subset K$ astfel încît restricția lui f la K_1 să fie continuă și $\mu(K - K_1) < \frac{\varepsilon}{2}$. Atunci:

$$A - K_1 = (A - K) \cup (K - K_1) \quad \text{și} \quad (A - K) \cap (K - K_1) = \varnothing$$

deci

$$\mu(A - K_1) = \mu(A - K) + \mu(K - K_1) < \varepsilon$$

și propoziția este demonstrată.

Propoziția 2. *Fie funcția $f : T \to X$. Dacă pentru orice mulțime compactă $K \subset T$ și orice $\varepsilon > 0$ există o mulțime μ-integrabilă $A_1 \subset K$ astfel încît restricția lui f la A_1 să fie continuă și $\mu(K - A_1) < \varepsilon$, atunci f este μ-măsurabilă.*

Fie $K \subset T$ o mulțime compactă și $\varepsilon > 0$; fie $A_1 \subset K$ o mulțime μ-integrabilă astfel încît restricția lui f la A_1 să fie continuă și $\mu(K - A_1) < \frac{\varepsilon}{2}$. Deoarece A_1 este μ-integrabilă, există o mulțime compactă $K_1 \subset A_1$ astfel încît $\mu(A_1 - K_1) < \frac{\varepsilon}{2}$. Atunci $K_1 \subset K$, restricția lui f la K_1 este continuă și

$$\mu(K - K_1) = \mu(K - A_1) + \mu(A_1 - K_1) < \varepsilon$$

deci f este μ-măsurabilă.

Propoziția 3. *O funcție $f: T \to X$ este μ-măsurabilă dacă și numai dacă, pentru orice mulțime μ-integrabilă $A \subset T$ și orice $\varepsilon > 0$, există o mulțime μ-integrabilă $A_1 \subset A$ astfel încît restricția lui f la A_1 să fie continuă și $\mu(A - A_1) < \varepsilon$.*

Să presupunem mai întîi că f este μ-măsurabilă. Fie $A \subset T$ o mulțime μ-integrabilă și $\varepsilon > 0$. Conform propoziției 1 există atunci o mulțime compactă $K_1 \subset A$ astfel încît restricția lui f la K_1 să fie continuă și $\mu(A - K_1) < \varepsilon$. Luînd $A_1 = K_1$, condiția din enunț este verificată.

Reciproc, să presupunem condiția din enunț verificată pentru orice mulțime μ-integrabilă $A \subset T$. În particular, această condiție este verificată pentru orice mulțime compactă K. Conform propoziției 2, funcția f este μ-măsurabilă, și propoziția este demonstrată.

Propoziția 4. *O funcție $f: T \to X$ este μ-măsurabilă dacă și numai dacă pentru orice mulțime compactă $K \subset T$ există o mulțime μ-neglijabilă $N \subset K$ și un șir (K_n) de mulțimi compacte, disjuncte două cîte două, a căror reuniune este $K - N$, astfel încît restricția lui f la fiecare mulțime K_n să fie continuă.*

Să presupunem mai întîi că f este μ-măsurabilă. Fie $K \subset T$ o mulțime compactă. Putem construi, prin recurență, un șir (K_n) de mulțimi compacte, disjuncte două cîte două, astfel încît restricția lui f la fiecare mulțime K_n să fie continuă și

$$\mu\left(K - \bigcup_{i=1}^{n} K_i\right) < \frac{1}{n}, \text{ pentru fiecare } n.$$

Într-adevăr, deoarece f este μ-măsurabilă, există o mulțime compactă $K_1 \subset K$ astfel încît restricția lui f la K_1 să fie continuă și $\mu(K - K_1) < 1$. Presupunînd că am găsit mulțimile compacte $K_1, K_2, \ldots, K_{n-1}$ conținute în K, mulțimea $K - \bigcup_{i=1}^{n-1} K_i$ este μ-integrabilă, deci există o mulțime compactă $K_n \subset K - \bigcup_{i=1}^{n-1} K_i$ astfel încît restricția lui f la K_n este continuă și

$$\mu\left(\left(K - \bigcup_{i=1}^{n-1} K_i\right) - K_n\right) < \frac{1}{n},$$

Mulțimea K_n este disjunctă de $K_1, \ldots, K_{n-1}$ și

$$\left(K - \bigcup_{i=1}^{n-1} K_i\right) - K_n = K - \bigcup_{i=1}^{n} K_i, \text{ deci } \mu\left(K - \bigcup_{i=1}^{n} K_i\right) < \frac{1}{n}.$$

Dacă notăm $N = K - \bigcup_{i=1}^{\infty} K_i$, avem

$$\mu^*(N) = \mu^*\left(K - \bigcup_{i=1}^{\infty} K_i\right) \leqslant \mu^*\left(K - \bigcup_{i=1}^{n} K_i\right) < \frac{1}{n}, \text{ pentru fiecare } n,$$

deci $\mu(N) = 0$, adică N este μ -neglijabilă și prima parte a propoziției este demonstrată.

Reciproc, să presupunem condiția din enunț verificată.

Fie $K \subset T$ o mulțime compactă; fie $N \subset K$ o mulțime neglijabilă și (K_n) un șir de mulțimi compacte disjuncte două cîte două astfel încît restricția lui f la fiecare mulțime K_n să fie continuă și $\bigcup_{n=1}^{\infty} K_n = K - N$.

Avem

$$\mu(K) = \mu(K - N) = \mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} K_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(K_n) < +\infty.$$

Fie $\varepsilon > 0$; există un număr întreg n astfel încît $\sum_{i>n} \mu(K_i) < \varepsilon$. Mulțimea $H = K_1 \cup K_2 \cup \ldots \cup K_n$ este compactă, restricția lui f la H este continuă (deoarece mulțimile $K_1, \ldots, K_n$) sînt disjuncte și compacte iar restricțiile lui f la $K_1, \ldots, K_n$ sînt continue). Avem apoi

$$\mu(K - H) = \mu\left(K - \bigcup_{i=1}^{n} K_i\right) = \mu\left(N \cup \bigcup_{i>n} K_i\right) = \sum_{i>n} \mu(K_i) < \varepsilon.$$

Rezultă că f este μ -măsurabilă și propoziția este demonstrată.

Raționînd ca mai sus se demonstrează următoarele trei propoziții.

Propoziția 5. *Dacă funcția $f : T \to X$ este μ -măsurabilă, atunci pentru orice mulțime μ -integrabilă $A \subset T$ există o mulțime μ -neglijabilă $N \subset A$ și un șir (K_n) de mulțimi compacte, disjuncte două cîte două a căror reuniune este $N - A$ și astfel încît restricția lui f la fiecare mulțime K_n să fie continuă.*

Pentru demonstrație se folosește propoziția 1.

Propoziția 6. *Dacă funcția $f : T \to X$ are proprietatea că pentru orice mulțime compactă $K \subset T$ există o mulțime μ -neglijabilă $N \subset K$ și un șir (A_n) de mulțimi μ -integrabile, disjuncte două cîte două, a căror reuniune este $N - A$ și astfel încît restricția lui f la fiecare A_n să fie continuă, atunci f este μ -măsurabilă.*

Se folosește propoziția 2.

Propoziția 7. *O funcție $f : T \to X$ este μ -măsurabilă dacă și numai dacă, pentru orice mulțime μ -integrabilă $A \subset T$,există o mulțime μ -neglijabilă $N \subset A$ și un șir (A_n) de mulțimi μ -integrabile, disjuncte două cîte*

două, a căror reuniune este $A-N$, astfel încît restricția lui f la fiecare mulțime A_n să fie continuă.

Se folosește propoziția 3.

Propoziția 8. *Fie μ și ν două măsuri pozitive pe T. O funcție $f: T \to X$ este $\mu+\nu$-măsurabilă dacă și numai dacă este μ-măsurabilă și ν-măsurabilă.*

Propoziția rezultă din faptul că o mulțime N este $\mu+\nu$-neglijabilă dacă nu numai dacă este μ-neglijabilă și ν-neglijabilă.

Propoziția 9. *Fie μ și ν două măsuri pozitive. Dacă $\mu \leqslant \nu$, atunci orice funcție $f: T \to X$, μ-măsurabilă este ν-măsurabilă.*

Într-adevăr, orice mulțime μ-neglijabilă este ν-neglijabilă.

2. Funcții compuse măsurabile

Propoziția 10. *Fie $(X_\alpha)_{\alpha\in I}$ o familie finită sau numărabilă de spații topologice. Dacă pentru fiecare $\alpha\in I$, $f_\alpha: T \to X_\alpha$ este o funcție μ-măsurabilă, atunci funcția $f(t) = (f_\alpha(t))_{\alpha\in I}$ definită pe T cu valori în produsul $X = \prod_{\alpha\in I} X_\alpha$ este μ-măsurabilă.*

Fie $K \subset T$ o mulțime compactă și $\varepsilon > 0$. Pentru fiecare $\alpha \in I$ fie n_α un număr > 0 astfel încît

$$\sum_{\alpha\in I} n_\alpha < 1.$$

Pentru fiecare α există o mulțime compactă $K_\alpha \subset K$ astfel încît restricția funcției f_α la K_α să fie continuă și $\mu(K-K_\alpha) < \varepsilon n_\alpha$. Mulțimea $K_0 = \bigcap_{\alpha\in I} K_\alpha$ este compactă, conținută în K, restricțiile tuturor funcțiilor f_α la K_0 sînt continue, deci restricția funcției f la K_0 este continuă, și

$$\mu(K-K_0) \leqslant \mu\Big(\bigcup_{\alpha\in I}(K-K_\alpha)\Big) \leqslant \sum_{\alpha\in I} \mu(K-K_\alpha) \leqslant \sum_{\alpha\in I} \varepsilon n_\alpha < \varepsilon.$$

Rezultă că funcția f este μ-măsurabilă, și propoziția este demonstrată.

Propoziția 11. *Fie X și Y două spații topologice. Dacă $f: T \to X$ este o funcție μ-măsurabilă și dacă $u: X \to Y$ este o funcție continuă, atunci funcția compusă $u \circ f: T \to Y$ este μ-măsurabilă.*

Fie $K \subset T$ o mulțime compactă și $\varepsilon > 0$. Există o mulțime compactă $K_1 \subset K$ astfel încît restricția lui f la K_1 este continuă și $\mu(K-K_1) < \varepsilon$. Atunci restricția lui $u \circ f$ la K_1 este continuă. Urmează că $u \circ f$ este μ-măsurabilă.

Corolar. *Fie $(X_\alpha)_{\alpha\in I}$ o familie finită sau numărabilă de spații topologice, $X = \prod_{\alpha\in I} X_\alpha$ și Y un spațiu topologic. Dacă pentru fiecare $\alpha\in I$, $f_\alpha: T \to X_\alpha$ este o funcție μ-măsurabilă și dacă $u: X \to Y$ este o funcție continuă, atunci funcția $t \to u[(f_\alpha(t))_{\alpha\in I}]$ definită pe T cu valori în Y este μ-măsurabilă.*

Într-adevăr, funcția $t \to f(t) = (f_\alpha(t))_{\alpha\in I}$ definită pe T cu valori în X este μ-măsurabilă, deci funcția $u \circ f$ este μ-măsurabilă.

3. Funcții vectoriale măsurabile

Propoziția 12. *Fie F, G, E trei spații vectoriale topologice. Dacă $(u, v) \to [u \cdot v]$ este o aplicație continuă a lui $F \times G$ în E și dacă funcțiile $\mathbf{f} : T \to F$ și $\mathbf{g} : T \to G$ sînt μ -măsurabile, atunci funcția $[\mathbf{f} \cdot \mathbf{g}] : T \to E$ este μ -măsurabilă.*

Rezultă imediat din propoziția 11 ca un caz particular.

Corolarul 1. *Fie E un spațiu vectorial topologic. Dacă $\mathbf{f}, \mathbf{g} : T \to E$ sînt funcții μ -măsurabile iar φ este o funcție scalară μ -măsurabilă, atunci funcțiile $\mathbf{f} + \mathbf{g}$ și $\varphi \mathbf{f}$ sînt μ -măsurabile.*

Dacă E este o algebră normată, atunci funcția $\mathbf{fg}$ este μ -măsurabilă.

Într-adevăr, aplicațiile $(u, v) \to u + v$ și $(\alpha, u) \to \alpha u$ ale lui $E \times E$ în E respectiv $R \times E$ (sau $C \times E$) în E sînt continue. Dacă E este o algebră normată, aplicația $(u, v) \to u \cdot v$ este continuă.

În particular, luînd $\varphi(t) = \alpha$, rezultă că dacă $\mathbf{f}$ este μ -măsurabilă, funcția $\alpha \mathbf{f}$ este μ -măsurabilă.

Mulțimea funcțiilor μ -măsurabile $\mathbf{f} : T \to E$ este un spațiu vectorial și un modul pe spațiul funcțiilor scalare μ-măsurabile. Dacă E este o algebră normată, mulțimea funcțiilor μ -măsurabile $\mathbf{f} : T \to E$ este o algebră.

Corolarul 2. *Fie E un spațiu vectorial topologic și E' dualul său. Dacă funcțiile $\mathbf{f} : T \to E$ și $\mathbf{g} : T \to E'$ sînt μ -măsurabile, atunci funcția scalară $t \to < \mathbf{f}(t), \mathbf{g}(t) >$ este μ -măsurabilă.*

În particular, funcțiile $t \to < \mathbf{f}(t), z' >$ și $\mathbf{f} \to < z, \mathbf{g}(t) >$ sînt μ-măsurabile oricare ar fi $z' \in E'$ și $z \in E$.

Într-adevăr, funcțiile $\mathbf{f}(t) = z$ și $\mathbf{g}(t) = z'$ sînt continue, fiind constante, deci μ -măsurabile.

Propoziția 13. *Fie E un spațiu normat. Dacă $\mathbf{f} : T \to E$ este o funcție μ -măsurabilă, atunci funcția pozitivă $|\mathbf{f}|$ este μ -măsurabilă.*

Într-adevăr, funcția $u : E \to R$ definită prin $u(z) = |z|$ pentru $z \in E$, este continuă.

Propoziția 14. *O funcție complexă $f : T \to C$ este μ -măsurabilă, dacă și numai dacă partea reală* Re f *și partea imaginară* Im f *sînt funcții reale μ- măsurabile.*

Dacă f este μ -măsurabilă, atunci $f_1 = \operatorname{Re} f$ și $f_2 = \operatorname{Im} f$ sînt μ -măsurabile deoarece funcțiile $z \to \operatorname{Re} z$ și $z \to \operatorname{Im} z$ sînt continue.

Reciproc, dacă f_1 și f_2 sînt μ -măsurabile, atunci funcția $f = f_1 + if_2$ este μ -măsurabilă.

4. Funcții numerice măsurabile

Propoziția 15. *Anvelopa superioară și anvelopa inferioară a unei familii finite de funcții numerice μ -măsurabile (finite sau nu), sînt funcții μ -măsurabile.*

Într-adevăr, aplicațiile $(u, v) \to \sup(u, v)$ și $(u, v) \to \inf(u, v)$ ale lui $R \times R$ în R sînt continue.

Propoziția 16. *Dacă f este o funcție numerică μ-măsurabilă (finită sau nu), atunci funcția $|f|$ este μ-măsurabilă.*

Într-adevăr, aplicația $x \to |x|$ a lui $\overline{R}$ în $\overline{R}$ este continuă.

Propoziția 17. *Fie f și g două funcții numerice μ-măsurabile* (finite sau nu). *Dacă funcția $f+g$ $\left(\text{respectiv } f-g, fg, \frac{f}{g}, fg\right)$ este definită în orice punct $t \in T$, atunci ea este μ-măsurabilă.*

Dacă $f+g$ este definită pe T, atunci imaginea A a lui T prin aplicația $t \to (f(t), g(t))$ nu conține punctele $(+\infty, -\infty)$ și $(+\infty, -\infty)$ deci restricția aplicației $(u, v) \to u+v$ la A este continuă și deci $f+g$ este μ-măsurabilă.

La fel se raționează și pentru celelalte funcții.

Corolar. *O funcție numerică f (finită sau nu) este μ-măsurabilă, dacă și numai dacă f^+ și f^- sînt μ-măsurabile.*

Să observăm că funcțiile pozitive f^+ și f^- nu iau în același timp valoarea $+\infty$, deci $f^+ - f^-$ este definită în orice punct din T. Dacă f^+ și f^- sînt μ-măsurabile, atunci funcția $f = f^+ - f^-$ este μ-măsurabilă.

Reciproc, dacă f este μ-măsurabilă, atunci funcțiile $f^+ = \sup(f, 0)$ și $f^- = \sup(-f, 0)$ sînt μ-măsurabile.

5. Mulțimi măsurabile

Fie μ o măsură pozitivă pe T.

Definiția 2. *Spunem că o mulțime $A \subset T$ este μ-măsurabilă dacă funcția sa caracteristică φ_A este μ-măsurabilă.*

Propoziția 18. *O mulțime $A \subset T$ este μ-măsurabilă, dacă și numai dacă pentru orice mulțime compactă $K \subset T$ și orice $\varepsilon > 0$, există o mulțime compactă $K_1 \subset K$ astfel încît $\mu(K - K_1) < \varepsilon$ și astfel încît mulțimile $K_1 \cap A$ și $K_1 \cap \mathbf{C}A$ sînt compacte.*

Să presupunem mai întîi că A este μ-măsurabilă, deci că φ_A este μ-măsurabilă. Fie $K \supset T$ o mulțime compactă și $\varepsilon > 0$. Există o mulțime compactă $K_1 \subset K$ astfel încît $\mu(K - K_1) < \varepsilon$ și restricția lui φ_A la K_1 să fie continuă. Atunci mulțimea $K_1' = \varphi_A^{-1}(1) \cap K_1 = A \cap K_1$ este închisă, deci compactă și de asemenea mulțimea $K_1'' = \varphi_A^{-1}(0) \cap K_1 = \mathbf{C}A \cap K_1$.

Reciproc, să presupunem condiția din enunț verificată. Avem $\varphi_A(t) = 1$ pentru $t \in K_1 \cap A$ și $\varphi_A(t) = 0$ pentru $t \in K_1 \cap \mathbf{C}A$ deci restricția lui φ_A la fiecare din mulțimile $K_1 \cap A$ și $K_1 \cap \mathbf{C}A$ este continuă. Cum aceste mulțimi sînt compacte și disjuncte, rezultă că restricția lui φ_A la reuniunea K_1 a acestor mulțimi este de asemenea continuă, deci φ_A este μ-măsurabilă și deci A este μ-măsurabilă.

Propoziția 19. *O mulțime $A \subset T$ este μ-măsurabilă dacă și numai dacă pentru orice mulțime compactă $K \subset T$, există o mulțime μ-neglijabilă $N \subset K$ și un șir (K_n) de mulțimi compacte disjuncte două cîte două, a căror reuniune este $K - N$, astfel încît fiecare mulțime K_n să fie conținută sau în $K \cap A$ sau în $K \cap \mathbf{C}A$.*

Pentru demonstrație se folosește propoziția 4 și se ține seama de faptul că restricția funcției φ_A la o mulțime compactă H este continuă, dacă și numai dacă mulțimile $H \cap A$ și $H \cap \mathbf{C}A$ sînt compacte.

Corolar. *Orice mulțime* μ *-integrabilă* $A \subset T$ *este* μ *-măsurabilă.*

Într-adevăr, fie $K \subset T$ o mulțime compactă. Mulțimile $K \cap A$ și $K \cap \mathbf{C}A = K - A$ sînt μ-integrabile. Există deci două mulțimi μ-neglijabile, $N' \subset K \cap A$ și $N'' \subset K \cap \mathbf{C}A$ și două șiruri (K'_n) și (K''_n) de mulțimi compacte, disjuncte două cîte două, astfel încît

$$N' \cup \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} K'_n\right) = K \cap A \text{ și } N'' \cup \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} K''_n\right) = K \cap \mathbf{C}A.$$

Atunci mulțimea $N = N' \cup N'' \subset K$ este μ -neglijabilă și $K - N$ este reuniunea șirurilor (K'_n) și (K''_n) de mulțimi compacte disjuncte două cîte două astfel încît oricare mulțime din aceste șiruri este conținută în $K \cap A$ sau $K \cap \mathbf{C}A$. Urmează că A este μ -măsurabilă.

În particular, *orice mulțime* μ *-neglijabilă este* μ *-măsurabilă.*

Propoziția 20. *O mulțime* $A \subset T$ *este* μ *-măsurabilă dacă și numai dacă* $A \cap K$ *este* μ *-integrabilă, oricare ar fi mulțimea compactă* $K \subset T$.

Să presupunem mai întîi că A este μ -măsurabilă. Fie $K \subset T$ o mulțime compactă. Există un șir de mulțimi compacte (K_n), disjuncte două cîte două și o mulțime μ -neglijabilă $N \subset K \cap A$ astfel încît $(K \cap A) - N = \bigcup_{n=1}^{\infty} K_n$. Avem

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mu(K_n) = \sup_n \sum_{i=1}^{n} \mu(K_i) = \sup_n \mu\left(\bigcup_{i=1}^{n} K_i\right) \leqslant \mu(K) < +\infty,$$

deci $\bigcup_{n=1}^{\infty} K_n$ este μ -integrabilă. Cum N este de asemenea μ-integrabilă și $K \cap A = N \cup \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} K_n\right)$, rezultă că mulțimea $K \cap A$ este de asemenea μ -integrabilă.

Reciproc, să presupunem că $A \cap K$ este μ -integrabilă, oricare ar fi mulțimea compactă $K \subset T$.

Fie $K \subset T$ o mulțime compactă. Mulțimea $K \cap A$ fiind μ -integrabilă, mulțimea $K \cap \mathbf{C}A = K - A$ este de asemenea μ -integrabilă. Atunci fiecare din mulțimile $K \cap A$ și $K \cap \mathbf{C}A$ este reuniunea unei mulțimi μ-neglijabile și a unui șir de mulțimi compacte disjuncte două cîte două. Rezultă că mulțimea K este reuniunea unei mulțimi μ -neglijabile și a unui șir de mulțimi compacte disjuncte două cîte două, fiecare conținută în $K \cap A$ sau $K \cap \mathbf{C}A$. Așadar A este μ -măsurabilă și propoziția este demonstrată.

Corolarul 1. *Orice mulțime* μ *-măsurabilă, conținută într-o mulțime* μ *-integrabilă, este* μ *-integrabilă.*

Fie A o mulțime μ -măsurabilă și fie $B \supset A$ o mulțime μ-integrabilă. Există un șir (K_n) de mulțimi compacte disjuncte două cîte două și o mulțime μ -neglijabilă N, a căror reuniune este B. Deoarece A este

μ- măsurabilă, mulțimile $A \cap K_n$ sînt μ-integrabile și disjuncte două cîte două, mulțimea $A \cap N$ este μ-măsurabilă deci μ-integrabilă și reuniunea lor este A.

Mulțimea $A - N = \bigcup_{n=1}^{\infty} K_n$ este integrabilă, deci

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mu(K_n) = \mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} K_n\right) = \mu(A - N) < +\infty.$$

Atunci

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mu(A \cap K_n) + \mu(A \cap N) \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \mu(K_n) < +\infty.$$

Urmează că mulțimea $(A \cap N) \cup \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} (A \cap K_n)\right) = A$ este μ-integrabilă și propoziția este demonstrată.

Corolarul 2. *Mulțimile deschise și mulțimile închise sînt măsurabile pentru orice măsură* μ.

Într-adevăr, dacă A este închisă sau deschisă și K este compactă, mulțimea $A \cap K$ este boreliană relativ compactă, deci integrabilă pentru orice măsură μ. Atunci A este μ -măsurabilă pentru orice măsură μ.

În particular, spațiul întreg T este măsurabil pentru orice măsură μ.

Vom nota cu $\mathcal{T}$ clasa mulțimilor boreliene, adică a mulțimilor $A \subset T$ care au proprietatea că $A \cap B \in \mathcal{B}$ pentru orice $A \in \mathcal{B}$.

Corolarul 3. *Mulțimile boreliene din* $\mathcal{T}$ *sînt măsurabile pentru orice măsură* μ.

Într-adevăr, dacă $A \in \mathcal{T}$ și K este compactă, mulțimea $A \cap K$ este boreliană relativ compactă, deci integrabilă pentru orice măsură μ.

Propoziția 21. *Reuniunea și intersecția unui șir* (A_n) *de mulțimi* μ*-măsurabile sînt mulțimi* μ*-măsurabile.*

Fie K o mulțime compactă. Mulțimile $K \cap A_n$ sînt μ-integrabile și sînt conținute în mulțimea integrabilă K. Rezultă că reuniunea și intersecția mulțimilor $K \cap A_n$ sînt integrabile. Din relația

$$K \cap \left(\bigcap_n A_n\right) = \bigcap_n (K \cap A_n)$$

rezultă că mulțimea $K \cap \left(\bigcap_n A_n\right)$ este μ-integrabilă, deci $\bigcap_n A_n$ este μ-măsurabilă.

Din relația

$$K \cap \left(\bigcup_n A_n\right) = \bigcup_n (K \cap A_n)$$

rezultă că mulțimea $K \cap \left(\bigcup_n A_n\right)$ este μ-integrabilă, deci $\bigcup_n A_n$ este μ-măsurabilă și propoziția este demonstrată.

Corolar. *Mulțimea părților* μ*-măsurabile este un trib**), *care conține spațiul întreg* T.

---

*) Un trib este o clasă nevidă de părți ale lui T, care conține diferențele și reuniunile numărabile.

Într-adevăr, dacă A și B sînt μ-măsurabile, $A-B$ este μ-măsurabilă deoarece $\varphi_{A-B} = \varphi_A - \varphi_A \varphi_B$.

Propoziția 22. *Fie X un spațiu toplogic și funcția $f : T \to X$. Dacă f este μ-măsurabilă, imaginea reciprocă prin f a unei mulțimi deschise sau închise din X, este o submulțime μ-măsurabilă a lui T.*

Fie $A \subset X$ o mulțime închisă. Fie $K \subset T$ o mulțime compactă. Deoarece f este μ-măsurabilă, există o mulțime μ-neglijabilă $N \subset K$ și o partiție (K_n) a lui $K-N$, formată din mulțimi compacte, astfel încît restricția lui f la fiecare K_n să fie continuă. Intersecția $K_n \cap f^{-1}(A)$ este imaginea reciprocă a lui A prin restricția lui f la K_n. Cum această restricție este continuă și A este închisă, rezultă că mulțimea $K_n \cap f^{-1}(A)$ este închisă în K_n deci compactă.

Așadar, $K \cap f^{-1}(A)$ este reuniune a mulțimii μ-neglijabile $N \cap f^{-1}(A)$ și a mulțimilor compacte $K_n \cap f^{-1}(A)$, disjuncte două cîte două. Urmează că $f^{-1}(A)$ este μ-măsurabilă.

Dacă A este deschisă, atunci $B = \complement A$ este închisă și $f^{-1}(A) = \complement f^{-1}(B)$; deoarece $f^{-1}(B)$ este μ-măsurabilă, rezultă că $f^{-1}(A) = T - f^{-1}(B)$ este de asemenea μ-măsurabilă.

Propoziția 23. *Fie X un spațiu topologic separat și $f : T \to X$ o funcție cu mulțimea valorilor finită $f(T) = \{a_1, a_2, \ldots, a_m\}$. Funcția f este μ-măsurabilă dacă și numai dacă mulțimile $A_i = f^{-1}(a_i)$ sînt μ-măsurabile.*

Se presupunem mai întîi că mulțimile A_i sînt μ-măsurabile. Fie $K \subset T$ o mulțime compactă. Pentru fiecare i mulțimea $K \cap A_i$ este μ-integrabilă; există deci o mulțime μ-neglijabilă $N_i \subset K \cap A_i$ și o partiție $(K_{in})_{n \in N}$ a lui $(K \cap A_i) - N_i$, formată din mulțimi compacte. Restricția lui f la fiecare K_i este constantă, deci continuă. Cum mulțimile $K \cap A_i$ sînt disjuncte două cîte două și reuniunea lor este K, urmează că mulțimea K este reuniunea mulțimii μ-neglijabile $N = \bigcup_{i=1}^{m} N_i$ și a familiei numărabile $(K_{in})_{n \in N,\, 1 \leqslant i \leqslant m}$, disjuncte două cîte două, astfel încît restricția lui f la fiecare K_{in} este continuă. Așadar, f este μ-măsurabilă.

Reciproc, dacă f este μ -măsurabilă, mulțimile $A_i = f^{-1}(a_i)$ sînt μ-măsurabile deoarece, X fiind separat, mulțimile $\{a_i\}$ sînt închise.

Funcțiile $f : T \to X$ care iau numai un număr finit de valori, vor fi numite *funcții etajate* ca și în cazul cînd X este un spațiu vectorial.

Dacă mulțimile $A_i = f^{-1}(a_i)$ sînt boreliene, f va fi numită *funcție boreliană etajată*. Evident, funcțiile boleriene etajate sînt măsurabile pentru orice măsură.

6. Funcții măsurabile definite pe mulțimi măsurabile

Propoziția 24. *Fie $A \subset T$ o mulțime μ-măsurabilă și $g : T \to X$ o funcție μ-măsurabilă. Dacă funcția $f : T \to X$ este egală cu g pe A și constantă pe $\complement A$, atunci f este μ-măsurabilă.*

Fie $K \subset T$ o mulțime compactă. Deoarece A este μ-măsurabilă, mulțimile $K \cap A$ și $K \cap \complement A$ sînt μ-integrabile. Deoarece g este μ-măsu-

rabilă, mulțimea μ -integrabilă $K \cap A$ este reuniunea unei mulțimi μ-neglijabile N și a unui șir $(A_n)_{1 \leqslant n < +\infty}$ de mulțimi μ-integrabile disjuncte două cîte două astfel încît restricția lui g la fiecare A_n să fie continuă. Deoarece pe $K \cap A$, f și g coincid, rezultă că restricția lui f la fiecare A_n este continuă. Mulțimea $A_0 = K \cap \complement A$ este μ-integrabilă, disjunctă de mulțimile A_n și restricția lui f la A_0 este constantă, deci continuă. Așadar, K este reuniunea mulțimii μ-neglijabile N și a șirului $(A_n)_{0 \leqslant n < +\infty}$ de mulțimi μ-integrabile, disjuncte două cîte două, astfel încît restricția lui f la fiecare A_n să fie continuă. Urmează că f este μ -măsurabilă și propoziția este demonstrată.

Definiția 3. *Fie $A \subset T$ o mulțime μ-măsurabilă. Spunem că o funcție $f : A \to X$ este μ-măsurabilă, dacă prelungind-o la o funcție $\bar{f} : T \to X$ constantă pe $\complement A$, funcția $\bar{f}$ este μ-măsurabilă.*

Din propoziția precedentă rezultă că definiția este independentă de valoarea constantă pe care o ia prelungirea lui f pe $\complement A$.

Proprietățile funcțiilor măsurabile definite pe T se păstrează și pentru funcțiile măsurabile definite pe o submulțime $A \subset T$.

Propoziția 25. *Dacă $f : T \to X$ este o funcție μ-măsurabilă, iar $A \subset T$ este o mulțime μ-măsurabilă, atunci restricția lui f la A este μ-măsurabilă.*

Să notăm cu g o prelungire la T, a restricției lui f la A, astfel încît g să fie constantă pe $\complement A$. Pentru $t \in A$ avem $g(t) = f(t)$. Rezultă că g este μ-măsurabilă (propoziția 24) și deci restricția lui f la A este μ-măsurabilă.

Propoziția 26. *Dacă f și g sînt două funcții numerice μ -măsurabile (finite sau nu), atunci funcțiile $f+g$, $f-g$, fg, $\frac{f}{g}$, f^{α} sînt μ-măsurabile pe mulțimile pe care sînt definite.*

7. Principiul localizării

Propoziția 27. (*Principiul localizării*). *Dacă funcția $f : T \to X$ are proprietatea că pentru orice punct $s \in T$ există o vecinătate V_s a lui s și o aplicație μ-măsurabilă $g_s : V_s \to X$ astfel încît $f(t) = g_s(t)$, μ-aproape peste tot pe V_s, atunci f este μ-măsurabilă.*

Să observăm mai întîi că pentru fiecare punct $s \in T$, există o vecinătate U_s a lui s, deschisă și relativ compactă, conținută în V_s; avem $f(t) = g_s(t)$, μ-aproape peste tot pe U_s.

Fie K o mulțime compactă. Există un număr finit de mulțimi deschise relativ compacte $U_1, U_2, \ldots U_n$, care acoperă pe K, și un număr finit $g_1, g_2, \ldots g_n$ de funcții μ-măsurabile, astfel ca pentru fiecare i, $1 \leqslant i \leqslant n$, să avem $f(t) = g_i(t)$, μ-aproape peste tot pe U_i.

Să notăm $A_i = K \cap U_i$. Avem $K = \bigcup_{i=1}^{n} A_i$, mulțimile A_i sînt mulțimi boreliene și $f(t) = g_i(t)$, μ-aproape peste tot pe A_i. Există o partiție

a lui K formată dintr-un număr finit B_j, $1 \leqslant j \leqslant m$, de mulțimi boreliene relativ compacte astfel încît fiecare A_i să fie reuniunea unui anumit număr de mulțimi B_j. Fiecărei mulțimi B_j să-i atașăm în mod univoc una din funcțiile g_i pentru care $B_j \subset A_i$, și s-o notăm h_j. Funcțiile h_j sînt μ-măsurabile și pentru fiecare j avem $f(t) = h_j(t)$, μ-aproape peste tot pe B_j. Fie N_j' mulțimea μ-neglijabilă din B_j astfel încît pentru $t \in B_j - N_j'$ să avem $f(t) = h_j(t)$. Fiecare mulțime $B_j - N_j'$ este μ-integrabilă; deoarece h_j este măsurabilă, există o mulțime μ-neglijabilă $N_j'' \subset B_j - N_j'$ și un șir $(K_{nj})_{n \in N}$ de mulțimi compacte a căror reuniune este $B_j - (N_j' \cup N_j'')$ astfel încît restricția lui h_j la fiecare mulțime K_{nj} să fie continuă.

Deoarece pe fiecare mulțime K_{nj} funcția f este egală cu funcția h_j, rezultă că restricția lui f la K_{nj} este continuă. Notînd $N = \bigcup_{j=1}^{m} (N' \cup N_j'')$, mulțimea N este μ-neglijabilă, iar familia numărabilă $(K_{nj})_{n \in N,\, 1 \leqslant j \leqslant m}$ de mulțimi compacte, disjuncte două cîte două, constituie o partiție a lui $K - N$, și restricția lui f la fiecare K_{nj} este continuă. Rezultă atunci că f este μ -măsurabilă. Cu aceasta propoziția este demonstrată.

Corolarul 1. *Dacă funcția $g : T \to X$ este μ -măsurabilă, atunci orice funcție $f : T \to X$ egală cu g, μ -aproape peste tot, este μ-măsurabilă.*

Într-adevăr, mulțimea $M = \{t \mid t \in T,\ f(t) = g(t)\}$ este μ-neglijabilă; alegînd pentru fiecare punct $s \in T$ o vecinătate deschisă relativ compactă V_s, mulțimea $V_s \cap M$ este μ-neglijabilă, deci $f(t) = g(t)$, μ-aproape peste tot pe V_s. Mulțimile V_s sînt μ-integrabile și luînd $g_s = g$ pentru fiecare $s \in T$, funcțiile g_s sînt μ-măsurabile. Din propoziția precedentă rezultă atunci că f este μ-măsurabilă.

Corolarul 2. *Dacă funcția $f : T \to X$ are proprietatea că funcția $f\varphi_K$ este μ-măsurabilă, oricare ar fi mulțimea compactă $K \subset T$, atunci f este μ-măsurabilă.*

Pentru fiecare punct $s \in T$, fie V_s o vecinătate compactă a lui s și $g_s = f\varphi_{V_s}$. Conform ipotezei, g_s este μ-măsurabilă. Deoarece $g_s(t) = f(t)$ pentru $t \in V_s$, rezultă că f este μ-măsurabilă.

§ 10. ȘIRURI DE FUNCȚII MĂSURABILE

1. Funcții cu valori în spații metrice

Fie μ o măsură pozitivă pe T.

Teorema 1. (*Egoroff*). *Fie E un spațiu metric și (f_n) un șir de funcții μ -măsurabile definite pe T cu valori în E. Dacă există $\lim_{n \to \infty} f_n(t) = f(t)$, μ-aproape peste tot pe T, atunci pentru orice mulțime compactă $K \subset T$ și pentru orice $\varepsilon > 0$, există o mulțime compactă $K_1 \subset K$ astfel încît $\mu(K - K_1) < \varepsilon$ și astfel încît restricțiile funcțiilor f_n la K_1 să fie continue și să conveargă uniform pe K_1 către f.*

Fie $K \subset T$ o mulţime compactă şi $\varepsilon > 0$. Deoarece aplicaţia $t \to (f_n(t))$ a lui T în produsul E^N este μ-măsurabilă, există o mulţime compactă $K_0 \subset K$ astfel ca $\mu(K - K_0) < \frac{\varepsilon}{2}$ şi restricţia funcţiei $t \to (f_n(t))$ la K_0 să fie continuă. Aceasta înseamnă că restricţiile tuturor funcţiilor f_n la K_0 sînt continue. Să notăm cu d distanţa pe E.

Pentru fiecare pereche (p, q) de numere naturale şi orice număr natural r să notăm

$$A_{p,q}(r) = \left\{ t \mid t \in K_0,\ d(f_p(t), f_q(t)) \geqslant \frac{1}{r} \right\}.$$

Deoarece restricţiile lui f_p şi f_q la K_0 sînt continue, iar distanţa $(x, y) \to d(x, y)$ este continuă pe $E \times E$, rezultă că mulţimea $A_{p,q}(r)$ este închisă în K_0, deci este compactă. Pentru fiecare pereche (n, r) de numere naturale să notăm

$$B_n(r) = \bigcup_{\substack{p \geqslant n \\ q \geqslant n}} A_{p,q}(r).$$

Mulţimea $B_n(r)$ este μ-integrabilă, ca reuniune a unei familii numărabile, de mulţimi μ-integrabile, conţinute în mulţimea μ -integrabilă K_0.

Un punct $t \in K_0$ aparţine lui $B_n(r)$ dacă şi numai dacă există $p \geqslant n$ şi $q \geqslant n$ astfel încît $d(f_p f(t), f_q(t)) \geqslant \frac{1}{r}$.

Fie $t \in K_0$ un punct în care $f_n(t) \to f(t)$. Există un număr $n \in N$ astfel încît oricare ar fi $p \geqslant n$ şi $q \geqslant n$ să avem $d(f_p(t), f_q(t)) < \frac{1}{r}$, deci $t \notin B_n(r)$. Deoarece şirul $(f_n(t))$ converge către $f(t)$ aproape peste tot pe K_0, rezultă că intersecţia $\bigcap_{n=1}^{\infty} B_n(r)$ este μ-neglijabilă, deoarece nu conţine nici un punct de convergenţă al şirului (f_n). Şirul $(B_n(r))$ fiind descrescător, deducem

$$\lim_{n \to \infty} \mu(B_n(r)) = 0.$$

Există un întreg $n(r)$ astfel încît $\mu(B_{n(r)}(r)) < \frac{\varepsilon}{2^{r+2}}$. Fie $B = \bigcup_{r=1}^{\infty} B_{n(r)}(r)$. Mulţimea B este μ -integrabilă, ca reuniune a mulţimilor μ-integrabile $B_{n(r)}(r)$, conţinute în mulţimea compactă K_0, şi avem

$$\mu(B) \leqslant \sum_{r=1}^{\infty} \mu(B_{n(r)}(r)) \leqslant \frac{\varepsilon}{4}.$$

Mulţimea $C = K_0 - B$ este μ -integrabilă şi pe C şirul (f_n) converge uniform către f. Există atunci o mulţime compactă $K_1 \subset C$, astfel încît $\mu(C - K_1) < \frac{\varepsilon}{4}$. Aşadar, $K_1 \subset K$, $\mu(K - K_1) = \mu(K - K_0) + \mu(K_0 - C) +$

$+ \mu(C-K_1) < \varepsilon$, iar șirul (f_n) converge de asemenea uniform pe K_1. Cu aceasta teorema este demonstrată.

Corolar. *Fie E un spațiu metric și (f_n) un șir de aplicații μ-măsurabile ale lui T în E. Dacă șirul $(f_n(t))$ are o limită $f(t)$, μ-aproape peste tot pe E, atunci funcția f (definită μ-aproape peste tot) este μ-măsurabilă.*

Într-adevăr, pentru orice mulțime compactă $K \subset T$ și orice $\varepsilon > 0$, există o mulțime compactă $K_1 \subset K$ astfel încît restricția funcțiilor f_n la K_1 să fie continue, f_n să conveargă uniform pe K_1 către f și $\mu(K-K_1) < \varepsilon$. Urmează că limita f este continuă pe K_1, deci f este μ -măsurabilă.

Teorema 2. *Fie E un spațiu metric. O funcție $f : T \to E$ este μ-măsurabilă, dacă și numai dacă, pentru orice mulțime compactă $K \subset T$, există un șir (g_n) de funcții etajate boreliene cu valori în E, care tinde către f, μ-aproape peste tot pe K.*

Dacă pentru fiecare mulțime compactă $K \subset T$ există un șir (g_n) de funcții etajate μ -măsurabile care tinde către f, μ -aproape peste tot pe K, atunci restricția lui f la K este μ -măsurabilă. Cum K a fost aleasă arbitrar, rezultă că f este μ -măsurabilă.

Reciproc, să presupunem că f este μ -măsurabilă. Fie $K \subset T$ o mulțime compactă. Există o mulțime μ -neglijabilă $N \subset K$ și o partiție $(K_m)_{m \in N}$ a lui $K-N$, formată din mulțimi compacte, astfel încît restricția lui f la fiecare K_m este continuă. Pentru fiecare n vom defini funcția boreliană etajată g_n în felul următor:

Considerăm mulțimile K_i cu $i \leqslant n$. Pentru fiecare mulțime K_i există o partiție (A_{ij}) a sa, formată din mulțimi boreliene, astfel încît pentru $t', t'' \in A_{ij}$ să avem $d(f(t'), f(t'')) \leqslant \frac{1}{n}$. Într-adevăr, pentru $t_0 \in K_i$ există o vecinătate deschisă V a sa, astfel încît pentru $t \in V$ să avem $d(f(t), f(t_0)) < \frac{1}{2n}$, deoarece restricția lui f la K_i este continuă. Atunci pentru $t', t'' \in V$ avem

$$d(f(t'), f(t'')) \leqslant d(f(t'), f(t_0)) + d(f(t_0), f(t'')) < \frac{1}{n}.$$

Există un număr finit de mulțimi deschise V_j care acoperă pe K_i, astfel încît pentru $t', t'' \in V_j$ să avem $d(f(t'), f(t'')) \leqslant \frac{1}{n}$. Există atunci o familie finită A_{ij} de mulțimi boreliene, disjuncte două cîte două, a căror reuniune este K_i, astfel încît fiecare mulțime A_{ij} este conținută într-o mulțime V_j. Urmează că pentru $t', t'' \in A_{ij}$, avem de asemenea $d(f(t'), f(t'')) \leqslant \frac{1}{n}$. În fiecare mulțime A_{ij} luăm un punct t_{ij} și notăm $a_{ij} = f(t_{ij}) \in E$. Fie de asemenea $a \in E$. Definim funcția g_n astfel:

$$g_n(t) = \begin{cases} a_{ij}, & \text{dacă } t \in A_{ij} \quad (i \leqslant n), \\ a, & \text{dacă } t \notin \bigcup_{i \leqslant n} K_i. \end{cases}$$

Avem atunci $d(g_n(t), f(t)) \leqslant \frac{1}{n}$ pentru $t \in \bigcup_{i \leqslant n} K_i$. Rezultă că şirul (g_n) converge către f pe mulţimea $\bigcup_{i=1}^{\infty} K_i = K - N$, adică g_n tinde către f, μ-aproape peste tot pe K. Cu aceasta teorema este demonstrată.

Observaţie. Dacă E este un spaţiu normat, luînd $a = 0$ se poate realiza ca funcţiile g_n să fie cu suport compact.

Corolar. *Fie E un spaţiu metric. Dacă spaţiul local compact T este numărabil la infinit, orice funcţie μ-măsurabilă $f : T \to E$ este limita μ-aproape peste tot pe T, a unui şir (g_n) de funcţii boreliene etajate.*

Spaţiul T este reuniunea unui şir (B_n) de mulţimi compacte. Mulţimile $C_n = \bigcup_{i=1}^{n} B_i$ sînt compacte şi formează un şir crescător, iar reuniunea lor este T. Mulţimile

$$D_1 = C_1,\ D_2 = C_2 - C_1, \ldots, D_n = C_n - C_{n-1}, \ldots$$

sînt μ-integrabile şi disjuncte două cîte două.

Deoarece f este μ-măsurabilă, fiecare mulţime D_n este reuniunea unei mulţimi neglijabile şi a unui şir de mulţimi compacte, disjuncte două cîte două, astfel încît restricţia lui f la fiecare din ele să fie continuă.

Aşadar, spaţiul întreg T se poate scrie ca o reuniune a unei mulţimi μ-neglijabile N şi a unui şir (K_n) de mulţimi compacte disjuncte două cîte două, astfel încît restricţia lui f la fiecare mulţime K_n să fie continuă. Raţionamentul continuă apoi ca în propoziţia precedentă.

Observaţie. Dacă E este spaţiu normat, funcţiile g_n se pot alege cu suport compact.

Teorema 3. *Fie E un spaţiu metric. O funcţie $f : T \to E$ este μ-măsurabilă dacă şi numai dacă verifică următoarele condiţii :*

a) *pentru orice sferă închisă $S \subset E$, mulţimea $f^{-1}(S)$ este μ-măsurabilă ;*

b) *pentru orice mulţime compactă $K \subset T$ există o mulţime μ-neglijabilă $N \subset K$ şi o mulţime numărabilă $H \subset E$, astfel încît $f(K-N) \subset H$.*

Să presupunem mai întîi că f este μ-măsurabilă. Atunci imaginea reciprocă prin funcţia f a oricărei mulţimi închise din E, este o mulţime μ-măsurabilă, deci condiţia a) este îndeplinită.

Fie $K \subset T$ o mulţime compactă. Există o mulţime μ-neglijabilă $N \subset K$ şi un şir (g_n) de funcţii boreliene care converge către f pe $K-N$. Dacă luăm $H = \bigcup g_n(T)$, atunci H este numărabilă şi $f(t) = \lim_{n \to \infty} g_n(t) \in \overline{H}$, pentru orice $t \in K-N$, adică $f(K-N) \subset \overline{H}$ şi astfel condiţia b) este de asemenea îndeplinită.

Reciproc, să presupunem că f îndeplineşte condiţiile a) şi b).

Fie $K \subset T$ o mulţime compactă. Conform condiţiei b), există o mulţime μ-neglijabilă $N \subset K$ şi o mulţime numărabilă $H = \{a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots\} \subset E$ astfel încît $f(K - N) \subset \overline{H}$. Vom lua în locul funcţiei f o funcţie g, egală cu f pe $K-N$, astfel încît să avem $g(K) \subset \overline{H}$. De exemplu, putem lua funcţia g constantă pe N, dîndu-i o valoare din H. Funcţiile f şi g

sînt egale μ-aproape peste tot pe K. Pentru fiecare pereche (n, p) de numere naturale, să notăm $A_{n,p} = \left\{t \mid t \in K,\ d(g(t), a_n) \leqslant \frac{1}{p}\right\}$. Aşadar, $A_{n,p}$ este imaginea reciprocă prin g a sferei închise S cu centrul în a_n şi raza $\frac{1}{p}$. Mulţimea $A_{n,p}$ diferă de mulţimea $f^{-1}(S)$ printr-o mulţime de măsură nulă. Dar conform condiţiei a), $f^{-1}(S)$ este μ -măsurabilă. Rezultă că $A_{n,p}$ este de asemenea μ -măsurabilă. Avem $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_{n,p} = K$. Pentru p fixat, definim şirul $(B_{n,p})_{n \in N}$ de mulţimi μ -măsurabile, disjuncte două cîte două, a căror reuniune este K, în felul următor : $B_{1,p} = A_{1,p}$ şi pentru $n > 1$,

$$B_{n,p} = A_{n,p} - \bigcup_{i<n} A_{i,p}.$$

Definim funcţia $g_{k,p}$ astfel :

$$g_{k,p}(t) = \begin{cases} a_i \text{ dacă } t \in B_{i,p}, & 1 \leqslant i \leqslant k, \\ b \in H \text{ dacă } t \notin \bigcup_{i<k} B_{i,p}. \end{cases}$$

Funcţiile $g_{k,p}$ sînt etajate, măsurabile şi

$$\lim_{k \to \infty} g_{k,p}(t) = \begin{cases} a_n \text{ dacă } t \in B_{n,p}, & n \geqslant 1, \\ b \text{ dacă } t \notin K. \end{cases}$$

Funcţia $g_p(t) = \lim_{k \to \infty} g_{k,p}(t)$ este μ -măsurabilă şi

$$\lim_{p \to \infty} g_p(t) = \begin{cases} g(t) & \text{pentru } t \in K, \\ b & \text{pentru } t \notin K. \end{cases}$$

Rezultă că restricţia lui g la K este μ -măsurabilă. Cum $f(t) = g(t)$, μ-aproape peste tot pe K, restricţia funcţiei f la K este de asemenea μ-măsurabilă. Din principiul localizării deducem că f este μ-măsurabilă. Teorema este astfel demonstrată.

Corolar. *Fie E un spaţiu metric de tip numărabil (conţine o mulţime numărabilă peste tot densă). O funcţie $f : T \to E$ este μ -măsurabilă dacă şi numai dacă imaginea reciprocă prin f a oricărei sfere închise $S \subset E$ este o mulţime μ -măsurabilă.*

Observaţii. 1°. În teorema 3 şi în corolar condiţia a) poate fi înlocuită cu condiţia ca imaginea reciprocă prin f a oricărei sfere deschise din E să fie μ -măsurabilă.

2°. Condiţia a) poate fi slăbită, cerînd ca imaginea reciprocă prin f a sferelor de rază raţională, să fie μ -măsurabile.

Propoziţia 1. *Dacă E este un spaţiu metric compact, orice funcţie μ -măsurabilă $f : T \to E$ este limita uniformă pe T a unui şir de funcţii etajate μ -măsurabile (nu neapărat boreliene).*

Deoarece E este compact, pentru fiecare n natural, există un număr finit de sfere închise S_i de rază $\frac{1}{n}$ care acoperă pe E. Deoarece f este μ-măsurabilă, mulţimile $A_i = f^{-1}(S_i)$ sînt μ-măsurabile şi acoperă pe T. Există atunci un număr finit de mulţimi μ-măsurabile B_i care acoperă pe E, astfel încît $B_i \subset A_i$ pentru fiecare i. Într-adevăr, se ia $B_1 = A_1$ şi pentru $i > 1$, $B_i = A_i - \bigcup_{j<i} B_j$. În fiecare mulţime B_i să luăm un punct t_i şi să notăm $b_i = f(t_i) \in E$. Să definim funcţia g_n prin egalitatea $g_n(t) = b_i$ dacă $t \in B_i$. Funcţia g_n este etajată, μ-măsurabilă şi $d(f(t), g_n(t)) \leqslant \frac{2}{n}$ pentru orice $t \in T$.

Rezultă că şirul (g_n) converge uniform pe T către f, şi propoziţia este demonstrată.

2. Funcţii cu valori în spaţii Banach

Teorema 4. *Fie E un spaţiu Banach. Dacă $\mathbf{f}: T \to E$ este o funcţie μ-măsurabilă, pentru orice mulţime compactă $K \subset T$ există o mulţime μ-neglijabilă $N \subset K$ şi un şir de funcţii boreliene etajate $\mathbf{g}_n : T \to E$, cu suportul conţinut în K astfel încît $|\mathbf{g}_n(t)| \leqslant |\mathbf{f}(t)|$ pentru orice $t \in T$ şi $\mathbf{g}_n(t) \to \mathbf{f}(t)$ pentru $t \in K - N$.*

Fie $K \subset T$ o mulţime compactă. Deoarece $\mathbf{f}$ este μ-măsurabilă, există o mulţime μ-neglijabilă $N \subset K$ şi un şir (K_m) de mulţimi compacte disjuncte două cîte două, a căror reuniune este $K - N$ şi astfel încît restricţia lui $\mathbf{f}$ la fiecare K_m să fie continuă.

Pentru fiecare n să considerăm mulţimile K_i cu $i \leqslant n$. Pentru fiecare K_i există o partiţie (A_{ij}) formată din mulţimi boreliene astfel încît pentru t', $t'' \in A_{ij}$ să avem

$$|\mathbf{f}(t') - \mathbf{f}(t'')| < \frac{1}{n}.$$

Fie $t_{ij} \in A_{ij}$ şi $a_{ij} = \mathbf{f}(t_{ij})$. Definim acum funcţia $\mathbf{g}_n$ astfel:

$$\mathbf{g}_n(t) = \begin{cases} 0, \text{ dacă } |a_{ij}| \leqslant \frac{1}{n} \text{ şi } t \in A_{ij}, \\ a_{ij}\left(1 - \frac{1}{n|a_{ij}|}\right), \text{ dacă } |a_{ij}| > \frac{1}{n} \text{ şi } t \in A_{ij}, \\ 0, \text{ dacă } t \notin \bigcup_{i \leqslant n} A_{ij}. \end{cases}$$

Atunci $\mathbf{g}_n$ este o funcţie boreliană etajată, cu suportul conţinut în K, $|\mathbf{g}_n(t)| \leqslant |\mathbf{f}(t)|$ pentru $t \in T$ şi $\lim_{n\to\infty} \mathbf{g}_n(t) = \mathbf{f}(t)$ pentru $t \in K - N$. Teorema este astfel demonstrată.

Propoziția 2. *Dacă E este finit dimensional, orice funcție μ -măsurabilă mărginită $\mathbf{f}: T \to E$ este limita uniformă pe T a unui șir $(\mathbf{g}_n)$ de funcții etajate μ -măsurabile.*

Într-adevăr, $\mathbf{f}$ poate fi considerată cu valori în spațiul compact $\overline{\mathbf{f}(T)}$ (v. propoziția 1.)

În particular, propoziția este adevărată pentru funcții reale sau complexe.

Teorema 5. *Fie E și F două spații Banach. O funcție $\mathbf{f}: T \to \mathcal{L}(E,F)$ este μ -măsurabilă, dacă și numai dacă sînt verificate următoarele condiții:*

a) *pentru orice element $x \in E$, funcția $t \to \mathbf{f}(t)\,x$ (cu valori în F) este μ-măsurabilă;*

b) *pentru orice mulțime compactă $K \subset T$ există o mulțime μ -neglijabilă $N \subset K$ și o mulțime numărabilă $H \subset \mathcal{L}(E,F)$ astfel încît $\mathbf{f}(K-N) \subset \overline{H}$.*

Dacă $\mathbf{f}$ este μ -măsurabilă și $x \in E$, atunci funcția $t \to \mathbf{f}(t)\,x$ este μ -măsurabilă deoarece aplicația $u \to ux$ a lui $\mathcal{L}(E,F)$ în F este continuă; de asemenea, condiția b) este verificată, conform teoremei 3.

Reciproc, să presupunem condițiile a) și b) îndeplinite. Deoarece $\mathcal{L}(E,F)$ este un spațiu metric, conform teoremei 3 este suficient să arătăm că imaginea reciprocă prin $\mathbf{f}$ a fiecărei sfere închise $S \subset \mathcal{L}(E,F)$ este μ -măsurabilă. Fie S o sferă închisă cu centrul în a și raza > 0. Fie $K \subset T$ o mulțime compactă. Conform condiției b) există o mulțime μ-neglijabilă $N \subset K$ și o mulțime numărabilă $H \subset \mathcal{L}(E,F)$ astfel încît $\mathbf{f}(K-N) \subset \overline{H}$. Să definim funcția $\mathbf{g}: T \to \mathcal{L}(E,F)$, egală cu $\mathbf{f}$ pe $T-N$ și astfel încît $\mathbf{g}(K) \subset \overline{H}$ (de exemplu luînd $\mathbf{g}(t) = b \in H$ pentru $t \in N$). Mulțimea $H \cup \{a\}$ este numărabilă. Să aranjăm într-un șir $\{a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots\}$ elementele mulțimii $H \cup \{a\}$. Pentru fiecare element a_n și fiecare număr natural m există un element $x_{n,m} \in E$ cu $|x_{n,m}| = 1$ și

$$|a_n\, x_{n,m}| > |a_n| + \frac{1}{m}.$$

Atunci

$$|a_n| = \sup_{m \in N} |a_n\, x_{n,m}|.$$

Fie V spațiul vectorial închis generat de mulțimea $H \cup \{a\}$. Pentru orice $u \in V$ avem $|u| = \sup_{n,m \in N} |u x_{n,m}|$.

Pentru fiecare n și m, funcția $t \to \mathbf{g}(t)x_{n,m} - a x_{n,m}$ este μ -măsurabilă, conform ipotezei a), deoarece $\mathbf{f} = \mathbf{g}$, μ -aproape peste tot. Atunci funcția $t \to |\mathbf{g}(t)\,x_{n,m} - a x_{n,m}|$ este μ -măsurabilă și deci mulțimea

$$A_{n,m} = \{t \mid |\mathbf{g}(t)\,x_{n,m} - a x_{n,m}| \leqslant r\,|x_{n,n}|\}$$

este μ -măsurabilă, fiind imaginea reciprocă prin funcția numerică $t \to |\mathbf{g}(t)\,x_{n,m} - a x_{n,m}|$ a mulțimii închise $\{s \mid |s| \leqslant r\,|x_{n,m}|\}$ de pe dreaptă.

Observînd că avem

$$|\mathbf{g}(t) - a| = \sup_{n,m \in N} |(\mathbf{g}(t) - a)\,x_{n,m}| \text{ pentru } t \in K,$$

rezultă

$$K \cap \mathbf{g}^{-1}(S) = \bigcap_{n,m \in N} (A_{n,m} \cap K),$$

deci mulţimea $K \cap \mathbf{g}^{-1}(S)$ este μ-măsurabilă. Atunci mulţimea $K \cap \mathbf{f}^{-1}(S)$ este de asemenea μ -măsurabilă deoarece diferă de $K \cap \mathbf{g}^{-1}(S)$ printr-o mulţime μ -neglijabilă. Conform principiului localizării, $\mathbf{f}^{-1}(S)$ este μ -măsurabilă şi astfel condiţia a) din teorema 3 este verificată. Conform acestei teoreme, $\mathbf{f}$ este μ -măsurabilă şi astfel teorema este demonstrată.

Corolarul 1. *Dacă există o mulţime numărabilă $H \subset \mathcal{L}(E,F)$ astfel încît $\mathbf{f}(T) \subset \overline{H}$ (în particular dacă $\mathcal{L}(E,F)$ este de tip numărabil), atunci $\mathbf{f}$ este μ -măsurabilă dacă şi numai dacă funcţia $t \to \mathbf{f}(t)x$ este μ -măsurabilă oricare ar fi $x \in E$.*

Corolarul 2. *O funcţie $\mathbf{f} : T \to E$ este μ -măsurabilă dacă şi numai dacă sînt îndeplinite următoarele condiţii :*

a) *pentru orice funcţională $z' \in E'$, funcţia numerică $t \to < \mathbf{f}(t), z' >$ este μ -măsurabilă ;*

b) *pentru orice mulţime compactă $K \subset T$, există o mulţime μ -neglijabilă $N \subset K$ şi o mulţime numărabilă $H \subset E$ astfel încît $\mathbf{f}(K - N) \in \overline{H}$.*

Corolarul 3. *Fie E un spaţiu Banach de tip numărabil. O funcţie $\mathbf{f} : T \to E$ este μ -măsurabilă dacă şi numai dacă funcţia numerică $t \to < f(t), z' >$ este μ -măsurabilă, oricare ar fi $z' \in E'$.*

3. Funcţii numerice

Propoziţia 3. *Dacă (f_n) este un şir de funcţii numerice (finite sau nu) μ -măsurabile, atunci funcţiile* $\sup_n f_n$, $\inf_n f_n$, $\limsup_{n\to\infty} f_n$, $\liminf_{n\to\infty} f_n$, *sînt μ -măsurabile.*

Dreapta încheiată $\overline{R}$ este omeomorfă — de exemplu — cu segmentul $[-1, 1]$. Se poate defini deci pe $\overline{R}$ o distanţă $d(x, y)$ compatibilă cu topologia sa. $\overline{R}$ este atunci un spaţiu metric.

Funcţia $\sup_n f_n$ este limita şirului crescător de funcţii $g_n = \sup(f_1, \ldots, f_n)$ care sînt μ-măsurabile, deci $\sup_n f_n$ este de asemenea μ-măsurabilă.

Funcţia $\limsup_{n\to\infty} f_n$ este limita şirului descrescător de funcţii $h_n = \sup_{p \geqslant 0} f_{n+p}$ care sînt μ -măsurabile conform primei părţi a demonstraţiei. Urmează că $\limsup_{n\to\infty} f_n$ este de asemenea μ -măsurabilă.

Avem apoi $\inf_n f_n = -\sup_n (-f_n)$ şi $\liminf_{n\to\infty} f_n = -\limsup_{n\to\infty} (-f_n)$ deci, conform demonstraţiei de mai sus, şi aceste funcţii sînt μ -măsurabile.

Propoziția 4. *Dacă funcția numerică (finită sau nu)* $f : T \to \overline{R}$ *este* μ *-măsurabilă, atunci mulțimile*

$$1)\quad f^{-1}[a, b] = \{t \mid a \leqslant f(t) \leqslant b\}$$

$$2)\quad f^{-1}(a, b] = \{t \mid a < f(t) \leqslant b\}$$

$$3)\quad f^{-1}[a, b) = \{t \mid a \leqslant f(t) < b\}$$

$$4)\quad f^{-1}(a, b) = \{t \mid a < f(t) < b\}$$

sînt μ *-măsurabile oricare ar fi numerele* a *și* b *,astfel încît* $-\infty \leqslant a \leqslant b \leqslant +\infty$.

Într-adevăr, dacă f este μ -măsurabilă, mulțimile de la punctul 1) și 4) sînt μ -măsurabile, ca imagini reciproce prin f ale mulțimilor $[a, b]$ și (a, b) care sînt închise respectiv deschise în $\overline{R}$.

În particular, pentru orice punct $a \in \overline{R}$, mulțimea $f^{-1}(a)$ este μ -măsurabilă.

Mulțimile de la punctul 2) și 3) sînt de asemenea μ -măsurabile, ca diferențe de mulțimi μ -măsurabile:

$$f^{-1}(a, b] = f^{-1}[a, b] - f^{-1}(a),$$
$$f^{-1}[a, b) = f^{-1}[a, b] - f^{-1}(b).$$

Propoziția este astfel demonstrată.

În particular, *dacă* f *este* μ *-măsurabilă, următoarele mulțimi sînt* μ *-măsurabile*:

$$5)\quad f^{-1}[a, +\infty] = \{t \mid f(t) \geqslant a\}$$

$$6)\quad f^{-1}(a, +\infty] = \{t \mid f(t) > a\}$$

$$7)\quad f^{-1}[-\infty, b] = \{t \mid f(t) \leqslant b\}$$

$$8)\quad f^{-1}[-\infty, b) = \{t \mid f(t) < b\}$$

$$9)\quad f^{-1}(a) = \{t \mid f(t) = a\}$$

oricare ar fi numerele $a, b \in \overline{R}$.

De exemplu, mulțimile

$$\{t \mid f(t) = -\infty\},\quad \{t \mid f(t) \geqslant -\infty\},\quad \{t \mid f(t) > -\infty\},$$
$$\{t \mid f(t) = +\infty\},\quad \{t \mid f(t) \leqslant +\infty\},\quad \{t \mid f(t) < +\infty\}$$

sînt μ -măsurabile.

Corolar. *Dacă* f *și* g *sînt două funcții numerice (finite sau nu)* μ *-măsurabile, atunci mulțimile*:

$$\{t \mid f(t) < g(t)\},\quad \{t \mid f(t) \leqslant g(t)\},\quad \{t \mid f(t) = g(t)\}$$

sînt μ *-măsurabile.*

Într-adevăr, pentru orice număr rațional r, mulțimile $\{t \mid f(t) < r\}$, $\{t \mid r < g(t)\}$ sînt μ -măsurabile, deci și mulțimea

$$\{t \mid f(t) < g(t)\} = \bigcup_{r \in Q} (\{t \mid f(t) < r\} \cap \{t \mid r < g(t)\})$$

este μ -măsurabilă, ca reuniune a unui şir de mulţimi μ -măsurabile. Rezultă atunci că şi mulţimea

$$\{t \mid f(t) > g(t)\} = \{t \mid g(t) < f(t)\}$$

este μ -măsurabilă şi deci şi mulţimile

$$\{t \mid f(t) \leqslant g(t)\} = \mathbf{C}\{t \mid f(t) > g(t)\}$$

$$\{t \mid f(t) = g(t)\} = \{t \mid f(t) \leqslant g(t)\} - \{t \mid f(t) < g(t)\}$$

sînt μ -măsurabile.

Propoziţia 5. *Fie D o mulţime numărabilă peste tot densă în R. Pentru ca o funcţie numerică (finită sau nu) $f : T \to \bar{R}$ să fie μ-măsurabilă, este suficient să fie verificată una din următoarele condiţii :*

1) $\{t \mid a \leqslant f(t) \leqslant b\}$ *şi* $\{t \mid f(t) = +\infty\}$ *sînt* μ *-măsurabile, oricare ar fi* $a, b \in D$;
2) $\{t \mid a < f(t) \leqslant b\}$ *şi* $\{t \mid f(t) = +\infty\}$ *sînt* μ *-măsurabile, oricare ar fi* $a, b \in D$;
3) $\{t \mid a \leqslant f(t) < b\}$ *şi* $\{t \mid f(t) = +\infty\}$ *sînt* μ *-măsurabile oricare ar fi* $a, b \in D$;
4) $\{t \mid a < f(t) < b\}$ *şi* $\{t \mid f(t) = +\infty\}$ *sînt* μ *-măsurabile oricare ar fi* $a, b \in D$;
5) $\{t \mid f(t) \geqslant a\}$ *este* μ *-măsurabilă oricare ar fi* $a \in D$;
6) $\{t \mid f(t) > a\}$ *este* μ *-numărabilă oricare ar fi* $a \in D$;
7) $\{t \mid f(t) \leqslant b\}$ *este* μ *-măsurabilă oricare ar fi* $b \in D$;
8) $\{t \mid f(t) < b\}$ *este* μ *-măsurabilă oricare ar fi* $b \in D$.

Să presupunem condiţia 1) verificată. Pentru orice numere $\alpha, \beta \in R$, avem

$$\{t \mid \alpha \leqslant t \leqslant \beta\} = \bigcap_{\substack{a \leqslant \alpha \\ b \geqslant \beta}} \{t \mid a \leqslant f(t) \leqslant b\}.$$

Deoarece D este numărabilă, în membrul drept avem intersecţia unei familii numărabile de mulţimi μ -măsurabile, deci mulţimea $\{t \mid \alpha \leqslant t \leqslant \beta\}$ este μ -numărabilă, oricare ar fi $\alpha, \beta \in R$. Rezultă atunci succesiv că mulţimile următoare sînt μ -măsurabile :

$$\{t \mid \alpha \leqslant f(t) < +\infty\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \{t \mid \alpha \leqslant f(t) \leqslant \alpha + n\},$$

$$\{t \mid \alpha < f(t) < +\infty\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \left\{t \mid \alpha + \frac{1}{n} \leqslant f(t) < +\infty\right\},$$

$$\{t \mid \alpha \leqslant f(t) \leqslant +\infty\} = \{t \mid \alpha \leqslant f(t) < +\infty\} \cup \{t \mid f(t) = +\infty\},$$

$$\{t \mid \alpha < f(t) \leqslant +\infty\} = \{t \mid \alpha < f(t) < +\infty\} \cup \{t \mid f(t) = +\infty\},$$

$$\{t \mid -\infty \leqslant f(t) \leqslant \beta\} = \mathbf{C}\{t \mid \beta \leqslant f(t) \leqslant +\infty\}.$$

Așadar, oricare ar fi intervalul închis $[\alpha, \beta] \subset \overline{R}$, mulțimea

$$f^{-1}[\alpha, \beta] = \{t \mid \alpha \leqslant f(t) \leqslant \beta\}$$

este μ -măsurabilă. Pe spațiul $\overline{R}$, funcția *)

$$d(x, y) = \left| \frac{x}{|x|+1} - \frac{y}{|y|+1} \right|$$

este o distanță compatibilă cu topologia lui $\overline{R}$ iar sferele închise $S \subset \overline{R}$ pentru această distanță sînt intervalele închise $[\alpha, \beta] \subset \overline{R}$. Cum spațiul $\overline{R}$ conține o mulțime numărabilă peste tot densă, deducem din teorema 3 că f este μ -măsurabilă.

Cazurile 2), 3) și 4) se reduc la cazul precedent observînd că pentru $\alpha, \beta \in R$ avem :

$$\{t \mid \alpha \leqslant t \leqslant \beta\} = \bigcap_{\substack{a \leqslant \alpha \\ b \geqslant \beta}} \{t \mid a < f(t) \leqslant b\} = \bigcap_{\substack{a \leqslant \alpha \\ b \geqslant \beta}} \{t \mid a \leqslant f(t) < b\} =$$

$$= \bigcap_{\substack{a \leqslant \alpha \\ b \geqslant \alpha}} \{t \mid a < f(t) < b\}.$$

Cazurile 5) și 6) se reduc la cazul 1) observînd că

$$\{t \mid f(t) = +\infty\} = \bigcap_{a \in D} \{t \mid f(t) \geqslant a\} = \bigcap_{a \in D} \{t \mid f(t) > a\}$$

și apoi, că pentru $\alpha, \beta \in R$ avem

$$\{t \mid f(t) \geqslant \alpha\} = \bigcap_{a \leqslant \alpha} \{t \mid f(t) \geqslant a\} = \bigcap_{a \leqslant \alpha} \{t \mid f(t) > a\},$$

$$\{t \mid f(t) > \beta\} = \bigcup_{n \in N} \left\{t \mid f(t) \geqslant \beta + \frac{1}{n}\right\},$$

$$\{t \mid \alpha \leqslant f(t) \leqslant \beta\} = \{t \mid f(t) \geqslant \alpha\} - \{t \mid f(t) > \beta\}.$$

Cazurile 7) și 8) se reduc la cazul 1) observînd că

$$\{t \mid f(t) \leqslant \beta\} = \bigcap_{b \geqslant \beta} \{t \mid f(t) \leqslant b\} = \bigcap_{b \geqslant \beta} \{t \mid f(t) > b\},$$

$$\{t \mid f(t) < \alpha\} = \bigcup_{n \in N} \left\{\{t \mid f(t) \leqslant \alpha - \frac{1}{n}\right\},$$

$$\{t \mid \alpha \leqslant f(t) \leqslant \beta\} = \{t \mid f(t) \leqslant \beta\} - \{t \mid f(t) < \alpha\}$$

---

*) Aplicația $x \to \dfrac{x}{|x|+1}$ a dreptei încheiate $\overline{R}$ pe segmentul $[-1, 1]$ este strict monotonă, deci este un omeomorfism. Distanța $d(x, y) = \left| \dfrac{x}{|x|+1} - \dfrac{y}{|y|+1} \right|$ pe $\overline{R}$ se obține transportînd prin acest omeomorfism, distanța obișnuită de pe $[-1, 1]$.

şi apoi

$$\{t \mid f(t) < -\infty\} = \bigcup_{b \in D} \{t \mid f(t) \leqslant b\} - \bigcup_{b \in D} \{t \mid f(t) < b\},$$

$$\{t \mid f(t) = +\infty\} = \mathbf{C}\, \{t \mid f(t) < +\infty\}.$$

Cu aceasta propoziţia este demonstrată.

Observaţie. În condiţiile 1)—4) mulţimea $\{t \mid f(t) = +\infty\}$ poate fi înlocuită cu mulţimea $\{t \mid f(t) = -\infty\}$. Dacă $+\infty \in D$ sau dacă $-\infty \in D$, condiţia ca mulţimea $\{t \mid f(t) = +\infty\}$ să fie μ -măsurabilă este superfluă. De asemenea, această condiţie este superfluă dacă funcţia f este *finită* peste tot.

Mulţimea D poate fi mulţimea Q a numerelor raţionale.

Corolar. *Orice funcţie semicontinuă inferior sau semicontinuă superior este măsurabilă pentru orice măsură* μ.

Într-adevăr, dacă f este semicontinuă inferior, mulţimea $\{t \mid f(t) \leqslant a\}$ este închisă pentru orice $a \in \bar{R}$; dacă f este semicontinuă superior, mulţimea $\{t \mid f(t) \geqslant a\}$ este închisă pentru orice $a \in \bar{R}$; iar mulţimile închise sînt măsurabile pentru orice măsură μ.

Propoziţia 6. *Dacă funcţia numerică (finită sau nu)* $f : T \to \bar{R}$ *este pozitivă şi* μ *-măsurabilă, atunci pentru orice mulţime compactă* $K \subset T$ *există un şir* (f_n) *de funcţii boreliene etajate pozitive, cu suporturile conţinute în* K, *astfel ca* $f_n(t) \leqslant f(t)$ *pentru orice* $t \in T$ *şi* $f_n(t) \to f(t)$, μ *-aproape peste tot pe* K.

Dacă f este finită peste tot, f are valori în spaţiul Banach R. Conform teoremei 4, pentru fiecare mulţime compactă K există un şir (g_n) de funcţii boreliene etajate, cu suporturile conţinute în K, astfel încît $|g_n(t)| \leqslant f(t)$ pentru $t \in T$ şi $g_n(t) \to f(t)$, μ -aproape peste tot pe K. Funcţiile pozitive $f_n(t) = |g_n(t)|$ îndeplinesc condiţiile propoziţiei.

Să presupunem acum că f ia şi valoarea $+\infty$. Aplicaţia $u(x) = \dfrac{x}{|x| + 1}$ a spaţiului $\bar{R}$ pe segmentul $[-1, 1]$ este strict crescătoare şi continuă. Aplicaţia sa inversă $v(y) = \dfrac{y}{1 - |y|}$ definită pe $[-1, 1]$ cu valori în $\bar{R}$ este de asemenea strict crescătoare şi continuă.

Funcţia

$$h(t) = u(f(t)) = \frac{f(t)}{|f(t)| + 1}$$

este μ -măsurabilă, pozitivă, cu valori în $[0, 1]$. Conform primei părţi a demonstraţiei, există un şir (h_n) de funcţii boreliene pozitive etajate, cu suporturile în K, astfel încît $h_n(t) \to h(t)$, μ -aproape peste tot pe K. Funcţiile etajate pozitive

$$f_n(t) = v(h_n(t)) = \frac{h_n(t)}{1 - |h_n(t)|}$$

îndeplinesc condiţiile propoziţiei.

Propoziția 7. *Dacă $f : T \to R$ este o funcție μ -măsurabilă mărginită, există un șir (f_n) de funcții μ -măsurabile etajate uniform convergent către f.*

Într-adevăr, funcția f poate fi considerată cu valori în spațiul $\overline{f(T)}$ care este compact. Se aplică apoi propoziția 1.

§ 11. CRITERII DE INTEGRABILITATE

1. Aditivitatea integralei superioare

Fie μ o măsură pozitivă pe T.

S-a arătat că pentru funcțiile semicontinue inferior, integrala superioară este aditivă.

De asemenea, integrala superioară este aditivă pentru funcțiile integrabile pozitive, deoarece pentru funcțiile integrabile $f \geqslant 0$ avem

$$\int^* f\mathrm{d}\mu = \int f\mathrm{d}\mu.$$

Vom arăta că integrala superioară este aditivă și în alte cazuri.

Propoziția 1. *Dacă f și g sînt două funcții $\geqslant 0$ (finite sau nu), μ -măsurabile, atunci*

$$\int^* (f+g)\,\mathrm{d}\mu = \int^* f\mathrm{d}\mu + \int^* g\mathrm{d}\,\mu.$$

Să presupunem mai întîi că f și g se anulează în afara unei mulțimi compacte K.

Dacă, de exemplu, $\int^* f\mathrm{d}\mu = +\infty$, atunci din inegalitatea $f \leqslant f+g$ deducem

$$\int^* f\mathrm{d}\,\mu \leqslant \int^* (f+g)\,\mathrm{d}\mu$$

deci

$$\int^* (f+g)\,\mathrm{d}\mu = +\infty$$

și egalitatea este demonstrată în acest caz. Să presupunem acum că $\int^* f\mathrm{d}\mu < \infty$ și $\int^* g\mathrm{d}\mu < \infty$. Să arătăm că f și g sînt μ -integrabile.

Există un șir (f_n) de funcții boreliene etajate pozitive, convergent către f aproape peste tot pe K, astfel încît $f_n \leqslant f$ pentru orice n (propoziția 6, §10). Deoarece funcțiile f_n sînt μ -integrabile, aplicînd teorema lui

Lebesgue deducem că f este μ -integrabilă. La fel se arată că g este integrabilă. Rezultă atunci că

$$\int^* (f+g)\,d\mu = \int (f+g)\,d\mu = \int f d\mu + \int g d\mu = \int^* f d\mu + \int^* g d\mu.$$

Să presupunem acum că f şi g sînt pozitive şi măsurabile. Conform primei părţi a demonstraţiei, pentru fiecare mulţime compactă $K \subset T$ avem

$$\int^* (f+g)\varphi_K d\mu = \int^* f\varphi_K d\mu + \int^* g\varphi_K\, d\mu.$$

Trecînd la limită după mulţimea filtrantă a părţilor compacte $K \subset T$, obţinem (observaţia după propoziţia 5, §5).

$$\int^* (f+g)\,d\mu = \int^* f d\mu + \int^* g d\mu.$$

Corolar. *Dacă A şi B sînt două mulţimi μ -măsurabile disjuncte, atunci*

$$\mu^*(A \cup B) = \mu^*(A) + \mu^*(B).$$

Într-adevăr,

$$\varphi_{A \cup B} = \varphi_A + \varphi_B.$$

Vom arăta că integrala superioară este aditivă şi pentru funcţii care nu sînt măsurabile. Vom demonstra mai întîi următoarea:

Lemă. *Fie f şi g două funcţii pozitive (finite sau nu). Dacă g este μ -măsurabilă şi cu suport compact, atunci*

$$\int^* fg\,d\mu = \inf \int^* hg d\mu$$

cînd h parcurge mulţimea funcţiilor μ -măsurabile astfel încît $h \geqslant f$.

Inegalitatea

$$\int^* fg d\mu \leqslant \inf \int^* hg\,d\mu$$

rezultă din faptul că $fg \leqslant hg$ şi deci $\int^* fg\,d\mu \leqslant \int^* hg d\mu$ pentru orice funcţie $h \geqslant f$.

Reciproc, fie $\varphi \geqslant fg$ o funcţie semicontinuă inferior. Să considerăm funcţia μ -măsurabilă h_0 definită astfel:

$$h_0(t) = \begin{cases} +\infty \text{ dacă } g(t) = 0 \text{ sau } g(t) = +\infty, \\ \dfrac{\varphi(t)}{g(t)} \text{ dacă } 0 < g(t) < +\infty. \end{cases}$$

Avem $h_0 g \leqslant \varphi$. Dacă $0 < g(t) < +\infty$ avem

$$h_0(t)\,g(t) = \varphi(t) \geqslant f(t)\,g(t)$$

deci $h_0(t) \geqslant f(t)$. Această inegalitate este verificată și pentru celelalte valori ale lui t, deoarece dacă $g(t) = 0$ sau $g(t) = +\infty$, avem $h_0(t) = +\infty$. Așadar, $h_0 \geqslant f$. Atunci

$$\int^* \varphi d\mu \geqslant \int^* h_0 g d\mu \geqslant \inf_{h \geqslant f} \int^* hg d\mu, \quad h \text{ măsurabilă.}$$

Deoarece funcția semicontinuă inferior $\varphi \geqslant fg$ a fost aleasă arbitrar, iar fg are suport compact, avem

$$\int^* fg d\mu \leqslant \inf_{h \geqslant f} \int^* hg d\mu$$

și cu aceasta lema este demonstrată.

Propoziția 2. *Fie f, g_1 și g_2 trei funcții $\geqslant 0$ (finite sau nu). Dacă g_1 și g_2 sînt μ -măsurabile, atunci*

$$\int^* f(g_1 + g_2) d\mu = \int^* f g_1 d\mu + \int^* f g_2 d\mu,$$

Avem, în primul rînd, $f(g_1 + g_2) = fg_1 + fg_2$, deci

$$\int^* f(g_1 + g_2) d\mu = \int^* (fg_1 + fg_2) d\mu \leqslant \int^* fg_1 d\mu + \int^* fg_2 d\mu.$$

Fie acum $h \geqslant f$ o funcție μ -măsurabilă și $K \subset T$ o mulțime compactă oarecare. Avem

$$\int^* h(g_1 + g_2) \varphi_K d\mu = \int^* hg_1 \varphi_K d\mu + \int^* hg_2 \varphi_K d\mu$$

deoarece $hg_1 \varphi_K$ și $hg_2 \varphi_K$ sînt μ-măsurabile (propoziția 1).

Dar

$$\int^* hg_1 \varphi_K d\mu \geqslant \int^* fg_1 \varphi_K d\mu \text{ și } \int^* hg_2 \varphi_K d\mu \geqslant \int^* fg_2 \varphi_K d\mu$$

deci

$$\int^* h(g_1 + g_2) \varphi_K d\mu \geqslant \int^* fg_1 \varphi_K d\mu + \int^* fg_2 \varphi_K d\mu.$$

Luînd în membrul stîng marginea inferioară pentru toate funcțiile μ-măsurabile $h \geqslant f$, obținem, din lema precedentă,

$$\int^* f(g_1 + g_2) \varphi_K d\mu \geqslant \int^* fg_1 \varphi_K d\mu + \int^* fg_2 \varphi_K d\mu$$

deci

$$\int^* f(g_1 + g_2) \varphi_K d\mu = \int^* fg_1 \varphi_K d\mu + \int^* fg_2 \varphi_K d\mu.$$

Avem apoi

$$\int^* f(g_1+g_2)\,d\mu = \lim_K \int^* f(g_1+g_2)\,\varphi_K\,d\mu = \lim_K \int^* fg_1\,\varphi_K\,d\mu +$$

$$+ \lim_K \int fg_2\,\varphi_K\,d\mu = \int^* fg_1\,d\mu + \int^* fg_2\,d\mu$$

şi propoziţia este demonstrată.

Corolar. *Dacă A şi B sînt două mulţimi măsurabile disjuncte, atunci pentru orice funcţie $f \geqslant 0$ (finită sau nu) avem*

$$\int^* f\varphi_{A\cup B}\,d\mu = \int^* f\varphi_A\,d\mu + \int^* f\varphi_B\,d\mu.$$

Într-adevăr, în acest caz $\varphi_{B\cup A} = \varphi_A + \varphi_B$.

2. Suportul funcţiilor p-integrabile

Propoziţia 3. *Orice funcţie $f \geqslant 0$ cu $\int^* f\,d\mu < +\infty$ este nulă μ-aproape peste tot pe complementara reuniunii unui şir de mulţimi compacte disjuncte două cîte două.*

Deoarece

$$\int^* f\,d\mu = \sup_K \int^* f\varphi_K\,d\mu,\ K \text{ compact},$$

există un şir (K_n) de mulţimi compacte, astfel încît să avem

$$\int^* f\,d\mu = \sup_n \int^* f\varphi_{K_n}\,d\mu.$$

Să notăm $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} K_n$. Pentru fiecare n, mulţimile $T-A$ şi K_n sînt disjuncte şi μ -măsurabile, deci

$$\int^* f\,d\mu \geqslant \int^* f\varphi_{(T-A)\cup K_n}\,d\mu = \int^* f\varphi_{T-A}\,d\mu + \int^* f\varphi_{K_n}\,d\mu$$

de unde, luînd marginea superioară în membrul drept,

$$\int^* f\,d\mu \geqslant \int^* f\varphi_{T-A}\,d\mu + \int^* f\,d\mu.$$

Deoarece $\int^* f\,d\mu < +\infty$, deducem $\int^* f\varphi_{T-A}\,d\mu = 0$, adică $f\varphi_{T-A}$ este μ-neglijabilă, deci $f(t) = f(t)\,\varphi_A(t)$, μ -aproape peste tot.

Să notăm $A_1 = K_1$ și pentru fiecare n, $A_n = K_n - \bigcup_{i<n} K_i$. Mulțimile A_n sînt integrabile, disjuncte două cîte două și $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$. Fiecare mulțime A_n este reuniunea unui șir $(K_{nm})_{m\in N}$ de mulțimi compacte, disjuncte două cîte două, și a unei mulțimi μ -neglijabile N_n. Atunci mulțimea $N = \bigcup_{n=1}^{\infty} N_n$ este μ -neglijabilă, deci funcția f este nulă μ-aproape peste tot în afara șirului dublu (K_{nm}) de mulțimi compacte disjuncte două cîte două.

Corolarul 1. *Fie* $\mathbf{f}$ *o funcție definită pe* T *cu valori într-un spațiu Banach* E *sau în* $\overline{R}$. *Dacă există* $1 \leqslant p < +\infty$ *cu* $N_p(\mathbf{f}) < +\infty$, *atunci* $\mathbf{f}$ *este nulă* μ *-aproape peste tot pe complementara unui șir de mulțimi compacte, disjuncte două cîte două.*

Într-adevăr,

$$N_p(\mathbf{f}) = \left(\int^* |\mathbf{f}|^p \, d\mu\right)^{\frac{1}{p}} < +\infty$$

deci

$$\int^* |\mathbf{f}|^p \, d\mu < +\infty.$$

Există un șir (K_n) de mulțimi compacte, disjuncte două cîte două și o mulțime μ-neglijabilă N, astfel încît pentru orice $t \notin N \cup \bigcup_{n=1}^{\infty} K_n$ să avem $|\mathbf{f}(t)|^p = 0$, deci $\mathbf{f}(t) = 0$.

Corolarul 2. *Orice mulțime* $A \subset T$ *cu* $\mu^*(A) < +\infty$ *este conținută în reuniunea unei mulțimi* μ *-neglijabile și a unui șir de mulțimi compacte disjuncte două cîte două.*

Propoziția 4. *Fie* $\mathbf{f}$ *o funcție definită pe* T *cu valori într-un spațiu Banach* E *sau în* $\overline{R}$. *Dacă* $\mathbf{f}$ *este de putere p-sumabilă* $(1 \leqslant p < +\infty)$, *atunci mulțimea* $A = \{t \mid \mathbf{f}(t) \neq 0\}$ *este egală cu reuniunea unei mulțimi* μ *-neglijabile și a unui șir de mulțimi compacte disjuncte două cîte două.*

Deoarece $N_p(\mathbf{f}) < +\infty$, mulțimea A este conținută în reuniunea unei mulțimi μ -neglijabile N și a unui șir (K_n) de mulțimi compacte. Deoarece $\mathbf{f}$ este μ -măsurabilă, mulțimea A este μ -măsurabilă, deci mulțimile $A \cap K_n$ sînt μ -integrabile. Fiecare mulțime $A \cap K_n$ este reuniunea unei mulțimi μ -neglijabile N_n și a unui șir $(K_{nm})_{m\in N}$ de mulțimi compacte disjuncte două cîte două. Deoarece $A = (A \cap N) \cup \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} (A \cap K_n)\right)$, mulțimea A este reuniunea mulțimii μ -neglijabile $(A \cap N) \cup \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} N_n\right)$ și a șirului dublu (K_{nm}) de mulțimi compacte disjuncte două cîte două.

3. Criterii de integrabilitate

Cu ajutorul noțiunii de măsurabilitate se poate da acum următorul criteriu de integrabilitate.

Teorema 1. *Fie E un spațiu Banach. O funcție $\mathbf{f}: T \to E$ este p-sumabilă* $(1 \leqslant p < +\infty)$ *dacă și numai dacă* $\mathbf{f}$ *este* μ*-măsurabilă și* $N_p(\mathbf{f}) < +\infty$.

Dacă $\mathbf{f}$ este p-sumabilă, atunci $N_p(\mathbf{f}) < +\infty$ și există un șir $(\mathbf{f}_n)$ de funcții continue cu suport compact, convergent către $\mathbf{f}$, μ- aproape peste tot. Cum funcțiile $\mathbf{f}_n$ sînt μ -măsurabile, rezultă că $\mathbf{f}$ este de asemenea μ -măsurabilă.

Reciproc, să presupunem că $\mathbf{f}$ este μ -măsurabilă și că $N_p(\mathbf{f}) < +\infty$. Rezultă în primul rînd că mulțimea $A = \{t \mid \mathbf{f}(t) \neq 0\}$ este egală cu reuniunea unei mulțimi μ -neglijabile $N \subset A$ și a unui șir (C_n) de mulțimi compacte disjuncte două cîte două. Deoarece $\mathbf{f}$ este măsurabilă, fiecare compact C_n este reuniunea unei mulțimi neglijabile N_n și a unui șir de mulțimi compacte $(C_{nm})_m$ disjuncte două cîte două astfel încît restricția lui $\mathbf{f}$ la fiecare C_{nm} să fie continuă. Schimbînd notația dacă este necesar, putem presupune de la început că restricția lui $\mathbf{f}$ la fiecare C_n este continuă.

Pentru fiecare n, mulțimea $K_n = \bigcup_{i=1}^{n} C_i$ este compactă, șirul (K_n) este crescător, iar restricția lui $\mathbf{f}$ la K_n este continuă (deoarece mulțimile compacte $C_1, \ldots, C_n$ sînt disjuncte iar restricția lui $\mathbf{f}$ la fiecare din ele este continuă). Să notăm $\mathbf{f}_n = \mathbf{f}\varphi_{K_n}$.

Fiecare funcție $\mathbf{f}_n$ este de putere p sumabilă. Fie $\varepsilon > 0$; fie U_n o vecinătate compactă a lui K_n astfel încît să avem

$$\mu(U_n - K_n) < \left(\frac{\varepsilon}{\|\mathbf{f}_n\| + \varepsilon}\right)^p$$

(ceea ce este posibil, deoarece măsura mulțimilor compacte este marginea inferioară a măsurilor mulțimilor deschise care o conțin; iar $\|\mathbf{f}_n\| = \sup_{t \in T} |\mathbf{f}_n t)| < +\infty$ deoarece restricția lui $\mathbf{f}_n$ la K_n este continuă). Restricția lui $\mathbf{f}_n$ la K_n, fiind continuă, se poate prelungi la o funcție $\mathbf{g}_n$ continuă pe întreg spațiul, astfel încît $\|\mathbf{g}_n\| \leqslant \|\mathbf{f}_n\| + \varepsilon$. În plus putem alege funcția $\mathbf{g}_n$ cu suportul în U_n (înmulțind-o la nevoie cu o funcție continuă $h: T \to [0, 1]$ egală cu 1 pe K_n și nulă pe $\complement U_n$), deci $\mathbf{g}_n \in \mathcal{K}_E(T)$. Atunci

$$N_p(\mathbf{f}_n - \mathbf{g}_n) = \left(\int_{U_n - K_n} |\mathbf{g}_n|^p \, d\mu\right)^{\frac{1}{p}} \leqslant (\|\mathbf{f}_n\| + \varepsilon)\, \mu(U_n - K_n)^{\frac{1}{p}} < \varepsilon.$$

Așadar $\mathbf{f}_n \in \mathcal{L}_E^p$. Pe de altă parte șirul $(\mathbf{f}_n)$ converge aproape peste tot către $\mathbf{f}$ și $|\mathbf{f}_n(t)| \leqslant |\mathbf{f}(t)|$ pentru orice $t \in T$ și orice $n \in N$, iar $N_p(\mathbf{f}) < +\infty$. În baza teoremei lui Lebesgue rezultă că $\mathbf{f}$ este de putere p-integrabilă, și teorema este demonstrată.

Corolarul 1. *O funcție $f \geqslant 0$ semicontinuă inferior sau superior este* μ *-integrabilă, dacă și numai dacă* $\int^* f \, d\mu < \infty$.

Într-adevăr, în acest caz f este măsurabilă (corolarul propoziției 5, § 10).

Corolarul 2. *O mulțime $A \subset T$ este μ-integrabilă dacă și numai dacă A este μ-măsurabilă și $\mu^*(A) < \infty$.*

Corolarul 3. *O mulțime A închisă sau deschisă este μ-integrabilă dacă și numai dacă $\mu^*(A) < \infty$.*

Într-adevăr, în acest caz A este măsurabilă (corolarul 2 al propoziției 20, § 9).

Corolarul 4. *Pentru orice funcție p-sumabilă $\mathbf{f} : T \to E$ și orice mulțime μ-măsurabilă $A \subset T$, funcția $\mathbf{f}\varphi_A$ este p-sumabilă.*

Într-adevăr, funcția $\mathbf{f}\varphi_A$ este μ-măsurabilă și $N_p(\mathbf{f}\varphi_A) \leqslant N_p(\mathbf{f}) < +\infty$.

Dacă $\mathbf{m}$ este o măsură majorată, pentru orice funcție $\mathbf{m}$-integrabilă $\mathbf{f} : T \to E$ și orice mulțime $|\mathbf{m}|$-măsurabilă $A \subset T$, vom folosi notația

$$\int_A \mathbf{f}\,d\mathbf{m} = \int \mathbf{f}\varphi_A\,d\mathbf{m}.$$

Propoziția 5. *Dacă μ și ν sînt două măsuri pozitive, atunci*

$$\mathcal{L}_E^p(\mu+\nu) = \mathcal{L}_E^p(\mu) \cap \mathcal{L}_E^p(\nu),\ 1 \leqslant p < +\infty,$$

și topologia definită pe spațiul $\mathcal{L}_E^p(\mu+\nu)$ de seminorma $N_p(\mathbf{f}, \mu+\nu)$ este echivalentă cu topologia definită pe spațiul $\mathcal{L}_E^p(\mu) \cap \mathcal{L}_E^p(\nu)$ de seminorma $N_p(\mathbf{f}, \mu) + N_p(\mathbf{f}, \nu)$.

Din inegalitățile

$$N_p(\mathbf{f}, \mu+\nu) \leqslant N_p(\mathbf{f}, \mu) + N_p(\mathbf{f}, \nu) \leqslant 2N_p(\mathbf{f}, \mu+\nu)$$

rezultă că $N_p(\mathbf{f}, \mu+\nu) < +\infty$ dacă și numai dacă $N_p(\mathbf{f}, \mu) < +\infty$ și $N_p(\mathbf{f}, \nu) < +\infty$.

Pe de altă parte, funcția $\mathbf{f} : T \to E$ este $\mu+\nu$-măsurabilă dacă și numai dacă $\mathbf{f}$ este μ-măsurabilă și ν-măsurabilă.

Așadar $\mathbf{f} \in \mathcal{L}_E^p(\mu+\nu)$ dacă și numai dacă $\mathbf{f} \in \mathcal{L}_E^p(\mu)$ și $\mathbf{f} \in \mathcal{L}_E^p(\nu)$, adică

$$\mathcal{L}_E^p(\mu+\nu) = \mathcal{L}_E^p(\mu) \cap \mathcal{L}_E^p(\nu).$$

Afirmația relativă la echivalența topologiilor rezultă din inegalitățile dintre seminorme.

Corolar. *Fie μ și ν două măsuri pozitive. O funcție $\mathbf{f} : T \to E$ este $\mu+\nu$-integrabilă dacă și numai dacă este μ-integrabilă și ν-integrabilă. În acest caz avem*

$$\int \mathbf{f}\,d(\mu+\nu) = \int \mathbf{f}\,d\mu + \int \mathbf{f}\,d\nu.$$

Afirmația relativă la integrabilitatea lui $\mathbf{f}$ rezultă din propoziția precedentă. Dacă $\mathbf{f}$ este $\mu+\nu$-integrabilă, există un șir $(\mathbf{f}_n)$ de funcții

din $\mathcal{K}_E(T)$ astfel încît $\int |f - f_n| \, d(\mu + \nu) \to 0$. Atunci $\int |f - f_n| \, d\mu \to 0$ şi $\int |f - f_n| \, d\nu \to 0$. Rezultă că

$$\int f_n \, d\mu \to \int f \, d\mu, \int f_n \, d\nu \to \int f \, d\nu \text{ şi } \int f_n \, d(\mu + \nu) \to \int f \, d(\mu + \nu).$$

Pentru funcţiile f_n din $\mathcal{K}_E(T)$ avem

$$\int f_n d(\mu + \nu) = \int f_n \, d\mu + \int f_n \, d\nu.$$

Prin trecere la limită, obţinem egalitatea

$$\int f \, d(\mu + \nu) = \int f \, d\mu + \int f \, d\nu.$$

Propoziţia 6. *Fie* $\mathbf{m}, \mathbf{n} : \mathcal{K}_E(T) \to F$ *două măsuri majorate şi funcţia* $f : T \to E$. *Dacă* f *este* $\mathbf{m}$*-integrabilă şi* $\mathbf{n}$*-integrabilă, atunci* f *este* $\mathbf{m}+\mathbf{n}$*-integrabilă şi*

$$\int f \, d(\mathbf{m} + \mathbf{n}) = \int f \, d\mathbf{m} + \int f \, d\mathbf{n}.$$

Din inegalitatea $|\mathbf{m}+\mathbf{n}| \leqslant |\mathbf{m}| + |\mathbf{n}|$, deducem

$$\mathcal{L}_E^1(|\mathbf{m}|) \cap \mathcal{L}_E^1(|\mathbf{n}|) = \mathcal{L}_E^1(|\mathbf{m}| + |\mathbf{n}|) \subset \mathcal{L}_E^1(|\mathbf{m}+\mathbf{n}|)$$

deci, dacă f este $\mathbf{m}$-integrabilă şi $\mathbf{n}$-integrabilă, atunci f este $|\mathbf{m}| + |\mathbf{n}|$-integrabilă şi $|\mathbf{m} + \mathbf{n}|$-integrabilă. Fie (f_n) un şir de funcţii din $\mathcal{K}_E(T)$, convergent în medie către f, pentru măsura $|\mathbf{m}| + |\mathbf{n}|$:

$$\lim_{n\to\infty} \int |f_n - f| \, d(|\mathbf{m}| + |\mathbf{n}|) = 0.$$

Atunci:

$$\lim_{n\to\infty} \int |f_n - f| \, d|\mathbf{m}| = 0, \lim_{n\to\infty} \int |f_n - f| \, d|\mathbf{n}| = 0$$

(deoarece $|\mathbf{m}| \leqslant |\mathbf{m}| + |\mathbf{n}|$ şi $|\mathbf{n}| < |\mathbf{m}| + |\mathbf{n}|$) şi

$$\lim_{n\to\infty} \int |f_n - f| \, d|\mathbf{m} + \mathbf{n}| = 0.$$

Deducem

$$\lim_{n\to\infty} \int f_n \, d\mathbf{m} = \int f \, d\mathbf{m}, \lim_{n\to\infty} \int f_n \, d\mathbf{n} = \int f \, d\mathbf{n}$$

şi

$$\lim_{n\to\infty} \int f_n \, d(\mathbf{m} + \mathbf{n}) = \int f \, d(\mathbf{m}+\mathbf{n}).$$

Dar pentru funcțiile f_n din $\mathcal{K}_E(T)$ avem

$$\int f_n \, d(m+n) = \int f_n \, dm + \int f_n \, dn.$$

Prin trecere la limită obținem

$$\int f \, d(m+n) = \int f \, dm + \int f \, dn.$$

4. Calculul integralei superioare pentru anumite funcții

Propoziția 7. *Fie $f \geqslant 0$ o funcție definită pe T (finită sau nu). Dacă există o funcție semicontinuă inferior $h_0 \geqslant f$ cu $\mu^*(h_0) < +\infty$, atunci*

$$\mu^*(f) = \inf_{\substack{h \geqslant f \\ h \in \mathcal{J}_+}} \mu^*(h).$$

a) Să presupunem mai întîi că $\mu^*(f) = 0$, și să notăm $A = \{t \mid f(t) > 0\}$ și $G_0 = \{t \mid h_0(t) > 0\}$. Mulțimea G_0 este deschisă iar mulțimea A este μ-neglijabilă. Funcția h_0 este μ-integrabilă, deci funcția $h_0 - h_0 \varphi_A$ este μ-integrabilă, și deci mulțimea

$$G_0 - A = \{t \mid h_0(t) - h_0(t) \varphi_A(t) > 0\}$$

este reuniunea unui șir crescător (K_n) de mulțimi compacte și a unei mulțimi μ-neglijabile N. Mulțimile $G_n = G_0 - K_n$ sînt deschise, formează un șir descrescător și intersecția lor $\bigcap_{n=1}^{\infty} G_n = A \cup N$ este μ-neglijabilă. Atunci funcțiile $h_0 \varphi_{G_n}$ sînt semicontinue inferior, formează un șir descrescător,

$$\inf_n h_0 \varphi_{G_n} = h_0 \varphi_{A \cup N} \geqslant h_0 \varphi_A \geqslant f$$

și $\inf_n \mu^*(h_0 \varphi_{G_n}) \leqslant \mu^*(h_0) < +\infty$. Urmează că

$$\inf_n \mu^*(h_0 \varphi_{G_n}) = \mu^*(h_0 \varphi_{A \cup N}) = 0$$

deci

$$\inf_{\substack{h \geqslant f \\ h \in \mathcal{J}_+}} \mu^*(h) = 0 = \mu^*(f).$$

b) Să arătăm apoi că dacă $A \subset T$ este o mulțime μ-neglijabilă astfel încît

$$\mu^*(f\varphi_A) = \inf \mu^*(h), \quad h \geqslant f \varphi_A, \quad h \in \mathcal{J}_+,$$

atunci pentru orice mulțime compactă $K \subset T$ avem

$$\mu^*(f \varphi_A) = \inf \mu^*(h), \quad h \geqslant f \varphi_{A \cup K}, \quad h \in \mathcal{J}_+.$$

Într-adevăr, fie $\varepsilon > 0$. Există două funcţiie semicontinue inferior $h_1 \geqslant f\varphi_A$ şi $h_2 \geqslant f\varphi_K$ astfel încît să avem

$$\mu^*(h_1) \leqslant \mu^*(f\varphi_A) + \frac{\varepsilon}{2} = \frac{\varepsilon}{2}$$

şi

$$\mu^*(h_2) \leqslant \mu^*(f\varphi_K) + \frac{\varepsilon}{2} \leqslant \mu^*(f\varphi_{K\cup A}) + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Atunci $h_1 + h_2$ este semicontinuă inferior, $h_1 + h_2 \geqslant f\varphi_{K\cup A}$ şi

$$\mu^*(h_1 + h_2) = \mu^*(h_1) + \mu^*(h_2) \leqslant \mu^*(f\varphi_{K\cup A}) + \varepsilon$$

deci

$$\mu^*(f\varphi_{K\cup A}) = \inf \mu^*(h), \quad h \geqslant f\varphi_{K\cup A}, \quad h \in \mathcal{J}_+.$$

c) Fie acum o funcţie oarecare $f \geqslant 0$ şi o funcţie semicontinuă inferior $h_0 \geqslant f$ cu $\mu^*(h_0) < +\infty$. Deoarece h_0 este μ-integrabilă, mulţimea $G_0 = \{t \mid h_0(t) > 0\}$ este reuniunea unei mulţimi μ-neglijabile N şi a unui şir crescător (K_n) de mulţimi compacte. Deoarece $f\varphi_N \leqslant h_0$, avem

$$\mu^*(f\varphi_N) = \inf \mu^*(h), \quad h \geqslant f\varphi_N, \quad h \in \mathcal{J}_+,$$

şi deci, pentru fiecare n,

$$\mu^*(f\ \varphi_{K_n \cup N}) = \inf \mu^*(h), \quad h \geqslant f\varphi_{K_n \cup N}, \quad h \in \mathcal{J}_+.$$

Şirul $(f\varphi_{K_n \cup N})$ este crescător şi $\sup_n f\varphi_{K_n \cup N} = f$. Din propoziţia 6, § 5 deducem atunci că

$$\mu^*(f) = \inf \mu^*(h), \quad h \geqslant f, \quad h \in \mathcal{J}_+.$$

Propoziţia 8. *Fie $f \geqslant 0$ o funcţie definită pe T. Dacă mulţimea $A = \{t \mid f(t) \neq 0\}$ este conţinută în reuniunea unui şir (G_n) de mulţimi deschise cu $\mu^*(G_n) < +\infty$ pentru fiecare n, atunci*

$$\mu^*(f) = \inf_{\substack{h \geqslant f \\ h \in \mathcal{J}_+}} \mu^*(h).$$

a) Să presupunem mai întîi că $\mu^*(f) = 0$ şi că A este conţinută într-o mulţime deschisă G cu $\mu^*(G) < +\infty$. Deoarece $n\varphi_A \leqslant n\varphi_G$ iar $n\varphi_G$ este semicontinuă inferior şi $\mu^*(n\varphi_G) = n\mu^*(\varphi_G) < +\infty$, pentru fiecare n avem

$$0 = \mu^*(n\,\varphi_A) = \inf \mu^*(h), \quad h \geqslant n\,\varphi_A, \quad h \in \mathcal{J}_+.$$

Conform propoziţiei 6, § 5, avem atunci

$$0 = \mu^*(\sup_n n\,\varphi_A) = \inf \mu^*(h), \quad h \geqslant \sup_n n\,\varphi_A, \quad h \in \mathcal{J}_+.$$

Pentru fiecare $\varepsilon > 0$ există deci o funcție $h \in \mathcal{J}_+$ cu $h \geqslant \sup_n n\varphi_A \geqslant f$ astfel încît $\mu^*(h) < \varepsilon$, deci

$$\mu^*(f) = \inf \mu^*(h) = 0, \quad h \geqslant f, \quad h \in \mathcal{J}_+.$$

b) Să presupunem acum că $\mu^*(f) \geqslant 0$ și că A este conținută într-o mulțime deschisă G cu $\mu^*(G) < +\infty$. Deoarece G este μ-integrabilă, există un șir crescător (K_n) de mulțimi compacte conținute în G, astfel încît mulțimea $N = G - \bigcup_{n=1}^{\infty} K_n$ este μ-neglijabilă. Funcția $f\varphi_N$ este μ-neglijabilă și mulțimea punctelor în care este $\neq 0$ este conținută în G, deci

$$\mu^*(f\varphi_N) = \inf \mu^*(h), \quad h \geqslant f\varphi_N, \ h \in \mathcal{J}_+.$$

Atunci, ca în demonstrația propoziției 5, deducem că

$$\mu^*(f\varphi_{K_n \cup N}) = \inf \mu^*(h), \quad h \geqslant f\varphi_{K_n \cup N}, \quad h \in \mathcal{J}_+$$

și cum $f = \sup_n f\varphi_{K_n \cup N}$, urmează că

$$\mu^*(f) = \inf \mu^*(h), \quad h \geqslant f, \quad h \in \mathcal{J}_+.$$

c) Dacă A este conținută în reuniunea unui șir (G_n) de mulțimi deschise cu $\mu^*(G_n) < +\infty$, putem presupune că șirul (G_n) este crescător și atunci $f = \sup_n f\varphi_{G_n}$. Cum pentru fiecare n avem, conform celor de mai sus,

$$\mu^*(f\varphi_{G_n}) = \inf \mu^*(h), \quad h \geqslant f\varphi_{G_n}, \quad h \in \mathcal{J}_+,$$

rezultă

$$\mu^*(f) = \inf \mu^*(h), \quad h \geqslant f, \quad h \in \mathcal{J}_+.$$

Corolar. *Pentru orice mulțime $A \subset T$, conținută în reuniunea unui șir (G_n) de mulțimi deschise cu $\mu(G_n) < +\infty$ pentru fiecare n, avem*

$$\mu^*(A) = \inf_{G \supset A} \mu^*(G), \quad G \text{ deschisă}.$$

Dacă $\mu^*(A) = +\infty$, avem $\mu^*(G) = +\infty$ pentru orice mulțime deschisă $G \supset A$ și egalitatea din enunț este verificată.

Să presupunem că $\mu^*(A) < +\infty$. Conform propoziției precedente avem atunci

$$\mu^*(A) = \mu^*(\varphi_A) = \inf \mu^*(h), \quad h \geqslant \varphi_A, \quad h \in \mathcal{J}_+.$$

Fie $0 < \varepsilon < 1$. Există o funcție $h \in \mathcal{J}_+$ astfel încît $\varphi_A \leqslant h$ și $\mu^*(A) \leqslant \mu^*(h) \leqslant \mu^*(A) + \varepsilon$. Mulțimea $G = \{t \mid h(t) > 1 - \varepsilon\}$ este deschisă și conține pe A. Dar $h \geqslant (1 - \varepsilon)\varphi_G$ deci

$$\mu^*(G) \leqslant \frac{1}{1-\varepsilon}\mu^*(h) \leqslant \frac{1}{1-\varepsilon}(\mu^*(A) + \varepsilon).$$

deci

$$\inf_{G \supset A} \mu^*(G) \leqslant \frac{1}{1-\varepsilon}(\mu^*(A) + \varepsilon).$$

ε fiind arbitrar, obţinem

$$\inf_{G \supset A} \mu^*(G) \leqslant \mu^*(A), \quad G \text{ deschisă}$$

de unde

$$\mu^*(A) = \inf_{G \supset A} \mu^*(G), \quad G \text{ deschisă}.$$

5. Funcţii măsurabile definite local

Definiţia 1. *Spunem că o mulţime $\mathcal{L}$ de părţi ale lui T este local numărabilă, dacă pentru orice punct $t \in T$, există o vecinătate V a lui t cu proprietatea că mulţimea părţilor $A \in \mathcal{L}$ care intersectează pe V este cel mult numărabilă.*

Din această definiţie rezultă că dacă $\mathcal{L}$ este local numărabilă, atunci mulţimea părţilor $A \in \mathcal{L}$ care intersectează o mulţime *compactă* $K \subset T$, este cel mult numărabilă, deoarece K poate fi acoperită de un număr finit de vecinătăţi V de felul celor din definiţie.

Propoziţia 9. *Fie μ o măsură pozitivă pe T. Există atunci o mulţime local numărabilă $\mathcal{K}$ de părţi compacte nevide disjuncte astfel încît mulţimea $T - \bigcup_{K \in \mathcal{K}} K$ este μ-neglijabilă.*

Dacă $\mu = 0$, luăm $\mathcal{K}$ formată dintr-o singură mulţime compactă nevidă $K \subset T$ şi propoziţia este demonstrată. Să presupunem acum că $\mu \neq 0$.

Să considerăm mulţimile $\mathcal{L}$ de părţi compacte nevide $K \subset T$ disjuncte două cîte două, cu proprietatea că pentru orice mulţime $K \in \mathcal{L}$ şi orice mulţime deschisă $U \subset T$ cu $U \cap K \neq \varnothing$ să avem $\mu(U \cap K) > 0$. Mulţimile $\mathcal{L}$ formează o parte $\mathcal{F}$ a mulţimii $\mathcal{P}(\mathcal{P}(T))$ pe care o considerăm ordonată prin incluziune.

Mulţimea $\mathcal{F}$ nu este vidă. Într-adevăr, deoarece $\mu \neq 0$, există cel puţin o mulţime compactă $H \subset T$ cu $\mu(H) > 0$. Fie $\mathcal{U}$ mulţimea tuturor părţilor deschise $U \subset T$ care intersectează pe H şi pentru care $\mu(H \cap U) = 0$ şi fie $U_0 = \bigcup_{U \in \mathcal{U}} U$. Mulţimea U_0 este deschisă şi nu include pe H, deoarece dacă am avea $H \subset U_0$, atunci H ar putea fi acoperit de un număr finit de mulţimi din $\mathcal{U}$ şi ar rezulta că $\mu(H) = 0$. Să considerăm mulţimea compactă $K = H - U_0$. Avem $\mu(K) > 0$.

Într-adevăr, dacă am avea $\mu(K) = 0$, ar exista o mulţime deschisă $G \supset K$ cu $\mu(G) < \mu(H)$; atunci H ar putea fi acoperit de G şi de un număr finit de mulţimi din $\mathcal{U}$ şi ar rezulta $\mu(H) = \mu(G \cap H) < \mu(H)$.

Dacă U este o mulțime deschisă cu $K \cap U \neq \emptyset$, atunci $\mu(K \cap U) > 0$. Într-adevăr, dacă am avea $\mu(K \cap U) = 0$, atunci ar rezulta $\mu(H \cap U) = 0$ deci $U \subset G_0$ și deci $K \cap U = \emptyset$.

Mulțimea $\mathcal{L}$ formată numai din partea K aparține lui $\mathcal{F}$, deci $\mathcal{F}$ nu este vidă.

Se verifică imediat că dacă $(\mathcal{L}_\alpha)_{\alpha \in A}$ este o familie total ordonată de mulțimi din $\mathcal{F}$, atunci $\mathcal{L} = \bigcup_{\alpha \in A} \mathcal{L}_\alpha$ aparține de asemenea lui $\mathcal{F}$. Mulțimea $\mathcal{F}$ este deci ordonată inductiv. Conform teoremei lui Zorn, $\mathcal{F}$ are cel puțin un element maximal. Fie $\mathcal{X}$ un element maximal al lui $\mathcal{F}$. Mulțimea $\mathcal{X}$ este formată din părți compacte nevide disjuncte două cîte două și pentru orice mulțime $K \in \mathcal{X}$ și orice mulțime deschisă $U \subset T$ cu $U \cap K \neq \emptyset$ avem $\mu(U \cap K) > 0$.

Rămîne de arătat că mulțimea $\mathcal{X}$ are și celelalte proprietăți din enunțul propoziției.

Fie $t \in T$ și V o vecinătate compactă a lui t. Pentru orice familie finită $(K_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ de părți din $\mathcal{X}$, care intersectează pe V avem

$$\sum_{i=1}^{n} \mu(K_i \cap V) = \mu\left(V \cap \left(\bigcup_{i=1}^{n} K_i\right)\right) \leqslant \mu(V)$$

deoarece mulțimile K_i sînt disjuncte. Dacă notăm cu $\mathcal{X}_V$ mulțimile părților $K \in \mathcal{X}$ care intersectează pe V, avem

$$\sum_{K \in \mathcal{X}_V} \mu(K \cap V) \leqslant \mu(V) < \infty.$$

Deoarece $\mu(K \cap V) > 0$ pentru $K \in \mathcal{X}_V$, rezultă că mulțimea $\mathcal{X}_V$ este cel mult numărabilă, deci $\mathcal{X}$ este local numărabilă.

Să arătăm acum că mulțimea $N = T - \bigcup_{K \in \mathcal{X}} K$ este μ-neglijabilă.

Să presupunem prin absurd că N nu este neglijabilă. Există atunci o mulțime compactă K' astfel încît $N \cap K'$ nu este μ-neglijabilă. Există un șir (K_n) de mulțimi din $\mathcal{X}$ ce intersectează pe K', deci

$$N \cap K' = K' - \bigcup_{n=1}^{\infty} (K_n \cap K)$$

Așadar $N \cap K'$ este o mulțime boreliană relativ compactă, deci μ-integrabilă. Există atunci cel puțin o mulțime compactă $H \subset N \cap K'$ cu $\mu(H) > 0$. Ca mai sus se construiește o mulțime compactă $K \subset H$ astfel încît pentru orice mulțime deschisă U cu $U \cap K \neq \emptyset$ să avem $\mu(U \cap K) > 0$. Atunci mulțimea $\mathcal{X} \cup \{K\}$ ar aparține lui $\mathcal{F}$ ceea ce contrazice faptul că mulțimea $\mathcal{X}$ este element maximal în $\mathcal{F}$.

Așadar mulțimea N este μ-neglijabilă și propoziția este demonstrată.

Propoziția 10. (Godement.) *Fie E o mulțime, μ o măsură pozitivă pe T, și pentru fiecare mulțime compactă $K \subset T$, fie o funcție $g_K : K \to E$. Presupunem că pentru fiecare pereche (K, K') de mulțimi compacte funcțiile g_K și $g_{K'}$ sînt egale μ-aproape peste tot pe $K \cap K'$. Există atunci o funcție $f : T \to E$, astfel încît pentru orice mulțime compactă $K \subset T$ să avem $f(t) = g_K(t)$, μ-aproape peste tot pe K.*

Fie $\mathcal{K}$ o mulțime local numărabilă de părți compacte nevide $K \subset T$, disjuncte două cîte două, astfel încît mulțimea $N = T - \bigcup_{K \in \mathcal{K}} K$ să fie μ -neglijabilă.

Definim funcția f pe T astfel:

$$f(t) = \begin{cases} g_K(t), & \text{dacă } t \in K, \text{ și } K \in \mathcal{K} \\ a \in E, & \text{dacă } t \in N. \end{cases}$$

Fie acum $H \subset T$ o mulțime compactă oarecare. Mulțimea părților K din $\mathcal{K}$ ce intersectează pe H este cel mult numărabilă.

Fie (K_n) familia mulțimilor care intersectează pe H. Deoarece $N \cup (\bigcup_{K \in \mathcal{K}} K) = T$, avem $(H \cap N) \cup (\bigcup_n (K_n \cap H)) = H$ iar $H \cap N$ este μ-neglijabilă. Pentru fiecare n există o mulțime μ-neglijabilă $N_n \subset K_n \cap H$ astfel încît pentru $t \in (K_n \cap H) - N_n$ să avem $f_{K_n}(t) = f_H(t)$.

Pentru $t \in (K_n \cap H) - N_n$ avem atunci $f(t) = f_{K_n}(t) = f_H(t)$. Așadar avem $f(t) = f_H(t)$ pentru punctele $t \in H$ care nu aparțin mulțimii μ-neglijabile $(H \cap N) \cup \bigcap_n N_n$.

Cu aceasta propoziția este demonstrată.

Corolar. *Fie $(U_\alpha)_{\alpha \in A}$ o acoperire a lui T formată din mulțimi deschise, și pentru fiecare $\alpha \in A$ fie f_α o aplicație a lui U_α într-o mulțime G, astfel încît pentru orice pereche de indici (α, β), să avem $f_\alpha(t) = f_\beta(t)$, μ -aproape peste tot pe $U_\alpha \cap U_\beta$. Există atunci o funcție $f : T \to G$, astfel încît pentru orice $\alpha \in A$ să avem $f(t) = f_\alpha(t)$, μ -aproape peste tot pe U_α.*

Pentru orice mulțime compactă $K \subset T$ alegem o familie finită $U_{\alpha_1}, \ldots, U_{\alpha_n}$ care acoperă pe K. Fie N_{ij} mulțimea μ -neglijabilă din $U_{\alpha_i} \cap U_{\alpha_j}$ astfel încît pentru $t \in U_{\alpha_i} \cap U_{\alpha_j} - N_{ij}$ să avem $f_{\alpha_i}(t) = f_{\alpha_j}(t)$. Mulțimea $N = \bigcup_{i,j} N_{ij}$ este μ -neglijabilă și oricare ar fi $1 \leqslant i, j \leqslant n$ și $t \in U_{\alpha_i} \cap U_{\alpha_j} - N$, avem $f_{\alpha_i}(t) = f_{\alpha_j}(t)$. Definim atunci funcția $g_K : K \to G$ astfel:

$$g_K(t) = \begin{cases} f_{\alpha_i}(t), & \text{dacă } t \in U_{\alpha_i} - N, \\ a \in G, & \text{dacă } t \in N. \end{cases}$$

Se verifică ușor că oricare ar fi $\alpha \in A$, avem $g_K(t) = f_\alpha(t)$, μ -aproape peste tot pe $K \cap U_\alpha$.

Funcțiile g_K verifică ipoteza propoziției 10, a lui Godement. Există deci o funcție $f : T \to G$ astfel încît pentru orice mulțime compactă $K \subset T$ să avem $f(t) = g_K(t)$, μ-aproape peste tot pe K. Atunci pentru orice $\alpha \in A$ și orice mulțime compactă $K \subset T$ avem $f(t) = g_K(t) = f_\alpha(t)$, μ -aproape peste tot pe $K \cap U_\alpha$, de unde rezultă că $f(t) = f_\alpha(t)$, μ -aproape peste tot pe U_α.

Propoziția 11. *Fie E, F și G trei spații Banach și $u : E \times F \to G$ o aplicație biliniară și continuă, astfel încît $|x| = \sup_{|y| \leqslant 1} |u(x, y)|$ pentru*

orice $x \in E$. Pentru orice funcție μ -măsurabilă $\mathbf{f} : T \to E$ și $o < a < 1$, există o funcție μ -măsurabilă $\mathbf{g} : T \to F$ astfel încît

$$a|\mathbf{f}(t)| \leqslant |u(\mathbf{f}(t), \mathbf{g}(t))| \text{ și } |\mathbf{g}(t)| = 1$$

μ -aproape peste tot.

Fie $K \subset T$ o mulțime compactă. Să presupunem mai întîi că restricția lui $\mathbf{f}$ la K este continuă și că $\mathbf{f}(t) \neq 0$ pentru $t_0 \in K$. Pentru orice punct $t_0 \in K$ există un element $y_0 \in F$ cu $|y_0| = 1$ și

$$a|\mathbf{f}(t_0)| < |u(\mathbf{f}(t_0), y_0)|.$$

Deoarece restricțiile la K ale funcțiilor din această inegalitate sînt continue, există o vecinătate V_0 a lui t_0 astfel încît pentru $t \in V_0 \cap K$ să avem

$$a|\mathbf{f}(t)| < |u(\mathbf{f}(t), y_0)|.$$

Deoarece K este o mulțime compactă, există o familie finită $V_1, \ldots, V_n$ de mulțimi deschise care acoperă pe K și o familie finită $y_1, \ldots, y_n$ de elemente din F astfel încît pentru fiecare i să avem

$$|y_i| = 1 \text{ și } a|\mathbf{f}(t)| < |u(\mathbf{f}(t), y_i)| \text{ pentru } t \in V_i \cap K.$$

Să alegem o familie $A_1, \ldots, A_n$ de mulțimi μ -măsurabile, disjuncte două cîte două, cu $A_i \subset V_i$ pentru fiecare i și $\bigcup_{i=1}^{n} A_i = K$. Funcția etajată $\mathbf{g} = \sum_{i=1}^{n} \varphi_{A_i} y_i$ este μ -măsurabilă și pentru $t \in K$ avem

$$|\mathbf{g}(t)| = 1 \text{ și } a|\mathbf{f}(t)| < |u(\mathbf{f}(t), \mathbf{g}(t))|.$$

Să presupunem acum că $\mathbf{f}$ este măsurabilă și fie $A_0 = \{t \in K ; f(t) = 0\}$. Deoarece $K - A_0$ este μ -integrabilă, există o mulțime μ -neglijabilă $N \subset K - A$ și un șir (K_n) de mulțimi compacte disjuncte a căror reuniune este $K - A_0 - N$ astfel încît restricția lui $\mathbf{f}$ la fiecare K_n să fie continuă și diferită de 0.

Pentru fiecare n există o funcție etajată μ -măsurabilă $\mathbf{g}_n : T \to F$ cu $\mathbf{g}_n(t) = 0$ pentru $t \notin K_n$ și

$$|\mathbf{g}_n(t)| = 1 \text{ și } a|\mathbf{f}(t)| < |u(\mathbf{f}(t), \mathbf{g}_n(t))|, \text{ pentru } t \in K_n.$$

Funcția $\mathbf{g}_K = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{g}_n + \varphi_A y$, unde $y \in F$ și $|y| = 1$, este μ -măsurabilă, are o infinitate numărabilă de valori și pentru $t \in K - N$ avem

$$|\mathbf{g}_K(t)| = 1 \text{ și } a|\mathbf{f}(t)| \leqslant |u(\mathbf{f}(t), \mathbf{g}_K(t))|.$$

Fie acum $\mathcal{K}$ o familie local numărabilă de părți compacte, disjuncte două cîte două, a căror reuniune diferă de T printr-o mulțime μ-neglijabilă (propoziția 7). Funcția

$$\mathbf{g} = \sum_{K \in \mathcal{K}} \mathbf{g}_K$$

este μ -măsurabilă și îndeplinește condițiile cerute.

Corolarul 1. *Fie X și Y două spații Banach. Pentru fiecare funcție μ-măsurabilă $U : T \to \mathcal{L}(X, Y)$ și pentru orice $o < a < 1$, există o funcție μ-măsurabilă $\mathbf{g} : T \to X$ astfel încît*

$$a|U(t)| < |U(t)\mathbf{g}(t)| \text{ și } |\mathbf{g}(t)| = 1$$

μ-aproape peste tot.

Corolarul 2. *Fie E un spațiu Banach, $\mathbf{f} : T \to E$ o funcție μ-măsurabilă și $0 < a < 1$. Există o funcție μ-măsurabilă $\mathbf{f}' : T \to E'$ cu*

$$a|\mathbf{f}(t)| < \ < \mathbf{f}(t), \mathbf{f}'(t) > \text{ și } |\mathbf{f}'(t)| = 1$$

μ-aproape peste tot.

Corolarul 3. *Fie E un spațiu Banach, $\mathbf{f}' : T \to E'$ o funcție μ-măsurabilă și $0 < a < 1$. Există o funcție μ-măsurabilă $\mathbf{f} : T \to E$ cu*

$$a|\mathbf{f}'(t)| < \ < \mathbf{f}(t), \mathbf{f}'(t) > \text{ și } |\mathbf{f}(t)| = 1$$

μ-aproape peste tot.

6. Funcții boreliene

Am văzut că funcțiile semicontinue, inferior sau superior, sînt măsurabile în raport cu orice măsură. O clasă mai largă de funcții care au această proprietate sînt funcțiile boreliene.

Definiția 2. *Fie E un spațiu metric. Vom nota cu $\mathcal{B}_E(T)$ cea mai mică clasă de funcții $f : T \to E$ care conțin funcțiile boreliene etajate, și toate funcțiile care au proprietatea că pentru fiecare mulțime compactă $K \subset T$, există un șir (f_n) de funcții din $\mathcal{B}_E(T)$, convergent către f pe K.*

Se verifică ușor că $\mathcal{B}_E(T)$ este un spațiu vectorial și un modul pe $\mathcal{B}(T) = \mathcal{B}_R(T)$.

Clasa tuturor funcțiilor măsurabile în raport cu o măsură μ, conține funcțiile boreliene etajate și are și proprietatea din enunțul definiției. Urmează că această clasă conține pe $\mathcal{B}_E(T)$, deci funcțiile boreliene sînt măsurabile în raport cu orice măsură.

Conform lemei 1, § 8, orice funcție continuă este boreliană.

Propoziția 12. *Fie $\mu \geqslant 0$ o măsură pe T. Pentru orice funcție μ-măsurabilă $f : T \to E$, există o funcție boreliană $g \in \mathcal{B}_E(T)$ egală cu f, μ-aproape peste tot.*

Pentru fiecare compact $K \subset T$, există un șir (g_n) de funcții boreliene etajate convergent către f, μ-aproape peste tot pe K (teorema 2, § 10). Dacă notăm $g_K(t) = \lim_{n\to\infty} g_n(t)$ dacă limita există și $g_K(t) = 0$ în caz contrar, funcția g_K este boreliană și este egală cu f, μ-aproape peste tot pe K.

Conform propoziției 10, există o funcție $g : T \to E$, astfel încît pentru fiecare mulțime compactă $K \subset T$ să avem $g(t) = g_K(t)$, μ-aproape peste tot.

Urmează că g este boreliană și este egală cu f μ-aproape peste tot.

Propoziția 13. *Fie $\mu \geqslant 0$ o măsură pe T. Pentru orice funcție μ-măsurabilă etajată $\mathbf{f} : T \to E$ există o funcție boreliană etajată $\mathbf{g} : T \to E$ egală cu $\mathbf{f}$ μ-aproape peste tot.*

Fie $A \subset T$ o mulțime μ-măsurabilă. Să arătăm că există o mulțime boreliană $B \subset A$ astfel încît $\mu^*(A - B) = 0$.

Fie $(K_j)_{j \in J}$ o familie local numărabilă de părți compacte disjuncte astfel încît mulțimea $N = T - \bigcup_{j \in J} K_j$ să fie μ-neglijabilă. Deoarece A este μ-măsurabilă, pentru fiecare $j \in J$ mulțimea $A \cap K_j$ este μ-integrabilă, deci este reuniunea unei mulțimi neglijabile N_j și a unui șir $(C_{jn})_{n \in N}$ de mulțimi compacte disjuncte. Mulțimea $B_j = \bigcup_{n=1}^{\infty} C_{jn}$ este boreliană și diferă de $A \cap K_j$ printr-o mulțime μ-neglijabilă. Să arătăm că mulțimea $B = \bigcup_{j \in J} B_j$ este boreliană și diferă de A printr-o mulțime neglijabilă.

Pentru aceasta fie $K \subset T$ o mulțime compactă oarecare. Fiecare punct $t \in K$ are o vecinătate V care este intersectată cel mult de o familie numărabilă de mulțimi K_j. Cum K poate fi acoperit de un număr finit de mulțimi V, rezultă că familia mulțimilor K_j care intersectează pe K este cel mult numărabilă; să le notăm $K_1, K_2, \ldots$ Acestea acoperă împreună cu N pe K. Cum $(A - B) \cap K_i$ este μ-neglijabilă pentru fiecare i, rezultă că $(A - B) \cap K$ este μ-neglijabilă, deci $A - B$ este μ-neglijabilă. Pe de altă parte, $K_i \cap B$ este boreliană pentru fiecare i, deci mulțimea $K_i \cap B \cap K$ este boreliană relativ compactă. Atunci mulțimea $K \cap B = \bigcup_{i=1}^{\infty} (K_i \cap B \cap K)$ este boreliană relativ compactă, deci B este o mulțime boreliană.

Fie acum $\mathbf{f} : T \to E$ o funcție etajată μ-măsurabilă, cu valorile $x_1, x_2, \ldots, x_n$ respectiv pe mulțimile μ-măsurabile $A_1, A_2, \ldots, A_n$. Pentru fiecare i să considerăm mulțimea boreliană B_i care diferă de A_i printr-o mulțime neglijabilă. Atunci funcția $\mathbf{g} : T \to E$ care ia valorile $x_1, x_2, \ldots, x_n$ respectiv pe mulțimile $B_1, B_2, \ldots, B_n$ este boreliană etajată și este egală cu $\mathbf{f}$ aproape peste tot.

Corolarul 1. *Fie E un spațiu metric compact și $\mathbf{f} : T \to E$ o funcție μ-măsurabilă. Există atunci o mulțime μ-neglijabilă $N \subset T$ și un șir $(\mathbf{g}_n)$ de funcții boreliene etajate care converge uniform pe $T - N$ către $\mathbf{f}$.*

Se ține seamă de propoziția 1, § 10.

Corolarul 2. *Dacă E este finit dimensional și dacă $\mathbf{f} : T \to E$ este o funcție μ-măsurabilă mărginită, există o mulțime μ-neglijabilă $N \subset T$ și un șir $(\mathbf{f}_n)$ de funcții boreliene etajate care converge uniform pe $T - N$ către $\mathbf{f}$.*

În particular, corolarul 2 este adevărat pentru funcții măsurabile mărginite reale sau complexe.

§ 12. SPAȚIUL $\mathcal{L}^\infty$

1. Seminorma N_∞

Fie μ o măsură pozitivă pe T și E un spațiu Banach. Pentru orice funcție $\mathbf{f} : T \to E$ vom nota cu $N_\infty(\mathbf{f}, \mu)$ sau $N_\infty(\mathbf{f})$, marginea inferioară a mulțimii numerelor reale α care au proprietatea că $|\mathbf{f}(t)| \leqslant \alpha$, μ-aproape peste tot.

Numărul $N_\infty(\mathbf{f})$ se numește *maximul în măsură al funcției* $|\mathbf{f}|$, sau μ-*maximul* funcției $|\mathbf{f}|$.

Dacă $\mathbf{f}$ și $\mathbf{g}$ sînt egale μ-aproape peste tot, atunci $N_\infty(\mathbf{f}) = N_\infty(\mathbf{g})$.

Propoziția 1. *Pentru orice funcție* $\mathbf{f} : T \to E$ *avem* $|\mathbf{f}(t)| \leqslant N_\infty(\mathbf{f})$, μ-*aproape peste tot.*

Dacă $N_\infty(\mathbf{f}) = +\infty$, afirmația este, evident, adevărată. Să presupunem că $N_\infty(\mathbf{f}) < +\infty$. Fie α_n un șir descrescător astfel încît $\alpha_n > N(\mathbf{f})$ și $\alpha_n \to N_\infty(\mathbf{f})$. Pentru fiecare n avem $|\mathbf{f}(t)| \leqslant \alpha_n$, μ-apoape peste tot, deci mulțimea $A_n = \{t \mid |\mathbf{f}(t)| > \alpha_n\}$ este μ-neglijabilă. Atunci mulțimea

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = \{t \mid |\mathbf{f}(t)| > \inf_n \alpha_n\}$$

este de asemenea μ-neglijabilă. Observînd că $\inf_n \alpha_n = \lim_{n\to\infty} \alpha_n = N_\infty(\mathbf{f})$ deducem că $|\mathbf{f}(t)| \leqslant N_\infty(\mathbf{f})$, μ-aproape peste tot.

Proprietățile funcției $N_\infty(\mathbf{f})$ sînt următoarele:

1) $0 \leqslant N_\infty(\mathbf{f}) \leqslant +\infty$; $N_\infty(\mathbf{f}) = 0$ dacă și numai dacă și $\mathbf{f}$ este μ-neglijabilă;

2) $N_\infty(\alpha\mathbf{f}) = |\alpha| N_\infty(\mathbf{f})$, α scalar;

3) $N_\infty(\mathbf{f} + \mathbf{g}) \leqslant N_\infty(\mathbf{f}) + N_\infty(\mathbf{g})$;

4) $N_\infty(\mathbf{f}) \leqslant N_\infty(\mathbf{g})$ dacă $|\mathbf{f}| \leqslant |\mathbf{g}|$.

Prima parte a proprietății 1) este evidentă; din inegalitatea $|\mathbf{f}(t)| \leqslant N_\infty(\mathbf{f})$, μ-aproape peste tot, deducem că dacă $N_\infty(\mathbf{f}) = 0$, atunci $\mathbf{f}(t) = 0$, μ-aproape peste tot; reciproc, dacă $\mathbf{f}(t) = 0$, μ-aproape peste tot, atunci $N_\infty(\mathbf{f}) = N_\infty(0) = 0$.

Proprietatea 2) este evident adevărată pentru $\alpha = 0$, deoarece $\alpha\mathbf{f} = 0$ și $0\, N_\infty(\mathbf{f}) = 0$, chiar dacă $N_\infty(\mathbf{f}) = +\infty$; dacă $\alpha \neq 0$, să observăm că $|\alpha\mathbf{f}(t)| \leqslant \beta$, μ-aproape peste tot, dacă și numai dacă $|\mathbf{f}(t)| \leqslant \dfrac{\beta}{|\alpha|}$, μ-aproape peste tot. Așadar, $\beta \geqslant N_\infty(\alpha\mathbf{f})$ dacă și numai dacă $\dfrac{\beta}{|\alpha|} \geqslant N_\infty(\mathbf{f})$, adică $\beta \geqslant |\alpha| N_\infty(\mathbf{f})$. Rezultă atunci egalitatea $N_\infty(\alpha\mathbf{f}) = |\alpha| N_\infty(\mathbf{f})$.

Proprietatea 3) se obține observînd că $|\mathbf{f}(t)| \leqslant N_\infty(f)$ și $|\mathbf{g}(t)| \leqslant N_\infty(\mathbf{g})$, μ-aproape peste tot, deci

$$|\mathbf{f}(t) + \mathbf{g}(t)| \leqslant |\mathbf{f}(t)| + |\mathbf{g}(t)| \leqslant N_\infty(\mathbf{f}) + N_\infty(\mathbf{g}),$$

μ-aproape peste tot, de unde

$$N_\infty(\mathbf{f} + \mathbf{g}) \leqslant N_\infty(\mathbf{f}) + N_\infty(\mathbf{g}).$$

Proprietatea 4) este imediată.

Din aceste proprietăți se deduce și inegalitatea

5) $|N_\infty(\mathbf{f}) - N_\infty(\mathbf{g})| \leqslant N_\infty(\mathbf{f} - \mathbf{g})$.

Dacă $\mathbf{f} : T \to E$ și φ este o funcție scalară, atunci

6) $N_\infty(\mathbf{f}\varphi) \leqslant N_\infty(\mathbf{f})\ N_\infty(\varphi)$.

Într-adevăr, $|\mathbf{f}(t)| \leqslant N_\infty(\mathbf{f})$ și $|\varphi(t)| \leqslant N_\infty(\varphi)$, μ-aproape peste tot, deci

$$|\mathbf{f}(t)\,\varphi(t)| = |\mathbf{f}(t)|\,|\varphi(t)| \leqslant N_\infty(\mathbf{f})\,N_\infty(\varphi),$$

μ-aproape peste tot, de unde rezultă inegalitatea 6).

Dacă E este o algebră normată, atunci inegalitatea

7) $N_\infty(\mathbf{fg}) \leqslant N_\infty(\mathbf{f})\,N_\infty(\mathbf{g})$

este adevărată pentru orice funcții $\mathbf{f}, \mathbf{g} : T \to E$.

8) $N_\infty(\mathbf{f}) = \sup_K N_\infty(\mathbf{f}\,\varphi_K)$, K compact.

Dacă $N_\infty(\mathbf{f}) = 0$, atunci $N_\infty(\mathbf{f}\,\varphi_K) = 0$ și egalitatea este verificată.

Să presupunem $N_\infty(\mathbf{f}) = a > 0$ și fie $0 < \alpha < a$. Mulțimea $A = \{t \mid |\mathbf{f}(t)| > \alpha\}$ nu este neglijabilă. Există o mulțime compactă $K \subset T$ astfel încît $\mu^*(A \cap K) > 0$. Atunci $N_\infty(\mathbf{f}\,\varphi_K) > \alpha$ deci $\sup_K N_\infty(\mathbf{f}\varphi_K) = N(\mathbf{f})$.

Pentru o funcție numerică (finită sau infinită) $f : T \to \bar{R}$ se definește $N_\infty(f)$ ca mai sus. Propoziția 1 rămîne adevărată și în acest caz. Rezultă că dacă $N_\infty(f) < +\infty$, atunci $|f(t)| < +\infty$, μ-aproape peste tot.

Proprietățile de mai sus rămîn valabile și în acest caz, dacă suma $f + g$, sau diferența $f - g$, este definită pe T. Și în acest caz, pentru două funcții f și g egale μ-aproape peste tot, avem $N_\infty(f) = N_\infty(g)$.

Așadar, pentru funcțiile f definite pe T, cu valori în E sau în $\bar{R}$, $N_\infty(f)$ nu depinde decît de clasa $\tilde{f}$ a funcțiilor egale cu f, μ-aproape peste tot. De aceea punem prin definiție

$$N_\infty(\tilde{f}) = N_\infty(f).$$

Dacă $\mathbf{f}$ este o funcție cu valori în E sau în $\bar{R}$, definită μ-aproape peste tot pe E, punem $N_\infty(\mathbf{f}) = N_\infty(\tilde{\mathbf{f}})$. În acest caz, $N_\infty(\mathbf{f})$ are aceleași proprietăți ca și pentru funcțiile definite peste tot.

Inegalitatea lui Hölder

$$\int^* fg\ d\mu \leqslant N_p(f)\,N_q(g), \quad f \geqslant 0, g \geqslant 0$$

a fost demonstrată pentru $1 < p, q < +\infty, \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Vom demonstra acum această inegalitate și în cazul cînd $p = 1$ și $q = +\infty$.

Propoziția 2. *Pentru orice funcții pozitive f și g definite pe T (cu valori finite sau $+\infty$), avem*

$$\int^* fg \, d\mu \leqslant N_1(f) \, N_\infty(g).$$

Într-adevăr, avem $g(t) \leqslant N_\infty(g)$, μ-aproape peste tot, deci

$$f(t) \; g(t) \leqslant f(t) \, N_\infty(g)$$

μ-aproape peste tot. De aici

$$\int^* fg \, d\mu \leqslant \int^* f N_\infty(g) \, d\mu = \int^* f d\mu \cdot N_\infty(g) = N_1(f) N_\infty(g).$$

2. Spațiul $\mathcal{F}^\infty$

Fie μ o măsură pozitivă pe T și E un spațiu Banach. Vom nota cu $\mathcal{F}_E^\infty(T, \mu)$ sau $\mathcal{F}_E^\infty(\mu)$ sau $\mathcal{F}_E^\infty$ mulțimea funcțiilor $\mathbf{f} : T \to E$ cu $N_\infty(\mathbf{f}) < +\infty$. Mulțimea $\mathcal{F}_E^\infty$ este un spațiu vectorial iar $N_\infty(\mathbf{f})$ este o seminormă pe acest spațiu.

Dacă E este o algebră normată, atunci $\mathcal{F}_E^\infty$ este o algebră.

O funcție $\mathbf{f}$ din $\mathcal{F}_E^\infty$ poate fi caracterizată prin faptul că există o funcție *mărginită* $\mathbf{g}$, egală cu $\mathbf{f}$, μ-aproape peste tot.

Într-adevăr, putem lua $\mathbf{g}(t) = \mathbf{f}(t)$ dacă $|\mathbf{f}(t)| \leqslant N_\infty(\mathbf{f})$ și $\mathbf{g}(t) = 0$ în caz contrar.

În particular, $\mathcal{F}_E^\infty$ conține toate funcțiile constante.

Propoziția 3. *Un șir $(\mathbf{f}_n)$ de funcții din $\mathcal{F}_E^\infty$ converge către o funcție $\mathbf{f} \in \mathcal{F}_E^\infty$ pentru topologia definită de seminorma N_∞, dacă și numai dacă există o mulțime μ-neglijabilă $A \subset T$, astfel încît șirul $(\mathbf{f}_n)$ converge uniform către $\mathbf{f}$ pe $T - A$.*

Să observăm mai întîi că pentru fiecare n există o mulțime μ-neglijabilă $A_n \subset T$, astfel încît să avem $|\mathbf{f}_n(t) - \mathbf{f}(t)| \leqslant N_\infty(\mathbf{f}_n - \mathbf{f})$ pentru $t \notin A_n$. Mulțimea $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ este μ-neglijabilă și pentru orice $t \in \complement A$ și orice $n \in N$ avem

$$|\mathbf{f}(t) - \mathbf{f}(t)| \leqslant N_\infty(\mathbf{f}_n - \mathbf{f}).$$

Mai mult, pentru orice $n \in N$ avem

$$\sup_{t \in \complement A} |\mathbf{f}_n(t) - \mathbf{f}(t)| = N_\infty(\mathbf{f}_n - \mathbf{f}).$$

De aici rezultă că dacă $N_\infty(\mathbf{f}_n - \mathbf{f}) \to 0$, atunci șirul $(\mathbf{f}_n)$ converge uniform către $\mathbf{f}$ pe mulțimea $\mathbf{C}A$, și reciproc, dacă $(\mathbf{f}_n)$ converge uniform către $\mathbf{f}$ pe $\mathbf{C}A$, atunci $N_\infty(\mathbf{f}_n - \mathbf{f}) \to 0$.

Propoziția 4. *Spațiul $\mathcal{F}_E^\infty$ este complet.*

Fie $(\mathbf{f}_n)$ un șir Cauchy de funcții din $\mathcal{F}_E^\infty$. Pentru orice pereche (m, n) de numere naturale, există o mulțime μ-neglijabilă $A_{m,n}$ astfel încît pentru $t \notin A_{m,n}$ să avem $|\mathbf{f}_n(t) - \mathbf{f}(t)| \leqslant N_\infty(\mathbf{f}_n - f_m)$. De asemenea, pentru orice $n \in N$, există o mulțime μ-neglijabilă B_n astfel încît pentru $t \notin B_n$ să avem $|\mathbf{f}_n(t)| \leqslant N_\infty(\mathbf{f}_n)$. Reuniunea A a mulțimilor $A_{m,n}$ și B_n este μ-neglijabilă și pentru orice $t \notin \mathbf{C}A$ avem $|\mathbf{f}_n(t) - \mathbf{f}_m(t)| \leqslant N_\infty(\mathbf{f}_n - \mathbf{f}_m)$ și $|\mathbf{f}_n(t)| \leqslant N_\infty(\mathbf{f}_n)$, oricare ar fi n și m. Deoarece $\lim\limits_{\substack{n\to\infty \\ m\to\infty}} N_\infty(\mathbf{f}_n - \mathbf{f}_m) = 0$, rezultă că $\lim\limits_{\substack{n\to\infty \\ m\to\infty}} |\mathbf{f}_n(t) - \mathbf{f}_m(t)| = 0$, uniform pentru $t \in \mathbf{C}A$. Așadar, pentru $t \in \mathbf{C}A$ șirul $(\mathbf{f}_n(t))$ este un șir Cauchy de elemente din spațiul Banach E, deci are o limită. Să punem

$$\mathbf{f}(t) = \begin{cases} \lim\limits_{n\to\infty} \mathbf{f}_n(t), & \text{pentru } t \notin A, \\ 0, & \text{pentru } t \in A. \end{cases}$$

Din inegalitatea

$$|N_\infty(\mathbf{f}_n) - N_\infty(\mathbf{f}_m)| \leqslant N_\infty(\mathbf{f}_n - \mathbf{f}_m)$$

rezultă că șirul de numere $(N_\infty(\mathbf{f}_n))$ este un șir Cauchy, deci este convergent. Avem, pentru $t \notin A$,

$$|\mathbf{f}(t)| = \lim_{n\to\infty} |\mathbf{f}_n(t)| \leqslant \lim_{n\to\infty} N_\infty(\mathbf{f}_n) < +\infty$$

deci

$$N_\infty(\mathbf{f}) \leqslant \lim_{n\to\infty} N_\infty(\mathbf{f}_n) < +\infty$$

adică $\mathbf{f} \in \mathcal{F}_E^\infty$.

Deoarece $(\mathbf{f}_n)$ converge uniform către $\mathbf{f}$ pe $\mathbf{C}A$, rezultă că $N_\infty(\mathbf{f}_n - \mathbf{f}) \to 0$, și propoziția este demonstrată.

3. Spațiul $\mathcal{L}^\infty$

Pentru $1 \leqslant p < +\infty$, spațiul $\mathcal{L}_E^p$ se caracterizează ca fiind *subspațiul funcțiilor μ-măsurabile* din $\mathcal{F}_E^p$.

În mod analog, în cazul $p = \infty$, vom nota cu $\mathcal{L}_E^\infty(T, \mu)$ sau $\mathcal{L}_E^\infty(\mu)$ sau $\mathcal{L}_E^\infty$, *mulțimea funcțiilor μ-măsurabile din $\mathcal{F}_E^\infty$*.

Deducem imediat că $\mathcal{L}_E^\infty$ este un spațiu vectorial și că N_∞ este o seminormă pe acest spațiu. Spațiul $\mathcal{L}_E^\infty$ conține ca un subspațiu vectorial mulțimea $\mathcal{N}_\infty$ a funcțiilor μ-neglijabile $\mathbf{f} : T \to E$.

Spațiul cît $\mathcal{L}_E^\infty / \mathcal{N}_\infty$ va fi notat L_E^∞. Funcția $N_\infty(\tilde{\mathbf{f}})$ este o normă pe L_E^∞. Această normă se notează de asemenea cu $\|\tilde{\mathbf{f}}\|_\infty$.

În cazul cînd $E = R$, vom scrie $\mathcal{L}^\infty$ și L^∞ în loc de $\mathcal{L}_R^\infty$ și L_R^∞.

Dacă $\mathbf{m} : \mathcal{K}_E(T) \to F$ este o măsură majorată, vom scrie uneori $\mathcal{L}_E^\infty(\mathbf{m})$ în loc de $\mathcal{L}_E^\infty(|\mathbf{m}|)$, și $N_\infty(\mathbf{f}, \mathbf{m})$ în loc de $N_\infty(\mathbf{f}, |\mathbf{m}|)$.

Propoziția 5. *Spațiul $\mathcal{L}_E^\infty$ este complet. Spațiul L_E^∞ este un spațiu Banach.*

Fie $(\mathbf{f}_n)$ un șir de funcții din $\mathcal{L}_E^\infty$ care converge către o funcție $\mathbf{f} \in \mathcal{F}_E^\infty$ pentru seminorma N_∞. Există o mulțime μ-neglijabilă $N \subset T$ în afara căreia șirul $(\mathbf{f}_n)$ converge uniform către $\mathbf{f}$. Funcțiile $\mathbf{f}_n$ sînt μ-măsurabile, deci funcțiile $\mathbf{g}_n = \mathbf{f}_n \varphi_{\mathbf{C}N}$ sînt μ-măsurabile și converg către funcția $\mathbf{g} = \mathbf{f}\varphi_{\mathbf{C}N}$. Rezultă că $\mathbf{g}$ este μ-măsurabilă; funcția $\mathbf{f}$ este de asemenea μ-măsurabilă deoarece este egală μ-aproqpe peste tot cu $\mathbf{g}$. Urmează că $\mathbf{f} \in \mathcal{L}_E^\infty$. Așadar $\mathcal{L}_E^\infty$ este închis în spațiul complet $\mathcal{F}_E^\infty$. Deducem că și $\mathcal{L}_E^\infty$ este complet. Spațiul cît L_E^∞ este atunci de asemenea complet.

Propoziția 6. *Orice funcție $\mathbf{f} : T \to E$ boreliană și mărginită aparține spațiului $\mathcal{L}_E^\infty(\mu)$ oricare ar fi măsura μ.*

Într-adevăr, funcțiile boreliene sînt măsurabile pentru orice măsură μ.

În particular, $\mathcal{L}_E^\infty(\mu)$ conține funcțiile continue și mărginite.

Să observăm că dacă $\mathbf{f}$ este continuă și mărginită, avem

$$N_\infty(\mathbf{f}) \leqslant \|\mathbf{f}\| = \sup_{t \in T} |\mathbf{f}(t)|$$

și inegalitatea poate fi strictă.

Propoziția 7. *Pentru ca să avem egalitatea $N_\infty(\mathbf{f}) = \|\mathbf{f}\|$ pentru orice funcție $\mathbf{f}$ continuă și mărginită, este necesar și suficient ca suportul măsurii μ să fie egal cu T.*

Dacă suportul $S(\mu)$ al măsurii μ este diferit de T, mulțimea $\mathbf{C}S(\mu)$ este deschisă și μ-neglijabilă. Există o funcție $\mathbf{f}$ continuă neidentic nulă cu suportul conținut în $\mathbf{C}S(\mu)$. Avem atunci $\|\mathbf{f}\| > 0$ și $N_\infty(\mathbf{f}) = 0$. Așadar, dacă $N_\infty(\mathbf{f}) = \|\mathbf{f}\|$ pentru orice funcție $\mathbf{f}$ continuă și mărginită, atunci $S(\mu) = T$.

Reciproc, să presupunem că $S(\mu) = T$. Fie $\mathbf{f} : T \to E$ o funcție continuă și mărginită neidentic nulă și fie $0 < \alpha < \|\mathbf{f}\|$. Mulțimea $\{t \| \mathbf{f}(t)| < \alpha\}$ este deschisă și nevidă, deci are măsura strict pozitivă. Urmează că $N_\infty(\mathbf{f}) > \alpha$. Deducem atunci că $N_\infty(\mathbf{f}) = \|\mathbf{f}\|$. Propoziția este demonstrată

Dacă $S(\mu) = T$, putem scufunda spațiul Banach $\mathcal{C}_E^\infty(T)$ al funcțiilor $\mathbf{f} : T \to E$ continue și mărginite, în spațiul $\mathcal{L}_E^\infty(T)$. Spațiul $\mathcal{L}_E^\infty(T)$ nu este separat în general, astfel că spațiul Banach $\mathcal{C}_E^\infty(T)$ nu este un subspațiu închis în $\mathcal{L}_E^\infty$. Dacă identificăm o funcție $\mathbf{f} \in \mathcal{C}_E^\infty(T)$ cu clasa $\tilde{\mathbf{f}} \in L_E^\infty$, spațiul $\mathcal{C}_E^\infty(T)$ se poate scufunda izometric în spațiul L_E^∞, deoarece, dacă $S(\mu) = T$, două funcții diferite $\mathbf{f}$ și $\mathbf{g}$ din $\mathcal{C}_E^\infty(T)$ aparțin la clase diferite $\tilde{\mathbf{f}}$ și $\tilde{\mathbf{g}}$ din L_E^∞. În acest caz, $\mathcal{C}_E^\infty(T)$ este un subspațiu închis al spațiului Banach L_E^∞. Spațiul $\mathcal{C}_E^\infty$ este diferit, în general, de L_E^∞, deoarece pentru o funcție oarecare $\mathbf{f} \in L_E^\infty$ nu există în general o funcție

$\mathbf{g}$ continuă și mărginită, egală μ-aproape peste tot cu $\mathbf{f}$. Rezultă de aici că spațiul $\mathcal{K}_E(T)$ al funcțiilor $\mathbf{f}: T \to E$ continue cu suport compact nu este în general dens în $\mathcal{L}_E^\infty$, deoarece $\overline{\mathcal{K}_K(T)} \subset \mathcal{C}_E^\infty(T)$.

Propoziția 8. *Orice funcție μ-măsurabilă etajată $\mathbf{f}: T \to E$ aparține spațiului $\mathcal{L}_E^\infty$.*

Într-adevăr, o funcție etajată ia un număr finit de valori, deci este mărginită.

Am văzut că spațiul funcțiilor boreliene etajate, cu suport compact, este dens în fiecare spațiu $\mathcal{L}_E^p$, $1 \leqslant p < +\infty$. În general însă, spațiul tuturor funcțiilor etajate μ-măsurabile (cu suport oarecare) nu este dens în $\mathcal{L}_E^\infty$, deoarece o funcție oarecare $\mathbf{f} \in \mathcal{L}_E^\infty$ nu este în general limita uniformă, pe complementara unei mulțimi μ-neglijabile a unui șir de funcții etajate.

Totuși, pentru funcții cu valori într-un spațiu finit dimensional, avem

Propoziția 9. *Dacă E este finit dimensional, spațiul funcțiilor etajate boreliene $\mathbf{f}: T \to E$ este dens în spațiul $\mathcal{L}_E^\infty$.*

Într-adevăr, orice funcție $\mathbf{f} \in \mathcal{L}_E^\infty$ este egală aproape peste tot cu o funcție mărginită $\mathbf{g} \in \mathcal{L}_E^\infty$, iar funcția μ-măsurabilă și mărginită $\mathbf{g}$ poate fi aproximată uniform aproape peste tot prin funcții etajate boreliene (corolarul 2 al propoziției 13, § 11).

Corolar. *Spațiul funcțiilor etajate boreliene reale (respectiv complexe) este dens în spațiul $\mathcal{L}^\infty$ (respectiv $\mathcal{L}_C^\infty$).*

§ 13. PROPRIETATEA DE RIDICARE

1. Proprietatea de ridicare a lui $\mathcal{L}^\infty$

Fie μ o măsură *pozitivă* pe T. Pentru două funcții f și g definite pe T scriem $f \sim g$ dacă f și g sînt egale μ-aproape peste tot.

Definiția 1. *Fie $\mathcal{F}$ o algebră de funcții reale sau complexe definite pe T. O aplicație $\rho: \mathcal{F} \to \mathcal{F}$ se numește ridicare a lui $\mathcal{F}$ dacă îndeplinește următoarele condiții:*

I. $\rho(f) \sim f$;

II. $f \sim g$ *implică* $\rho(f) = \rho(g)$;

III. $f =$ constant *implică* $\rho(f) = f$;

IV. $\rho(\alpha f + \beta g) = \alpha\rho(f) + \beta\rho(g)$;

V. $f \geqslant 0$ *implică* $\rho(f) \geqslant 0$;

VI. $\rho(fg) = \rho(f)\,\rho(g)$.

Dacă $\mathcal{F}$ posedă o ridicare ρ, spunem că $\mathcal{F}$ are proprietatea de ridicare.

Nu orice algebră $\mathcal{F}$ posedă o ridicare. De exemplu, algebra tuturor funcțiilor μ-măsurabile nu posedă nici o ridicare.

Propoziția 1. *Dacă* $\mu \neq 0$, *atunci algebra* $\mathcal{L}^\infty(\mu)$ *are proprietatea de ridicare**).

O ridicare ρ a lui $\mathcal{L}^\infty(\mu)$ are, încă, următoarele proprietăți:

VII. $f(t) \leqslant g(t)$ μ-aproape peste tot, implică $\rho(f) \leqslant \rho(g)$ peste tot;

VIII. $|\rho(f)(t)| \leqslant N_\infty(f)$, pentru orice $t \in T$;

IX. $|\rho(f)| = \rho(|f|)$;

X. $\rho(\sup(f, g)) = \sup(\rho(f), \rho(g))$,
$\rho(\inf(f, g)) = \inf(\rho(f), \rho(g))$.

Fiecare ridicare ρ a lui $\mathcal{L}^\infty(\mu)$ se extinde în mod unic la o ridicare a spațiului $\mathcal{L}_C^\infty(\mu)$ notată tot ρ, punînd pentru fiecare funcție complexă $f = f_1 + if_2$ cu $f_1, f_2 \in \mathcal{L}^\infty(\mu)$

$$\rho(f) = \rho(f_1) = i\rho(f_2).$$

Se verifică imediat că pe $\mathcal{L}_C^\infty(\mu)$, ρ are toate proprietățile I—VI și VII—X.

În continuare, orice ridicare a lui $\mathcal{L}^\infty(\mu)$ va fi considerată în mod automat prelungită la $\mathcal{L}_C^\infty(\mu)$ ca mai sus.

Pentru două mulțimi A, $B \subset T$ scriem $A \sim B$ dacă $\varphi_A \sim \varphi_B$, adică dacă $\mu^*(A \triangle B) = 0$.

Fie ρ o ridicare a lui $\mathcal{L}^\infty(\mu)$. Pentru fiecare mulțime μ-măsurabilă $A \subset T$, $\rho(\varphi_A)$ este o funcție caracteristică a unei mulțimi notate $\rho(A)$:

$$\varphi_{\rho(A)} = \rho(\varphi_A).$$

Aplicația ρ definită pentru mulțimile μ-măsurabile are următoarele proprietăți:

I'. $\rho(A) \sim A$;

II'. $A \sim B$ implică $\rho(A) = \rho(B)$;

III'. $\rho(\varnothing) = \varnothing$ și $\rho(T) = T$;

IV'. $\rho(A \cup B) = \rho(A) \cup \rho(B)$;

V'. $\rho(A \cap B) = \rho(A) \cap \rho(B)$;

și de asemenea următoarele proprietăți care se deduc din cele precedente:

VI'. $A \subset B$ implică $\rho(A) \subset \rho(B)$;

VII'. $A \cap B = \varnothing$ implică $\rho(A) \cap \rho(B) = \varnothing$;

VIII'. $\rho(A - B) = \rho(A) - \rho(B)$.

Afară de $\mathcal{L}^\infty(\mu)$, există și alte algebre care au proprietatea de ridicare.

Să observăm mai întîi că dacă ρ este ridicare a unei algebre $\mathcal{F}$ și dacă $\mathcal{G}$ este o subalgebră a lui $\mathcal{F}$ care conține o dată cu o funcție f, toate funcțiile din $\mathcal{F}$ echivalente cu f, atunci restricția lui ρ la $\mathcal{G}$ este o ridicare a lui $\mathcal{G}$.

Vom nota cu $C(\mu)$ mulțimea familiilor local numărabile $\mathcal{K} = (K_i)_{i \in J}$ de părți compacte nevide disjuncte, pentru care mulțimea $T - \bigcup_{i \in J} K_i$ este μ-neglijabilă.

*) Demonstrația este dată în lucrarea *Teoria măsurii și funcții reale* de N. Dinculeanu Editura didactică și pedagogică, București 1964.

Dacă $\mathcal{K}_1 = (K_i)_{i\in I} \in C(\mu)$ și $\mathcal{K}_2 = (K_j)_{j\in J} \in C(\mu)$, atunci familia $\mathcal{K}$ formată din mulțimile nevide $K_i \cap K_j$ cu $i \in I$ și $j \in J$, aparține lui $C(\mu)$.

Astfel, mulțimea $C(\mu)$ este ordonată prin relația $\mathcal{K}' < \mathcal{K}''$ care înseamnă că fiecare mulțime din $\mathcal{K}'$ este conținută într-o mulțime din $\mathcal{K}''$.

Pentru fiecare familie $\mathcal{K} = (K_j)_{j\in J} \in C(\mu)$ să notăm cu $\mathcal{M}_C^\infty(\mathcal{K})$ mulțimea funcțiilor complexe f definite pe T, care au proprietatea că $\varphi_{K_j} \in \mathcal{L}_C^\infty(\mu)$, pentru orice $j \in J$. Mulțimea $\mathcal{M}_C^\infty(\mathcal{K})$ este o algebră care conține pe $\mathcal{L}_C^\infty(\mu)$.

Propoziția 2. *Pentru fiecare ridicare ρ a lui $\mathcal{L}^\infty(\mu)$ există o ridicare $\rho_{\mathcal{K}}$ a lui $\mathcal{M}_C^\infty(\mathcal{K})$ astfel încît pentru orice funcție $f \in \mathcal{M}_C^\infty(\mathcal{K})$ și orice $j \in J$ să avem*

$$\rho(\varphi_{K_j} f) = \varphi_{\rho(K_j)}\, \rho_{\mathcal{K}}(f).$$

Fie ρ o ridicare a lui $\mathcal{L}_C^\infty(\mu)$ și A o mulțime compactă cu $\mu(A) > 0$. Să considerăm subalgebra $\mathcal{L}_C^\infty(A, \mu)$ a funcțiilor $f \in \mathcal{L}_C^\infty(\mu)$ care se anulează în afara lui A. Fie $\chi : \mathcal{L}_C^\infty(A, \mu) \to C$ o aplicație liniară continuă și multiplicativă cu $\chi(\varphi_A) = 1$. Din teoria algebrelor Banach se știe că există asemenea aplicații.

Pentru fiecare funcție $f \in \mathcal{M}_C^\infty(\mathcal{K})$ definim funcția $\rho_{\mathcal{K}}(f)$ astfel:

$$\rho_{\mathcal{K}}(f)(t) = \rho(\varphi_{K_j} f)\ (t), \text{ dacă } t \in \rho(K_j) \text{ și } j \in J,$$
$$\rho_{\mathcal{K}}(f)(t) = \chi(f\varphi_A) \text{ dacă } t \in T - \bigcup_{j\in J} \rho(K_j).$$

Se verifică imediat că $\rho_{\mathcal{K}}(f)\, \varphi_{K_j} \in \mathcal{L}_C^\infty(\mu)$ pentru fiecare $j \in J$ și deci $\rho_{\mathcal{K}}(f) \in \mathcal{M}_C^\infty(\mu)$, și că $\rho_{\mathcal{K}}$ are toate proprietățile I—VI.

Să notăm cu $\mathcal{M}_C^\infty$ mulțimea funcțiilor $f : T \to C$ care au proprietatea că $f\varphi_K \in \mathcal{L}_C^\infty(\mu)$ pentru orice mulțime compactă. $\mathcal{M}_C^\infty$ este o subalgebră a algebrei $\mathcal{M}_C^\infty(\mathcal{K})$, oricare ar fi familia $\mathcal{K} = (K_j)_{j\in J}$ local numărabilă de părți compacte disjuncte astfel încît $T - \bigcup K_j$ să fie μ-neglijabilă.

Corolar. *Există o aplicație $\rho_1 : \mathcal{M}_C^\infty \to \mathcal{M}_C^\infty$, numită ridicare a lui $\mathcal{M}_C^\infty$, care are proprietățile* I—VI.

Fie $\mathcal{K} = (K_j)_{j\in J}$ o familie local numărabilă de părți compacte disjuncte astfel încît $T - \bigcup K_j$ să fie μ-neglijabilă. Restricția ρ_1 a lui $\rho_{\mathcal{K}}$ la $\mathcal{M}_C^\infty$ este o ridicare a lui $\mathcal{M}_C^\infty$ deoarece pentru $f \in \mathcal{M}_C^\infty$ și K compact avem, $\rho_{\mathcal{K}}(f)\, \varphi_K \sim f\varphi_K \in \mathcal{M}_C^\infty$ deci $\rho_{\mathcal{K}}(f) \in \mathcal{M}_C^\infty$.

O aplicație imediată a existenței unei ridicări a spațiului $\mathcal{L}_C^\infty$ este propoziția următoare, care extinde teorema 1, § 5, la cazul funcțiilor măsurabile.

Propoziția 3. *Fie ρ o ridicare a lui $\mathcal{M}_R^\infty$ și fie $\mathcal{F}$ o mulțime filtrantă (pentru relația $\leqslant$) de funcții $f \in \mathcal{M}_R^\infty$ astfel încît $f \geqslant 0$ și $\rho(f) = f$. Atunci anvelopa superioară $f_\infty = \sup_{f\in\mathcal{F}} f$ este μ-măsurabilă și*

$$\int^* \sup_{f\in\mathcal{F}} f\, d\mu = \sup_{f\in\mathcal{F}} \int^* f\, d\mu.$$

Să presupunem mai întîi că f_∞ este mărginită. Fie $K \subset T$ o mulțime compactă. Atunci

$$f_\infty(t)\,\varphi_{\rho(K)}(t) = \sup_{f\in\mathcal{F}} f(t)\,\varphi_{\rho(K)}(t), \text{ pentru orice } t\in T.$$

Deoarece f_∞ este mărginită, fiecare funcție $f\in\mathcal{F}$ este mărginită, deci avem $f\varphi_K \in \mathcal{L}^1(\mu)$ pentru fiecare $f\in\mathcal{F}$. Rezultă că mulțimea $\mathcal{F}_K = \{\tilde{f}_{\rho(K)};\ f\in F\}$ de elemente din $L^1(\mu)$ este filtrantă și $\sup_{f\in\mathcal{F}_K} \|\tilde{f}\,\tilde{\varphi}_{\rho(K)}\|_1 \leqslant N_1(f_\infty\,\varphi_K) < \infty$. Conform teoremei 7, § 7, $\mathcal{F}_K$ are o margine superioară $\tilde{g}\in L^1(\mu)$ și converge către $\tilde{g}$ în $L^1(\mu)$. Putem găsi un șir crescător de funcții din $\mathcal{F}$ astfel încît $(\tilde{f}_n\,\tilde{\varphi}_{\rho(K)})$ să tindă către $\tilde{g}$ în $L^1(\mu)$ și aproape peste tot. Atunci $f_\infty(t)\,\varphi_{\rho(K)}(t) \geqslant \lim_{n\to\infty} f_n(t)\,\varphi_{\rho(K)}(t) = g(t)$, μ-aproape peste tot. Urmează că $g\in\mathcal{L}^\infty(\mu)$. Din inegalitatea

$$g(t) \geqslant f(t)\,\varphi_{\rho(K)}(t),\ \mu\text{-aproape peste tot}$$

pentru fiecare $f\in\mathcal{F}$, deducem

$$\rho(g)(t) \geqslant \rho(f\varphi_{\rho(K)})(t) = f(t)\,\varphi_{\rho(K)}(t)$$

pentru orice $t\in T$ și $f\in\mathcal{F}$, deci

$$\rho(g)(t) \geqslant f_\infty(t)\varphi_{\rho(K)}(t), \text{ pentru orice } t\in T.$$

Așadar $f_\infty\varphi_{\rho(K)}$ coincide cu g aproape peste tot deci este μ-măsurabilă și

$$\sup_{f\in\mathcal{F}}\int f\varphi_{\rho(K)}\,d\mu = \int g\,d\mu = \int f_\infty\,\varphi_{\rho(K)}\,d\mu.$$

Deoarece K este arbitrar, rezultă că f_∞ este μ-măsurabilă; luînd în egalitatea precedentă marginea superioară pentru toate mulțimile compacte $K\subset T$, deducem

$$\sup_{f\in\mathcal{F}}{}^*\int f\,d\mu = {}^*\int f_\infty\,d\mu.$$

Să presupunem acum că f_∞ este oarecare. Pentru fiecare număr natural p, să considerăm familia $\mathcal{F}_p = \{\inf(f, p);\ f\in\mathcal{F}\}$. Mulțimea $\mathcal{F}_p$ este filtrantă, formată din funcții mărginite și avem

$$\rho(\inf(f,\ p)) = \inf(\rho(f),\ \rho(p)) = \inf(f,\ p)$$

și

$$\inf(f_\infty, p) = \sup_{f\in\mathcal{F}} \inf(f,\ p) = \sup_{g\in\mathcal{F}_p} g$$

Deoarece $\inf(f_\infty, p)$ este mărginită, din prima parte a demonstrației deducem că $\inf(f_\infty, p)$ este μ-măsurabilă și

$$\int^* \inf(f_\infty, p)\, d\mu = \sup_{f \in \mathcal{F}} \int^* \inf(f, p)\, d\mu.$$

Făcînd apoi $p \to \infty$, deducem că $f_\infty = \sup_p (\inf_\infty (f_\infty, p))$ este μ-măsurabilă și

$$\int^* f_\infty\, d\mu = \sup_{f \in \mathcal{F}} \int^* f d\mu.$$

Cu aceasta propoziția este demonstrată.

2. Proprietatea de ridicare a spațiilor de funcții vectoriale

Fie μ o măsură pozitivă pe T, E și F două spații Banach și Z un subspațiu al lui F', *normant* pentru F, adică :

$$|y| = \sup_{z \in Z} \frac{|< y, z >|}{|z|}, \text{ pentru orice } y \in F.$$

Vom nota cu $\mathcal{L}^*(E, F)$ mulțimea aplicațiilor liniare $U : E \to F$. Pentru fiecare $U \in \mathcal{L}^*(E, F)$ vom nota

$$|U| = \sup_{\substack{|x| \leqslant 1 \\ |z| \leqslant 1}} |< Ux, z >| = \sup_{|x| \leqslant 1} |Ux| \leqslant +\infty.$$

Pentru $U : T \to \mathcal{L}^*(E, F)$, $\mathbf{z} : T \to E$ și $\mathbf{x} : T \to Z$, vom nota $< U\mathbf{z}, \mathbf{x} >$ funcția $t \to < U(t)\, \mathbf{z}(t), \mathbf{x}(t) >$ și cu $|U|$ funcția $t \to |U(t)|$.

Pentru două funcții U_1, $U_2 : T \to \mathcal{L}^*(E, F)$ vom scrie $U_1 \equiv U_2$ dacă

$$< U_1 x, z > = < U_2 x, z >, \text{ pentru orice } x \in E \text{ și } z \in Z.$$

Observații 1°. Relația $U_1 \equiv U_2$ depinde nu numai de spațiile E și F, dar și de spațiul Z.

2° Dacă Z este de tip numărabil, atunci avem $U_1 \equiv U_2$ dacă și numai dacă $U_1(t)x = U_2(t)x$, μ-aproape peste tot, pentru fiecare $x \in E$.

În particular, dacă $F = C$, atunci $\mathcal{L}^*(E, C) = E^*$; în acest caz, pentru două funcții $\mathbf{f}, \mathbf{g} : T \to E$ avem $\mathbf{f} \equiv \mathbf{g}$ dacă și numai dacă

$$< x, \mathbf{f}(t) > = < x, \mathbf{g}(t) >, \text{ } \mu\text{-aproape peste tot,}$$

pentru fiecare $x \in E$.

3° Dacă $E = C$, atunci $\mathcal{L}^*(C, F) = F$; în acest caz pentru două funcții $\mathbf{f}, \mathbf{g} : T \to F$, relația $\mathbf{f} \equiv \mathbf{g}$ înseamnă

$$< \mathbf{f}(t), z > = < \mathbf{g}(z), z >, \text{ } \mu\text{-aproape peste tot, pentru fiecare } z \in Z.$$

4° Dacă E și Z sînt de tip numărabil, atunci $U_1 \equiv U_2$ dacă și numai dacă $U_1(t) = U_2(t)$, μ-aproape peste tot.

5° Dacă F este de tip numărabil, atunci există un subspațiu de tip numărabil $Z \subset F'$ normant pentru F.

Într-adevăr, fie (y_n) un șir dens în F; pentru fiecare y_n există $z_n \in F'$ cu $|z_n| = 1$ și $|<y_n, z_n>| = |y_n|$. Spațiul Z generat de șirul (z_n) are proprietatea de mai sus.

Definiția 2. *Fie $\mathcal{G}$ un spațiu vectorial de funcții $U : T \to \mathcal{L}^*(E, F)$. O aplicație $\rho : \mathcal{G} \to \mathcal{G}$ se numește ridicare liniară a lui $\mathcal{G}$, dacă îndeplinește următoarele condiții:*

I. $\rho(U) \equiv U$;

II. $U_1 \equiv U_2$ *implică* $\rho(U_1) = \rho(U_2)$;

III. $U \equiv$ constant implică $\rho(U) = U$;

V. $\rho(\alpha U + \beta V) = \alpha\rho(U) + \beta\rho(V)$.

Dacă $\mathcal{G}$ posedă o ridicare liniară spunem că are proprietatea de ridicare liniară.

Nu orice spațiu vectorial are proprietatea de ridicare liniară. Se va arăta mai departe că dacă $\mu \neq 0$ și nu este atomică, atunci spațiul $\mathcal{L}^p(\mu)$, $1 \leqslant p < \infty$ nu posedă nici o ridicare liniară pozitivă.

Fie $\mathcal{F}$ o algebră de funcții scalare, astfel încît $f \in \mathcal{F}$ implică $|f| \in \mathcal{F}$.

Vom nota cu $\mathcal{F}_{E,F}$ spațiul funcțiilor $U : T \to \mathcal{L}^*(E, F)$ care au următoarele două proprietăți:

1) $< Ux, z > \in \mathcal{F}$ pentru orice $x \in E$ și $z \in Z$;

2) pentru orice $x \in E$ există o funcție $\varphi_x \in \mathcal{F}$ cu $|U_x| \leqslant \varphi_x$.

Rezultă că dacă $U \in \mathcal{F}_{E,F}$ și $\varphi \in \mathcal{F}$, atunci $U\varphi \in \mathcal{F}_{E,F}$.

Se poate lua, de exemplu, $\mathcal{F} = \mathcal{L}^\infty(\mu)$ sau $\mathcal{F} = \mathcal{M}^\infty(\mathcal{X})$.

Să remarcăm, că pentru spațiul $\mathcal{L}^\infty_{E,F}$ proprietatea 2) înseamnă

$$N_\infty(U_x) < \infty \text{ pentru fiecare } x \in E.$$

Pentru spațiul $\mathcal{M}^\infty_{E,F}(\mathcal{X})$ cu $\mathcal{X} = (K_j)_{j \in J} \in C(\mu)$ proprietatea 2) înseamnă

$$N_\infty(Ux\, \varphi_{K_j}) < \infty, \text{ pentru fiecare } x \in E \text{ și } j \in J.$$

Vom arăta că în aceste două cazuri, $\mathcal{F}_{E,Z'}$ are proprietatea de ridicare liniară.

Propoziția 4. *Pentru fiecare ridicare ρ a lui $\mathcal{L}^\infty(\mu)$ există o ridicare liniară a lui $\mathcal{L}^\infty_{E,Z'}(\mu)$ notată tot ρ și numai una astfel încît să avem*

$$< \rho(U)\, x,\ z > = \rho(< Ux, z, >), \text{ pentru } U \in \mathcal{L}^\infty_{E,Z'},\ x \in E \text{ și } z \in Z.$$

Avem atunci

V. $\rho(U\varphi) = \rho(U)\ \rho(\varphi)$, *pentru* $U \in \mathcal{L}^\infty_{E,Z'}$, *și* $\varphi \in \mathcal{L}^\infty$ *și*

VI. $|\rho(U)| \leqslant \rho(\varphi)$ *dacă* $U \in \mathcal{L}^\infty_{Z\,E,}$, $\varphi \in \mathcal{L}^\infty$ *și* $|U| \leqslant \varphi$.

Fie ρ o ridicare a lui $\mathcal{L}^\infty$. Pentru fiecare $x \in E$ și $z \in Z$ să punem $U_{x,z} = \rho(< Ux, z >)$. Pentru fiecare $t \in T$ aplicația $(x,z) \to U_{x,z}(t)$ este o funcțională biliniară pe $E \times Z$. Pentru x fixat, aplicația

$U_x(t) : z \to U_{x,z}(t)$ este o funcțională liniară pe Z. Ea este și continuă deoarece

$$|U_x(t)z| = |\rho(< Ux, z >)(t)| \leqslant N_\infty(Ux)\,|z|$$

deci $U_x(t) \in Z'$ și $|U_x(t)| \leqslant N_\infty(U_x)$. Aplicația $\rho(U)(t) : x \to U_x(t)$ a lui E în Z' este liniară, deci $\rho(U)(t) \in \mathcal{L}^*(E, Z')$ și avem

$$< \rho(U)(t)\,x,\ z > = \rho(< Ux,\ z >)(t)$$

pentru orice $t \in T$, $x \in E$ și $z \in Z$, adică

$$< \rho(U)\,x,\ z > = \rho(< U\,x, z >).$$

Din această egalitate rezultă și unicitatea lui $\rho(U)$. Din proprietățile ridicării ρ a lui $\mathcal{L}^\infty$ se deduc ușor proprietățile de ridicare liniară a lui ρ pe $\mathcal{L}^\infty_{E,Z'}$, ca și proprietățile V și VI. De exemplu, proprietatea VI se deduce astfel: dacă $|U| \leqslant \varphi$,

$$|< \rho(U)(t)x, z >| = |\rho(< Ux, z >)(t)| =$$

$$= \rho(|< Ux, z >|)(t) \leqslant \rho(\varphi\,|x|\,|z|)(t) = \rho(\varphi)(t)\,|x|\,|z|$$

de unde

$$|\rho(U)(t)| \leqslant \rho(\varphi)(t).$$

Luînd în propoziția precedentă $E = C$, obținem

Corolarul 1. *Să notăm cu $\mathcal{L}^\infty_{Z_s}$ spațiul funcțiilor $\mathbf{f} : T \to Z'$ care au următoarele două proprietăți:*

1) $< \mathbf{f}, z > \in \mathcal{L}^\infty(\mu)$, *pentru orice* $z \in Z$;

2) $N_\infty(\mathbf{f}) < \infty$.

Pentru orice ridicare ρ a lui $\mathcal{L}^\infty$ există o ridicare liniară a lui $\mathcal{L}^\infty_{Z_s}$ notată tot ρ, și numai una astfel încît să avem

$$< \rho(\mathbf{f}), z > = \rho(< \mathbf{f},\ z >) \text{ pentru orice } z \in Z.$$

Remarcăm că relația $\mathbf{f} \equiv \mathbf{g}$ înseamnă în acest caz

$< \mathbf{f}(t),\ z > = < \mathbf{g}(t), z >$, μ-aproape peste tot, pentru fiecare $z \in Z$.

Luînd în propoziția precedentă $F = C$, obținem

Corolarul 2. *Să notăm cu $\mathcal{L}^\infty_{E^*}$ spațiul funcțiilor $\mathbf{f} : T \to E^*$ care au următoarea proprietate:*

$$< x,\ \mathbf{f} > \in \mathcal{L}^\infty(\mu), \text{ pentru orice } x \in E.$$

Pentru orice ridicare ρ a lui $\mathcal{L}^\infty$, există o ridicare liniară a lui $\mathcal{L}^\infty_{E^*}$ notată tot ρ și numai una astfel încît să avem

$$< x, \rho(\mathbf{f}) > = \rho(< x, \mathbf{f} >), \text{ pentru orice } x \in E.$$

Remarcăm că, în acest caz, $\mathbf{f} \equiv \mathbf{g}$ înseamnă

$< x, \mathbf{f}(t) > = < x, \mathbf{g}(t) >$, μ-aproape peste tot pentru fiecare $x \in E$.

Combinînd rezultatele precedente deducem

Corolarul 3. *Pentru orice ridicare* ρ *a lui* $\mathcal{L}^\infty(\mu)$, *extensiunile sale la spațiile* $\mathcal{L}^\infty_{E,Z'}$ *și* $\mathcal{L}^\infty_{Z'_s}$, *notate tot cu* ρ, *verifică egalitatea*

$$\rho(U)\,x = \rho(Ux)$$

pentru orice $U \in \mathcal{L}^\infty_{E,Z'}$ *și* $x \in E$.

Propoziția 5. *Fie familia* $\mathcal{K} = (K_j)_{j\in J} \in C(\mu)$. *Pentru fiecare ridicare* ρ *a lui* $\mathcal{L}^\infty(\mu)$, *există o ridicare liniară* $\rho_{\mathcal{K}}$ *a spațiului* $\mathcal{M}^\infty_{E,Z'}(\mathcal{K})$, *astfel încît să avem*

$$< \rho_{\mathcal{K}}(U)\,x, z > \varphi_{\rho(K_j)} = \rho(< Ux, z > \varphi_{K_j})$$

pentru fiecare $U \in \mathcal{M}^\infty_{E,Z'}(\mathcal{K})$, $x \in E$, $z \in Z$ *și* $j \in J$.

Fie $U \in \mathcal{M}^\infty_{E,Z'}(\mathcal{K})$ și $j \in J$. Pentru fiecare $x \in E$ și $z \in Z$, să punem $U_{x,z} = \rho(< Ux, z > \varphi_{K_j})$. Pentru fiecare $t \in T$ aplicația $(x, z) \to U_{x,z}(t)$ este o funcțională biliniară pe $E \times Z$; există deci o aplicație liniară $U_j(t) : E \to Z^*$ care verifică egalitatea

$$< U_j(t), z > = U_{x,z}(t), \text{ pentru } x \in E \text{ și } z \in Z.$$

Funcționala liniară $U_j(t)\,x$ este și continuă pe Z, deoarece

$$|< U_j(t)\,x,\ z >| = |\rho(< Ux, z >)(t)\,\varphi_{K_j}(t)| \leqslant N_\infty(Ux\,\varphi_{K_j})\,|z|$$

deci $U_j(t) \in \mathcal{L}^*(E, Z')$.

Fie acum A o mulțime compactă cu $\mu(A) > 0$, astfel încît $\sup_{t\in T} |U(t)\,x| < \infty$ pentru fiecare $x \in E$. De exemplu, A poate fi luată egală cu una din mulțimile $K_j \in \mathcal{K}$ care nu sînt μ-neglijabile. Pentru fiecare $x \in E$ și $z \in Z$ să considerăm funcționala biliniară

$$(x, z) \to \frac{1}{\mu(A)} \int_A < U(t)\,x, z > d\mu$$

pe $E \times Z$. Există atunci o aplicație $U_0 : E \to Z^*$ astfel încît să avem

$$< U_0 x, z > = \frac{1}{\mu(A)} \int_A < U(t)\,x, z > d\mu.$$

Funcționala liniară $U_0 x$ este continuă pe Z deoarece

$$|< Z_0 x, z >| \leqslant \sup_{t\in A} |U(t)\,x|\,|z|$$

deci $U_0 \in \mathcal{L}^*(E, Z')$.

Definim acum funcția $\rho_{\mathcal{K}}(U)$ pe T astfel:

$$\rho_{\mathcal{K}}(U)(t) = U_j(t)\ ,\ \text{pentru } g \in \rho(K_j) \text{ și } j \in J,$$

$$\rho_{\mathcal{K}}(U)(t) = U_0\ ,\ \text{pentru } t \in T - \bigcup_{j\in J} \rho(K_j).$$

Se verifică ușor că $\rho_{\mathcal{X}}(U) \in \mathcal{M}^\infty_{E,Z'}(\mathcal{X})$ și că $\rho_{\mathcal{X}}$ este o ridicare liniară care îndeplinește condițiile din enunțul propoziției.

Observație. Ridicarea liniară $\rho_{\mathcal{X}}$ nu este unic determinată de ρ. Ea depinde, de exemplu, de mulțimea A din cursul demonstrației.

Luînd în propoziția 5 $E = C$, obținem

Corolarul 1. *Să notăm cu* $\mathcal{M}^\infty_{Z_s'}(\mathcal{X})$ *spațiul funcțiilor* $\mathbf{f} : T \to Z'$ *care au următoarele două proprietăți:*

1) $< \mathbf{f}, z > \varphi_{K_j} \in \mathcal{L}^\infty(\mu)$, *pentru orice* $z \in Z$ *și* $j \in J$;

2) $N_\infty(\mathbf{f}\varphi_{K_j}) < \infty$ *pentru orice* $j \in J$.

Pentru orice ridicare ρ *a lui* $\mathcal{L}^\infty$ *există o ridicare liniară* $\rho_{\mathcal{X}}$ *a lui* $\mathcal{M}^\infty_{Z_s'}(\mathcal{X})$ *astfel încît să avem*

$$< \rho_{\mathcal{X}}(\mathbf{f}), z > \varphi_{\rho(K_j)} = \rho\,(< \mathbf{f}, z > \varphi_{K_j})$$

pentru $\mathbf{f} \in \mathcal{M}^\infty_{Z_s'}(\mathcal{X})$, $z \in Z$ *și* $j \in J$.

Luînd în propoziția precedentă $F = C$, obținem

Corolarul 2. *Să notăm cu* $\mathcal{M}^\infty_{E^*}(\mathcal{X})$ *spațiul funcțiilor* $\mathbf{f} : T \to E$ *care au următoarea proprietate:*

$$< x, \mathbf{f} > \varphi_{K_j} \in \mathcal{L}^\infty(\mu), \text{ pentru orice } x \in E \text{ și } j \in J.$$

Pentru orice ridicare ρ *a lui* $\mathcal{L}^\infty(\mu)$ *există o ridicare liniară* $\rho_{\mathcal{X}}$ *a lui* $\mathcal{M}_{E^*}(\mathcal{X})$ *astfel încît să avem*

$$< x, \rho_{\mathcal{X}}(\mathbf{f}) > \varphi_{\rho(K_j)} = \rho\,(< x, \mathbf{f} > \varphi_{K_j})$$

pentru $\mathbf{f} \in \mathcal{M}^\infty_{E^*}(\mathcal{X})$, $x \in E$ *și* $j \in J$.

Combinînd rezultatele precedente deducem

Corolarul 3. *Fie* ρ *o ridicare a lui* $\mathcal{L}^\infty(\mu)$. *Atunci ridicările liniare ale spațiilor* $\mathcal{M}^\infty_{E,F'}(\mathcal{X})$ *și* $\mathcal{M}^\infty_{F_s'}(\mathcal{X})$ *notate cu* $\rho_{\mathcal{X}}$, *corespunzătoare lui* ρ, *verifică egalitatea*

$$\rho_{\mathcal{X}}(U)x = \rho_{\mathcal{X}}(Ux), \ \mu\text{-aproape peste tot},$$

pentru orice $U \in \mathcal{M}^\infty_{E,F'}(\mathcal{X})$ *și* $x \in E$.

De fapt, pentru fiecare $j \in J$, avem

$$\rho_{\mathcal{X}}(U)x\ \varphi_{\rho(K_j)} = \rho_{\mathcal{X}}(Ux)\ \varphi_{\rho(K_j)}.$$

3. Funcții cu proprietatea de ridicare

Fie μ o măsură pozitivă pe T, E și F două spații Banach și Z un subspațiu al lui F' *normant* pentru F. Fie ρ o ridicare a lui $\mathcal{L}^\infty(\mu)$.

Definiția 3. *Fie funcția* $U : T \to \mathcal{L}^*(E, F)$.

a) *Vom scrie* $\rho(U) = U$, *dacă pentru fiecare* $x \in E$ *şi* $z \in Z$ *avem* $< Ux, z > \in \mathcal{L}^\infty(\mu)$ *şi*

$$\rho(< Ux, z >) = < Ux, z >.$$

b) *Vom scrie* $\rho[U] = U$, *dacă există o familie* $\mathcal{K} = (K_j)_{j \in J} \in C(\mu)$, *astfel încît pentru fiecare* $j \in J$, $x \in E$ *şi* $z \in Z$ *să avem* $< Ux, z > \varphi_{K_j} \in \mathcal{L}^\infty(\mu)$ *şi*

$$\rho(< Ux, z, > \varphi_{K_j}) = < Ux, z > \varphi_{\rho(K_j)}.$$

Să observăm că relaţiile $\rho(U) = U$ şi $\rho[U] = U$ se referă la un anumit subspaţiu $Z \subset F'$. Să observăm de asemenea că relaţia $\rho[U] = U$ se referă la o anumită familie $\mathcal{K} = (K_j)_{j \in J} \in C(\mu)$. Dacă o mulţime μ-măsurabilă A este continuă într-o mulţime K_j, atunci avem de asemenea

$$\rho(< Ux, z > \varphi_A) = < Ux, z > \varphi_{\rho(A)}, \text{ pentru } x \in E \text{ şi } z \in Z.$$

În adevăr,

$$\rho(< Ux, z > \varphi_A) = \rho(< Ux, z > \varphi_{K_j} \varphi_A) = \rho(< Ux, z > \varphi_{K_j}) \rho(\varphi_A) =$$

$$= < Ux, z > \varphi_{\rho(K_j)} \varphi_{\rho(A)} = < Ux, z > \varphi_{\rho(A)},$$

deoarece $A \subset K_j$ implică $\rho(A) \subset \rho(K_j)$.

Rezultă că dacă $U_1, U_2 : T \to \mathcal{L}^*(E, F)$ sînt două funcţii cu $\rho[U_1] = U_1$ şi $\rho[U_2] = U_2$, putem găsi o familie comună $\mathcal{K} = (K_j)_{j \in J} \in C(\mu)$ astfel încît, pentru orice $j \in J$, $x \in E$ şi $z \in Z$, să avem în acelaşi timp

$$\rho(< U_i x, z > \varphi_{K_j}) = < U_i x, z > \varphi_{\rho(K_j)}, \text{ pentru } i = 1,2.$$

Funcţiile cu $\rho(U) = U$ şi $\rho[U] = U$ au următoarele proprietăţi:

1) $\rho(U) = U$ *implică* $\rho[U] = U$ (*oricare ar fi familia* $\mathcal{K} \in C(\mu)$);

2) *dacă* $\rho[U] = U$, *atunci funcţia* $< Ux, z >$ *este* μ-*măsurabilă, oricare ar fi* $x \in E$ *şi* $z \in Z$;

3) *dacă* $U_1 \equiv U_2$, $\rho(U_1) = U_1$ *şi* $\rho(U_2) = U_2$, *atunci* $U_1 = U_2$;

4) *dacă* $U_1 \equiv U_2$, $\rho[U_1] = U_1$ *şi* $\rho[U_2] = U_2$, *atunci* $U_1(t) = U_2(t)$, μ-*aproape peste tot*;

5) *dacă* $U_1(t) = U_2(t)$, μ-*aproape peste tot şi* $\rho[U_1] = U_1$ *atunci* $\rho[U_2] = U_2$.

Într-adevăr, fie $\mathcal{K} = (K_j)_{j \in J} \in C(\mu)$ astfel încît

$$\rho(< U_1 x, z > \varphi_{K_j}) = < U_1 x, z > \varphi_{\rho(K_j)}$$

pentru orice $j \in T$, $x \in E$ şi $z \in Z$. Fie de asemenea mulţimea μ-neglijabilă $N \subset T$ astfel încît

$$U_1(t) = U_2(t), \text{ pentru } t \in T - N.$$

Fiecare mulţime $K_j \cap \rho(K) - N$ este μ-integrabilă, deci este reuniunea unui şir (K_{jn}) de mulţimi compacte disjuncte şi a unei mulţimi μ-negli-

jabile N_j. Mulțimile K_{jn} care nu sînt vide formează o familie din $C(\mu)$, iar U_1 și U_2 coincid pe fiecare K_{jn} și pe fiecare $\rho(K_{jn})$, deci

$$\rho(< U_2\, x, z > \varphi_{K_{jn}}) = \rho(< U_1\, x, z > \varphi_{K_{jn}}) =$$
$$= < U_1\, x, z > \varphi_{\rho(K_{jn})} = < U_2\, x, z > \varphi_{\rho K(;n)}$$

adică $\rho[U_2] = U_2$.

6) *Dacă* $\rho(U) = U$, *atunci* $|U(T)| \leqslant N_\infty(U) < \infty$ *pentru fiecare* $t \in T$.

Într-adevăr, pentru fiecare $x \in E$ și $z \in U$ avem $< Ux,\ z > \in \mathcal{L}^\infty$ și $\rho\ (< Ux, z >) = < Ux, z >$ deci pentru orice $t \in T$ avem

$$|< U(t)\ x, z >| \leqslant N_\infty(< Ux, z >) \leqslant |x|\ |z|\ N_\infty\ (U)$$

de unde $|U(t)| < N_\infty\ (U)$ pentru orice $t \in T$.

Observație. Dacă $\rho(U) = U$ și $N_\infty(Ux) < \infty$ pentru fiecare $x \in E$, atunci $U \in \mathcal{L}^\infty_{E,F}$; în acest caz $\rho(U)$ reprezintă valoarea ridicării liniare a lui $\mathcal{L}^\infty_{E,F'}$, corespunzătoare ridicării ρ a lui $\mathcal{L}^\infty$ (propoziția 4).

7) *Dacă* $\rho[U] = U$ *relativ la o familie* $\mathcal{K} = (K_j)_{j\in J} \in C(\mu)$, *atunci* $|U(t)| \leqslant N_\infty\,(U\varphi_{K_j}) < \infty$, *pentru fiecare* $j \in J$ *și* $t \in K_j$.

Alte proprietăți sînt date în propozițiile următoare.

Propoziția 6. *Fie* $U : T \to \mathcal{L}^*\,(E, F)$ *o funcție astfel încît funcția* $< Ux, z >$ *este* μ*-măsurabilă, oricare ar fi* $x \in E$ *și* $z \in Z$.

a) *Dacă* $N_\infty\,(Ux) < \infty$ *pentru orice* $x \in E$, *atunci există o funcție* $U' : T \to \mathcal{L}^*\ (E, Z')$ *cu* $U' \equiv U$ *și* $\rho(U') = U'$.

b) *Dacă există o familie* $\mathcal{K} = (K_j)_{j\in J} \in C(\mu)$ *astfel încît* $N_\infty\,(Ux\,\varphi_{K_j}) < \infty$ *pentru fiecare* $x \in E$ *și* $j \in J$, *atunci există o funcție* $U' : T \to \mathcal{L}^*(E, Z')$ *cu* $U' \equiv U$ *și* $\rho[U'] = U'$.

Într-adevăr, din ipoteze rezultă că $U \in \mathcal{L}^\infty_{E,Z'}(\mu)$ în primul caz și $U \in \mathcal{M}^\infty_{E,Z'}(\mu)$ în cazul al doilea. Dacă ρ este ridicarea liniară a lui $\mathcal{L}^\infty_{E,Z'}$ care corespunde ridicării ρ a lui $\mathcal{L}^\infty(\mu)$ prin propoziția 4, atunci funcția $U' = \rho(U)$ are proprietățile cerute în primul caz. De asemenea, dacă $\rho_{\mathcal{X}}$ este o ridicare liniară a lui $\mathcal{M}^\infty_{E,Z'}$ ce corespunde lui ρ prin propoziția 5, atunci $U' = \rho_{\mathcal{X}}\,(U)$ are proprietățile cerute în al doilea caz.

Observație. În al doilea caz, orice funcție egală cu $\rho_{\mathcal{X}}\,(U)$ μ-aproape peste tot are proprietățile dorite.

Corolar. *Fie* $\mathbf{f} : T \to F$ *o funcție astfel încît funcția* $< \mathbf{f}, z >$ *să fie* μ*-măsurabilă pentru orice* $z \in Z$.

a) *Dacă* $N_\infty\,(\mathbf{f}) < \infty$, *există o funcție* $\mathbf{f}' : T \to Z'$ *cu* $\mathbf{f}' \equiv \mathbf{f}$ *și* $\rho(\mathbf{f}') = \mathbf{f}'$.

b) *Dacă există* $\mathcal{K} = (K_j)_{j\in J} \in C(\mu)$ *cu* $N_\infty(\mathbf{f}\varphi_{K_j}) < \infty$ *pentru fiecare* $j \in J$, *atunci există* $\mathbf{f}' : T \to Z'$ *cu* $\mathbf{f}' \equiv \mathbf{f}$ *și* $\rho[\mathbf{f}'] = \mathbf{f}'$.

Propoziția 7. *Fie funcția* $U : T \to \mathcal{L}^*(E, F)$. *Dacă* $\rho[U] = U$, *atunci funcția* $t \to |U(t)|$ *este* μ*-măsurabilă.*

Fie $(K_j)_{j\in J} \in C(\mu)$ o familie astfel încît să avem

$$\rho(\varphi_{K_j} < Ux,\ z >) = \varphi_{\rho(K_j)} < Ux,\ z >$$

pentru orice $j \in J$, $x \in E$ şi $z \in Z$. Să notăm $T_0 = \bigcup_{j\in J} \rho(K_j)$. Mulţimea $T - T_0$ este μ-neglijabilă.

Să notăm cu $\mathcal{F}$ mulţimea funcţiilor pozitive de forma

$$f = \sum_{i=1}^{n} \varphi_{A_i} \mid < Ux_i,\ z_i > \mid,$$

unde mulţimile A_i sînt μ-măsurabile, disjuncte două cîte două, $\rho(A_i) = A_i$ şi fiecare A_i este conţinută într-o mulţime $\rho(K_j)$, iar $x_i \in E$ cu $|x_i| \leqslant 1$ şi $z_i \in Z$ cu $|z_i| \leqslant 1$. În particular, printre funcţiile din $\mathcal{F}$ se află toate funcţiile de forma $\varphi_{\rho(K_j)} \mid < Ux,\ z > \mid$ cu $|x| \leqslant 1$ şi $|z| \leqslant 1$.

Deoarece

$$f(t) \leqslant \sum_{i=1}^{n} \varphi_{A_i}(t)\ |U(t)| \leqslant |U(t)|, \quad \text{pentru } t \in T_0$$

iar pe de altă parte, pentru fiecare $t \in T_0$ şi pentru $j \in J$ astfel încît $t \in \rho(K_j)$, avem

$$|U(t)| = \sup_{\substack{|x|\leqslant 1\\ |z|\leqslant 1}} \varphi_{\rho(K_j)} \mid < U(t)x,\ z > \mid,$$

deducem că

$$|U(t)| = \sup_{f\in\mathcal{F}} f(t), \quad \text{pentru } t \in T_0.$$

Pentru fiecare funcţie $f = \sum \varphi_{K_i} \mid < Ux,\ z > \mid$ din $\mathcal{F}$ avem $\rho(f) = f$. Într-adevăr, dacă pentru fiecare i avem $A_i \subset \rho(K_i)$, atunci

$$f = \sum_i \varphi_{A_i}\, \varphi_{\rho(K_j)} \mid < Ux_i,\ z_i > \mid$$

deci

$$\rho(f) = \sum_i \varphi_{A_i}\, \varphi_{\rho(K_j)} \mid < Ux_i,\ z > \mid = f.$$

Să arătăm că $\mathcal{F}$ este filtrantă. Fie $f_1, f_2 \in \mathcal{F}$. Să remarcăm că dacă A este μ-măsurabilă şi $\rho(A) = A$, atunci $\varphi_A f_1 + \varphi_{T-A} f_2 \in \mathcal{F}$. Deoarece există o mulţime μ-măsurabilă $B \subset T$ astfel încît

$$\sup(f_1, f_2) = \varphi_B f_1 + \varphi_{T-B} f_2,$$

deducem

$$\sup(f_1, f_2) = \sup[\rho(f_1), \rho(f_2)) = \rho(\sup(f_1, f_2)) =$$
$$= \varphi_{\rho(B)} f_1 = \varphi_{\rho(T-A)} f_2 = \varphi_A f_1 + \varphi_{T-A} f_2 \in \mathcal{F},$$

unde am pus $A = \rho(B)$, deci $\rho(A) = A$.

Conform propoziției 3 rezultă că funcția f_∞ definită prin egalitatea

$$f_\infty(t) = \sup_{t \in (\mathcal{F}} f(t), \text{ pentru } t \in T$$

este μ-măsurabilă. Deoarece

$$|U(t)| = f_\infty(t) \text{ pentru } t \in T_0$$

iar $T - T_0$ este μ-neglijabilă, rezultă că funcția $t \to |U(t)|$ este μ-măsurabilă și propoziția este demonstrată.

Corolar. *Dacă* $\rho[U] = U$, *atunci funcția* $t \to |U(t)x|$ *este* μ-*măsurabilă, oricare ar fi* $x \in E$.

Într-adevăr, avem $\rho[Ux] = Ux$, pentru orice $x \in E$. În particular, propoziția 7 și corolarul sînt adevărate dacă $\rho(U) = U$.

Propoziția 8. *Fie* $U : T \to \mathcal{L}^*(E, F)$ *o funcție astfel încît funcția* $t \to |U(t)|$ *să fie* μ-*măsurabilă.*

Dacă $U' \equiv U$ *și* $\rho[U'] = U'$, *atunci*

$$|U'(t)| \leqslant |U(t)|, \ \mu\text{-aproape peste tot.}$$

Fie $\mathcal{X} = (K_j)_{j \in J} \in C(\mu)$ o familie astfel încît

$$< U'x, z > \in \mathcal{L}_\infty(\mu) \text{ și } \rho(< Ux', z > \varphi_{K_j}) = < Ux', z > \varphi_{\rho(K_j)}$$

pentru orice $j \in J$, $x \in E$ și $z \in Z$.

Observăm că

$$\varphi_{\rho(K_j)} |< U'x, z >| = \rho(\varphi_{K_j} |< Ux, z >|)$$

și

$$\varphi_{K_j} |< U'x, z >| \sim \varphi_{K_j} |< Ux, z >|.$$

Atunci

$$\varphi_{\rho(K_j)} |< U'x, z >| = \rho(\varphi_{K_j} |< Ux, z >|) \leqslant |x| \, |z| \, \rho(\varphi_{K_j} |U|)$$

deci

$$\varphi_{\rho(K_j)} |U'| \leqslant \rho(\varphi_{K_j} |U|) \sim \varphi_{\rho(K_j)} |U|$$

de unde

$$|U'(t)| \leqslant |U(t)|, \text{ aproape peste tot pe } \bigcup \rho(K_j),$$

adică aproape peste tot, și propoziția este demonstrată.

Corolar. *Fie* $U : T \to \mathcal{L}^*(E, F)$ *astfel încît funcția* $t \to |U(t)|$ *să fie* μ-*măsurabilă. Dacă* $U' \equiv U$ *și* $\rho(U') = U'$, *atunci*

$$|U'(t)| \leqslant |U(t)|, \ \mu\text{-aproape peste tot.}$$

Propoziția 9. *Fie* $U : T \to \mathcal{L}^*(E, F)$ *o funcție astfel încît* $< Ux, z >$ *să fie* μ-*măsurabilă pentru orice* $x \in E$ *și* $z \in Z$.

a) *Dacă funcția* $t \to |U(t)|$ *este* μ*-măsurabilă și finită* μ*-aproape peste tot, atunci există o funcție* $U' : T' \to \mathcal{L}^*(E, Z')$ *cu* $U' \equiv U$, $\rho[U'] = U'$ *și*

$$|U'(t)| \leqslant |U(t)|, \text{ pentru orice } t \in T.$$

b) *Dacă* $|U| \in \mathcal{L}^\infty(\mu)$, *atunci există o funcție* $U' : T \to \mathcal{L}^*(E, Z')$ *cu* $U' \equiv U$, $\rho(U') = U'$ *și*

$$|U'(t)| \leqslant |U(t)|, \ \mu\text{-aproape peste tot.}$$

Să demonstrăm punctul a): deoarece $|U|$ este μ-măsurabilă și finită aproape peste tot, putem găsi o familie $\mathcal{K} = (K_j)_{j \in J} \in C(\mu)$ astfel încît restricția lui $|U|$ la fiecare K_j să fie finită și continuă, deci mărginită. Atunci cu atît mai mult $N_\infty(Ux\ \varphi_{K_j}) < \infty$ pentru fiecare $x \in E$ și $j \in J$. Conform propoziției 6 există o funcție $U_1 : T \to \mathcal{L}^*(E, Z')$ cu $U_1 \equiv U$ și $\rho[U_1] = U_1$. Conform propoziției 8 avem $|U_1(t)| \leqslant |U(t)|$ aproape peste tot. Modificînd funcția U_1 pe o mulțime neglijabilă convenabilă, obținem o funcție U' astfel încît $|U'(t)| \leqslant |U(t)|$ pentru orice $t \in T$; avem de asemenea $U' \equiv U$ și $\rho[U'] = U'$.

Punctul b) se demonstrează în mod asemănător.

Observație. Toate rezultatele precedente se aplică în particular funcțiilor $\mathfrak{f} : T \to F$, luînd $E = C$, și funcțiilor $\mathfrak{f} : T \to E^*$, luînd $F = C$, precum și funcțiilor scalare măsurabile.

§ 14. RELAȚII ÎNTRE SPAȚIILE $\mathcal{L}^p$

1. Inegalitatea lui Hölder

Fie μ o măsură pozitivă pe T.

Teorema 1. *Fie* f *și* g *două funcții numerice definite și finite* μ*-aproape peste tot pe* T. *Dacă* f *este echivalentă cu o funcție* $f_1 \in \mathcal{L}^p$, *iar* g *este echivalentă cu o funcție* $g_1 \in \mathcal{L}^q$, $1 \leqslant p, q \leqslant +\infty$, $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$, *atunci* fg *este* μ*-integrabilă și*

$$\int |fg| \, d\mu \leqslant N_p(f) \, N_q(g).$$

Avem $N_p(f_1) < +\infty$ și $N_q(g_1) < +\infty$, iar f_1 și g_1 sînt μ-măsurabile. Funcția fg este egală μ-aproape peste tot cu $f_1 g_1$. Funcția $f_1 g_1$ este μ-măsurabilă ca produs a două funcții μ-măsurabile, și avem

$$\int^* |f_1 g_1| \, d\mu = \int^* |f_1| \, |g_1| \, d\mu \leqslant N_p(f_1) \, N_q(g_1) < +\infty,$$

deci $f_1 g_1$ este μ-integrabilă. Atunci fg este de asemenea μ-integrabilă și

$$\int |fg| \, d\mu = \int |f_1 g_1| \, d\mu \leqslant N_p(f_1) \, N_q(g_1) = N_p(f) \, N_q(g)$$

și teorema este demonstrată.

Propoziția 1. *Fie E, F, G, H patru spații Banach, $(x, y) \to u(x, y)$ o aplicație biliniară continuă a lui $E \times F$ în G, astfel încît $|u(x, y)| < |x| \, |y|$ și* $\mathbf{m} : \mathcal{K}(T) \to H$ *o măsură majorată. Dacă* $\mathbf{f} \in \mathcal{L}_E^p(|\mathbf{m}|)$ *și* $\mathbf{g} \in \mathcal{L}_F^q(|\mathbf{m}|)$, $\left(1 \leqslant p, \; q \leqslant +\infty, \; \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1\right)$, *atunci funcția* $u(\mathbf{f}, \mathbf{g})$ *este* $\mathbf{m}$*-integrabilă și*

$$\left| \int u(\mathbf{f}, \mathbf{g}) \, d\mathbf{m} \right| \leqslant \int |u(\mathbf{f}, \mathbf{g})| \, d\,|\mathbf{m}| \leqslant N_p(\mathbf{f}, |\mathbf{m}|) \, N_q(\mathbf{g}, |\mathbf{m}|).$$

Într-adevăr, deoarece funcțiile $\mathbf{f} : T \to E$ și $\mathbf{g} : T \to F$ sînt $|\mathbf{m}|$-măsurabile, funcția $(\mathbf{f}, \mathbf{g}) : T \to E \times F$ este $|\mathbf{m}|$-măsurabilă; funcția $u : E \times F \to G$ fiind continuă, deducem că funcția compusă $u(\mathbf{f}, \mathbf{g}) : T \to G$ este $|\mathbf{m}|$-măsurabilă. Pe de altă parte, aplicînd inegalitatetea lui Hölder, obținem

$$\int^* |u(\mathbf{f}, \mathbf{g})| \, d\,|\mathbf{m}| \leqslant \int^* |\mathbf{f}| \, |\mathbf{g}| \, d\,|\mathbf{m}| \leqslant N_p(\mathbf{f}, |\mathbf{m}|) \, N_q(\mathbf{g}, |\mathbf{m}|) < +\infty$$

deci funcția $u(\mathbf{f}, \mathbf{g})$ este $|\mathbf{m}|$-integrabilă. Rezultă atunci că $u(\mathbf{f}, \mathbf{g})$ este $\mathbf{m}$-integrabilă și că

$$\left| \int u(\mathbf{f}, \mathbf{g}) \, d\mathbf{m} \right| \leqslant \int |u(\mathbf{f}, \mathbf{g})| \, d|\mathbf{m}| \leqslant N_p(\mathbf{f}, |\mathbf{m}|) \, N_q(\mathbf{g}, |\mathbf{m}|).$$

Observație. Propoziția precedentă este adevărată, în particular, dacă $H = G$ iar $\mathbf{m}$ este o măsură scalară.

Corolarul 1. *Fie E o algebră Banach și* $\mathbf{m} : \mathcal{K}_E(T) \to E$ *o măsură majorată. Dacă* $\mathbf{f} \in \mathcal{L}_E^p(\mathbf{m})$ *și* $\mathbf{g} \in \mathcal{L}_E^q(\mathbf{m})$, $\left(1 \leqslant p, \; q \leqslant +\infty, \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1\right)$, *atunci* $\mathbf{fg} \in \mathcal{L}_E^1(\mathbf{m})$ *și*

$$\left| \int \mathbf{fg} \, d\mathbf{m} \right| \leqslant \int |\mathbf{fg}| \, d|\mathbf{m}| \leqslant N_p(\mathbf{f}, \mathbf{m}) \leqslant N_q(\mathbf{g}, \mathbf{m}).$$

Într-adevăr, funcția $u(x, y) = xy$ este biliniară și continuă pe $E \times E$ și $|u(x, y)| \leqslant |x| \, |y|$.

Măsura $\mathbf{m}$ poate fi în particular o măsură scalară.

Corolarul 2. *Fie E și F două spații Banach și* $\mathbf{m} : \mathcal{K}_E(T) \to F$ *o măsură majorată. Dacă* $\mathbf{f} \in \mathcal{L}_E^p(\mathbf{m})$ *și* $\varphi \in \mathcal{L}^q(\mathbf{m})$, $\left(1 \leqslant p, \; q \leqslant +\infty, \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1\right)$, *atunci* $\mathbf{f}\varphi \in \mathcal{L}_E^1(\mathbf{m})$ *și*

$$\left|\int \mathbf{f}\,\varphi\,\mathrm{d}\mathbf{m}\right| \leqslant \int |\mathbf{f}\varphi|\,\mathrm{d}|\mathbf{m}| \leqslant N_p(\mathbf{f}, \mathbf{m})\, N_q(\varphi, \mathbf{m}).$$

Într-adevăr, funcția $u(\alpha, x) = \alpha x$ este biliniară și continuă pe $R \times E$ și $|u(\alpha, x)| = |\alpha|\ |x|$.

Observație. Dacă E este un spațiu Banach complex, atunci se poate lua $\varphi \in \mathcal{L}^q_C(\mathbf{m})$.

Măsura $\mathbf{m}$ poate fi, în particular, o măsură scalară.

Corolarul 3. *Fie E un spațiu Banach, E' dualul său și μ o măsură scalară. Dacă $\mathbf{f} \in \mathcal{L}^p_E(\mu)$ și $\mathbf{g} \in \mathcal{L}^q_{E'}(\mu)$, $\left(1 \leqslant p,\ q \leqslant +\infty,\ \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1\right)$, atunci funcția scalară $<\mathbf{f}, \mathbf{g}>$ este μ-integrabilă și*

$$\left|\int <\mathbf{f}, \mathbf{g}>\,\mathrm{d}\mu\right| \leqslant \int |<\mathbf{f}, \mathbf{g}>|\,\mathrm{d}|\mu| \leqslant N_p(\mathbf{f}, \mu)\, N_q(\mathbf{g}, \mu).$$

Într-adevăr, funcția $u(z, z') = <z, z'>$ definită pe $E \times E'$ cu valori scalare este biliniară și continuă și $|u(z, z')| \leqslant |z|\ |z'|$.

Observație. Corolarul 3 rămîne adevărat dacă $E = C$ sau $E = R$ pentru orice măsură vectorială majorată $\mathbf{m} : \mathcal{X}_G(T) \to H$, considerată ca fiind definită pe $\mathcal{X}(T)$ cu valori în $\mathcal{L}(G, H)$.

2. Calculul seminormelor N_p

Fie μ o măsură pozitivă pe T, p și q doi exponenți conjugați:

$$1 \leqslant p \leqslant +\infty,\ 1 \leqslant q \leqslant +\infty,\ \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

Teorema 2. *Fie E, F și G trei spații Banach și $u : E \times F \to G$ o aplicație biliniară și continuă astfel încît $|x| = \sup_{|y| \leqslant 1} |u(x, y)|$ pentru orice $x \in E$.*

Pentru orice funcție μ-măsurabilă $\mathbf{f} : T \to E$ avem

$$N_p(\mathbf{f}) = \sup \int^* |u(\mathbf{f}, \mathbf{g})|\,\mathrm{d}\mu = \sup \int^* |\mathbf{f}|\,|\mathbf{g}|\,\mathrm{d}\mu$$

pentru $\mathbf{g} \in \mathcal{E}_F$ cu $N_q(\mathbf{g}) = 1$, unde $\mathcal{E}_F$ este spațiul funcțiilor boreliene etajate $\mathbf{g} : T \to F$ cu suportul compact.

Din egalitatea $|x| = \sup_{|y| \leqslant 1} |u(x, y)|$ rezultă $|u(x, y)| \leqslant |x|\,|y|$. Din inegalitatea lui Holder rezultă atunci, pentru $\mathbf{f} \in \mathcal{L}^p_E$,

$$\sup \int^* |u(\mathbf{f}, \mathbf{g})|\,\mathrm{d}\mu \leqslant \sup \int^* |\mathbf{f}|\,|\mathbf{g}|\,\mathrm{d}\mu \leqslant N_p(\mathbf{f}),\ \mathbf{g} \in \mathcal{E}_F,\ N_q(\mathbf{g}) = 1.$$

Rămîne de demonstrat inegalitatea

$$N_p(\mathbf{f}) \leqslant \sup \int^* |u(\mathbf{f}, \mathbf{g})| d\mu, \quad \mathbf{g} \in \mathcal{E}_F, \quad N_q(\mathbf{g}) = 1.$$

Dacă $N_p(\mathbf{f}) = 0$, inegalitatea este adevărată. Vom presupune deci că $N_p(\mathbf{f}) > 0$. Vom considera succesiv mai multe cazuri.

1) $p = 1$, $\mathbf{f}$ funcție boreliană etajată din $\mathcal{E}_E$. Putem scrie funcția $\mathbf{f}$ sub forma $\mathbf{f} = \sum_{i=1}^{n} \varphi_{A_i} x_i$ cu $x_i \in E$ și A_i mulțimi boreliene relativ compacte din $\mathcal{B}$, disjuncte două cîte două. Avem atunci $|\mathbf{f}| = \sum_{i=1}^{n} \varphi_{A_i} |x_i|$ și

$$N_1(\mathbf{f}) = \int |\mathbf{f}| \, d\mu = \sum_{i=1}^{n} \mu(A_i) |x_i|.$$

Fie $\varepsilon > 0$. Pentru fiecare i există un element $y_i \in F$ cu $|y_i| = 1$ astfel încît $|u(x_i, y_i)| > (1 - \varepsilon)|x_i|$.

Funcția $\mathbf{g} = \sum_{i=1}^{n} \varphi_{A_i} y_i$ este boreliană etajată, din $\mathcal{E}_F$ și

$$N_\infty(\mathbf{g}) = \sup_{1 \leqslant i \leqslant n} |y_i| = 1.$$

Atunci

$$u(\mathbf{f}, \mathbf{g}) = u\left(\sum_i \varphi_{A_i} x_i, \sum_j \varphi_{A_j} y_j\right) = \sum_{i,j} \varphi_{A_i} \varphi_{A_j} u(x_i, y_j) =$$

$$= \sum_i \varphi_{A_i} u(x_i, y_i)$$

și

$$|u(\mathbf{f}, \mathbf{g})| = \left|\sum_i \varphi_{A_i} u(x_i, y_i)\right| = \sum_i \varphi_{A_i} |u(x_i, y_i)| \geqslant$$

$$\geqslant \sum_i \varphi_{A_i} (1 - \varepsilon) |x_i|$$

deci

$$\int |u(\mathbf{f}, \mathbf{g})| \, d\mu \geqslant (1 - \varepsilon) \sum_i \mu(A_i) |x_i| = (1 - \varepsilon) N_1(\mathbf{f})$$

de unde

$$\sup \int |u(\mathbf{f}, \mathbf{g})| \, d\mu \geqslant N_1(\mathbf{f}), \quad \mathbf{g} \in \mathcal{E}_F, \quad N_\infty(\mathbf{g}) = 1.$$

2) $1 < p < +\infty$, $\mathbf{f} = \sum_{i=1}^{n} \varphi_{A_i} x_i$, funcție boreliană etajată din $\mathcal{E}_E$

cu A_i disjuncte două cîte două și $N_p(\mathbf{f}) = 1$. Avem deci

$$[N_p(\mathbf{f})]^p = \int |\mathbf{f}|^p \, d\mu = \int \sum_{i=1}^{n} \varphi_{A_i} |x_i|^p \, d\mu = \sum_{i=1}^{n} \mu(A_i) |x_i|^p = 1.$$

Fie $\varepsilon > 0$. Pentru fiecare i există $z_i \in F$ cu $|z_i| = 1$ și $|u(x_i, z_i)| \geqslant (1 - \varepsilon)|x_i|$. Să notăm $y_i = |x_i|^{\frac{p}{q}} z_i$. Avem

$$|y_i|^q = |x_i|^p \text{ și } |u(x_i, y_i)| \geqslant (1 - \varepsilon)|x_i||y_i|.$$

Funcția $\mathbf{g} = \sum_{i=1}^{n} \varphi_{A_i} y_i$ este boreliană etajată din $\mathcal{E}_F$ și

$$N_q(\mathbf{g}) = \left(\int \left|\sum_{i=1}^{n} \varphi_{A_i} y_i\right|^q d\mu\right)^{\frac{1}{q}} = \left(\int \sum_{i=1}^{n} \varphi_{A_i} |y_i|^q \, d\mu\right)^{\frac{1}{q}} = \left(\sum_{i=1}^{n} \mu(A_i) |y_i|^q\right)^{\frac{1}{q}} =$$

$$= \left(\sum_{i=1}^{n} \mu(A_i) |x_i|^p\right)^{\frac{1}{q}} = 1.$$

Atunci, ca la punctul 1),

$$|u(\mathbf{f}, \mathbf{g})| = \sum_i \varphi_{A_i} |u(x_i, y_i)| \geqslant (1 - \varepsilon) \sum_i \varphi_{A_i} |x_i| |y_i|$$

deci

$$\int |u(\mathbf{f}, \mathbf{g})| \, d\mu \geqslant (1 - \varepsilon) \sum_{i=1}^{n} \mu(A_i) |x_i| |y_i| = (1 - \varepsilon) \sum_{i=1}^{n} \mu(A_i) |x_i| |x_i|^{\frac{p}{q}} =$$

$$= (1 - \varepsilon) \sum_{i=1}^{n} \mu(A_i) |x_i|^p = 1 - \varepsilon$$

de unde

$$\sup \int |u(\mathbf{f}, \mathbf{g})| \, d\mu \geqslant 1, \quad \mathbf{g} \in \mathcal{E}_F, \; N_q(\mathbf{g}) = 1.$$

3) $1 < p < +\infty$, $\mathbf{f} = \sum_{i=1}^{n} \varphi_{A_i} x_i$ o funcție boreliană etajată din $\mathcal{E}_E$ cu $N_p(\mathbf{f}) = a > 0$. Atunci funcția $\mathbf{f}_1 = \frac{1}{a} \mathbf{f}$ este boreliană din $\mathcal{E}_E$ cu $N_p(\mathbf{f}_1) = \frac{1}{a} N_p(\mathbf{f}) = 1$, deci, pentru $\mathbf{g} \in \mathcal{E}_F$ cu $N_q(\mathbf{g}) = 1$, avem

$$\int |u(\mathbf{f}, \mathbf{g})| \, d\mu = \int |u(a\mathbf{f}_1, \mathbf{g})| \, d\mu = a \int |u(\mathbf{f}_1, \mathbf{g})| \, d\mu$$

de unde

$$\sup \int |u(\mathbf{f}, \mathbf{g})| \, d\mu = a \sup \int |u(\mathbf{f}_1, \mathbf{g})| \, d\mu = a = N_p(\mathbf{f}),$$

$$\mathbf{g} \in \mathcal{E}_F, \; N_q(\mathbf{g}) = 1.$$

4) $1 \leqslant p < +\infty$, $\mathbf{f} \in \mathcal{L}_E^p$ oarecare cu $N_p(\mathbf{f}) > 0$. Fie $\varepsilon > 0$. Există o funcție boreliană etajată $\mathbf{f}_1 \in \mathcal{E}_E$ cu $N_p(\mathbf{f} - \mathbf{f}_1) < \varepsilon$ și $N_p(\mathbf{f}_1) > 0$. Conform celor de mai sus, există o funcție boreliană etajată $\mathbf{g} \in \mathcal{E}_F$ cu $N_p(\mathbf{g}) = 1$ astfel încît

$$\int |u(\mathbf{f}_1, \mathbf{g})| \, d\mu \geqslant N_p(\mathbf{f}_1) - \varepsilon \geqslant N_p(\mathbf{f}) - 2\varepsilon.$$

Dar

$$\int |u(\mathbf{f}, \mathbf{g})| \, d\mu = \int |u(\mathbf{f}_1, \mathbf{g}) + u(\mathbf{f} - \mathbf{f}_1, \mathbf{g})| \, d\mu \geqslant$$

$$\geqslant \int |u(\mathbf{f}_1, \mathbf{g})| \, d\mu - \int |u(\mathbf{f} - \mathbf{f}_1, \mathbf{g})| \, d\mu$$

și

$$\int |u(\mathbf{f} - \mathbf{f}_1, \mathbf{g}) \, d\mu \leqslant N_p(\mathbf{f} - \mathbf{f}_1) \, N_q(\mathbf{g}) < \varepsilon$$

deci

$$\int |u(\mathbf{f}, \mathbf{g})| \, d\mu \geqslant N_p(\mathbf{f}) - 3\varepsilon$$

de unde

$$\sup \int |u(\mathbf{f}, \mathbf{g})| \, d\mu \geqslant N_p(\mathbf{f}), \; \mathbf{g} \in \mathcal{E}_F, \; N_q(\mathbf{g}) = 1$$

și deci

$$N_p(\mathbf{f}) = \sup \int |u(\mathbf{f}, \mathbf{g})| \, d\mu = \sup \int |\mathbf{f}| \, |\mathbf{g}| \, d\mu$$

pentru $\mathbf{g} \in \mathcal{E}_F$ cu $N_q(\mathbf{g}) = 1$.

5) $1 < p < +\infty$, $\mathbf{f} : T \to E$ o funcție măsurabilă oarecare cu $N_p(\mathbf{f}) > 0$. Fie $0 < \alpha < N_p(\mathbf{f})$. Deoarece

$$N_p(\mathbf{f}) = \sup \, N_p(\mathbf{f}\varphi_K), \quad K \text{ compact},$$

există o mulțime compactă $K \subset T$, pe care $\mathbf{f}$ nu se anulează, cu

$$\alpha < N_p(\mathbf{f}\varphi_K).$$

Deoarece $\mathbf{f}$ este măsurabilă, există un șir crescător (K_n) de mulțimi compacte și o mulțime μ-neglijabilă $N \subset K$ astfel încît $\bigcup_{n=1}^{\infty} K_n = K - N$ și restricția

lui f la fiecare K_n să fie continuă. Pentru fiecare n, funcția $\mathbf{f}\,\varphi_{Kn}$ aparține spațiului $\mathcal{L}^p_E$. Șirul $(|\mathbf{f}|\,\varphi_{Kn})$ este crescător și $|\mathbf{f}|\,\varphi_{K-N} = \sup_n |\mathbf{f}|\,\varphi_{Kn}$, deci

$$N_p(\mathbf{f}\,\varphi_K) = N_p(\mathbf{f}\varphi_{K-N}) = \sup_n N_p(\mathbf{f}\varphi_{Kn}).$$

Există n astfel încît $\alpha < N_p(\mathbf{f}\varphi_{Kn})$. Deoarece $\mathbf{f}\varphi_{Kn} \in \mathcal{L}^p_E$, există o funcție boreliană etajată reală φ cu $N_q(\varphi) = 1$ și

$$\alpha < \int |\mathbf{f}|\,\varphi_{Kn}\,|\,\varphi\,|\,d\mu.$$

Fie $0 < a < 1$. Deoarece restricția lui f la K_n este continuă și nenulă, există o funcție măsurabilă etajată $\mathbf{g}_0 : T \to F$ cu

$$|\mathbf{g}_0(t)| = 1 \text{ și } a\,|\mathbf{f}(t)| < |u(\mathbf{f}(t), \mathbf{g}_0(t))|, \text{ pentru } t \in K_n$$

și $\mathbf{g}_0(t) = 0$ pentru $t \in K_n$ (demonstrația propoziției 11, § 11). Atunci $\mathbf{g}_0\,\varphi$ este o funcție etajată din $\mathcal{E}_F$ cu $N_q(\mathbf{g}_0\,\varphi) = 1$ și

$$\int |\mathbf{f}|\,\varphi_{Kn}\,|\,\varphi\,|\,d\mu \leqslant \frac{1}{a}\int |u|\,(\mathbf{f}, \mathbf{g}_0\,\varphi)|\,d\mu \leqslant \frac{1}{a}\sup{}^*\int |u(\mathbf{f}, \mathbf{g})|\,d\mu,\ N_q(\mathbf{g}) = 1.$$

Urmează că

$$\alpha < \frac{1}{a}\sup{}^*\int |u(\mathbf{f}, \mathbf{g})|\,d\mu,\ N_q(\mathbf{g}) = 1, \mathbf{g} \in \mathcal{E}_F.$$

Făcînd $a \to 1$ și $\alpha \to N_p(\mathbf{f})$, deducem

$$N_p(\mathbf{f}) \leqslant \sup{}^*\int |u(\mathbf{f}, \mathbf{g})|\,d\mu,\ N_q(\mathbf{g}) = 1, \mathbf{g} \in \mathcal{E}_F$$

și teorema este demonstrată în acest caz.

6) $p = +\infty$, $\mathbf{f} : T \to E$ o funcție măsurabilă oarecare cu $N_\infty(\mathbf{f}) > 0$. Fie α un număr astfel încît $0 < \alpha < N_\infty(\mathbf{f})$. Mulțimea

$$B = \{t \mid |\mathbf{f}(t)| > \alpha\}$$

este μ-măsurabilă (deoarece $|\mathbf{f}|$ este μ-măsurabilă) și nu este μ-neglijabilă. Există o mulțime compactă $K \subset B$ care nu este μ-neglijabilă: $\mu(K) > 0$. Deoarece f este μ-măsurabilă, există o mulțime compactă $K_1 \subset K$ cu $\mu(K_1) > 0$ astfel încît restricția lui f la K_1 să fie continuă.

Fie $\varepsilon > 0$. Deoarece restricția lui f la K_1 este continuă, există o familie finită de mulțimi deschise relativ compacte $(G_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ care acoperă pe K_1 și astfel încît oscilația lui f pe fiecare $G_i \cap K$ este $< \varepsilon$. Există apoi o partiție $(A_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ a lui K_1 formată din mulțimi boreliene compacte, astfel ca $A_i \subset G_i$ pentru fiecare i, deci oscilația lui f pe fiecare A_i este $< \varepsilon$. Cel puțin una din mulțimile A_i are măsura > 0. Să notăm cu A una din mulțimile A_i cu $\mu(A) > 0$. Fie $x \in \mathbf{f}(A)$. Deoarece $A \subset B$ avem $|x| > \alpha$ și $|\mathbf{f}(t) - x| < \varepsilon$ pentru orice $t \in A$. Fie $y \in F$ cu $|y| = 1$ și

$|u(x, y)| \geqslant (1 - \varepsilon |x|$. Funcția $\mathbf{g} = \frac{1}{\mu(A)} \varphi_A y$ este boreliană etajată, din $\mathcal{E}_F$ și

$$N_1(\mathbf{g}) = \int |\mathbf{g}| \, d\mu = 1.$$

Atunci

$$\int |u(\mathbf{f}, \mathbf{g})| \, d\mu = \frac{1}{\mu(A)} \int \varphi_A |u(\mathbf{f}, \mathbf{g})| \, d\mu =$$

$$= \frac{1}{\mu(A)} \int |u(x, y) \varphi_A + u(\mathbf{f} - x, y) \varphi_A| \, d\mu \geqslant$$

$$\geqslant \frac{1}{\mu(A)} \int |u(x, y)| \varphi_A \, d\mu - \frac{1}{\mu(A)} \int |u(\mathbf{f} - x, y)| \varphi_A \, d\mu.$$

Dar

$$\frac{1}{\mu(A)} \int |u(x, y)| \varphi_A \, d\mu \geqslant \frac{1}{\mu(A)} \int (1 - \varepsilon) |x| \varphi_A \, d\mu = (1 - \varepsilon) |x|$$

și

$$\frac{1}{\mu(A)} \int |u(\mathbf{f} - x, y)| \varphi_A \, d\mu \leqslant \frac{1}{\mu(A)} \int |\mathbf{f} - x| \, |y| \varphi_A \, d\mu \leqslant \frac{1}{\mu(A)} \int \varepsilon \varphi_A \, d\mu = \varepsilon$$

deci

$$\int |u(\mathbf{f}, \mathbf{g})| \, d\mu \geqslant (1 - \varepsilon) |x| - \varepsilon > (1 - \varepsilon)\alpha - \varepsilon = \alpha - \varepsilon(\alpha + 1)$$

de unde

$$\sup \int^* |u(\mathbf{f}, \mathbf{g})| \, d\mu \geqslant \alpha, \; \mathbf{g} \in \mathcal{E}_F, \; N_1(\mathbf{g}) = 1.$$

Deoarece $\alpha < N_\infty(\mathbf{f})$ este arbitrar, deducem

$$\sup \int |u(\mathbf{f}, \mathbf{g})| \, d\mu \geqslant N_\infty(\mathbf{f}) \; , \mathbf{g} \in \mathcal{E}_F \; , N_1(\mathbf{g}) = 1$$

și deci

$$N_\infty(\mathbf{f}) = \sup \int^* |u(\mathbf{f}, \mathbf{g})| \, d\mu = \sup \int^* |\mathbf{f}| \, |\mathbf{g}| \, d\mu,$$

pentru $\mathbf{g} \in \mathcal{E}_F$ cu $N_1(\mathbf{g}) = 1$ și teorema este complet demonstrată.

Observații. 1°. *Pentru orice funcție* μ *-măsurabilă* $\mathbf{f} : T \to E$ *și pentru* $1 \leqslant p \leqslant +\infty$ *avem de asemenea*

$$N_p(\mathbf{f}) = \sup \int^* |u(\mathbf{f}, \mathbf{g})| \, d\mu = \sup \int^* |\mathbf{f}| \, |\mathbf{g}| \, d\mu,$$

pentru $\mathbf{g} \in \mathcal{E}_F$ *cu* $N_q(\mathbf{g}) < 1$ *(în loc de* $N_q(\mathbf{g}) = 1$*),* $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$

Fie $\alpha < N_p(\mathbf{f})$ și $0 < \varepsilon < 1$. Există o funcție $\mathbf{g}_1 \in \mathcal{E}$ cu $N_q(\mathbf{g}_1) = 1$ astfel încît

$$\alpha < \int |u(\mathbf{f}, \mathbf{g}_1)| \, d\mu.$$

Funcția $\mathbf{g} = (1 - \varepsilon)\mathbf{g}_1$ aparține lui $\mathcal{E}_F$, $N_q(\mathbf{g}) = 1 - \varepsilon < 1$ și

$$\int^* |u(\mathbf{f}, \mathbf{g})| \, d\mu = (1 - \varepsilon) \int^* |u(\mathbf{f}, \mathbf{g}_1)| \, d\mu \geqslant (1 - \varepsilon)\alpha,$$

de unde

$$\sup \int^* |u(\mathbf{f}, \mathbf{g})| \, d\mu \geqslant N_p(\mathbf{f}) \ , \mathbf{g} \in \mathcal{E}_F, \ N_q(\mathbf{g}) < 1.$$

2°. *Pentru orice funcție* μ *-măsurabilă* $\mathbf{f} : T \to E$ *și pentru* $1 \leqslant p \leqslant +\infty$ *avem*

$$N_p(\mathbf{f}) = \sup \int^* |u(\mathbf{f}, \mathbf{g})| \, d\mu = \sup \int^* |\mathbf{f}| \, |\mathbf{g}| \, d\mu$$

pentru $\mathbf{g} \in \mathcal{E}_F$ *cu* $N_q(\mathbf{g}) \leqslant 1, \dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1.$

3) *Pentru orice funcție* μ *-măsurabilă* $\mathbf{f} : T \to E$ *și pentru* $1 \leqslant p \leqslant +\infty$, *avem*

$$N_p(\mathbf{f}) = \sup \int^* |u(\mathbf{f}, \mathbf{g})| \, d\mu = \sup \int^* |\mathbf{f}| \, |\mathbf{g}| \, d\mu$$

pentru $\mathbf{f} \in \mathcal{L}_F^q$ *(în loc de* $\mathbf{f} \in \mathcal{E}_F$*) cu* $N_q(\mathbf{g}) = 1$ *sau* $N_q(\mathbf{g}) < 1$ *sau* $N_q(\mathbf{g}) \leqslant 1$, $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1.$

Propoziția 2. *Fie* E, F *și* G *trei spații Banach și* $u : E \times F \to G$ *o aplicație biliniară continuă cu* $|x| = \sup_{|y| \leqslant 1} |u(x, y)|$, *pentru orice* $x \in E$. *Fie* $\mathbf{f} : T \to E$ *o funcție* μ *-măsurabilă. Dacă pentru orice* $y \in E$, *funcția* $t \to u(\mathbf{f}(t), y)$ *este* μ *-neglijabilă, atunci* $\mathbf{f}$ *este* μ *-neglijabilă.*

Într-adevăr, pentru orice funcție $\mathbf{g} = \sum_{i=1}^{n} \varphi_{A_i} y_i$ din $\mathcal{E}_F$, funcția $t \to u(\mathbf{f}(t), \mathbf{g}(t))$ este μ -neglijabilă, deci

$$N_1(\mathbf{f}) = \sup \int^* |u(\mathbf{f}, \mathbf{g})| \, d\mu = 0, \text{ pentru } \mathbf{g} \in \mathcal{E}_F \text{ cu } N_\infty(\mathbf{g}) < 1.$$

Rezultă că $\mathbf{f}$ este μ -neglijabilă.

Corolarul 1. *Fie* E *și* F *două spații Banach și* $U : T \to \mathcal{L}(E, F)$ *o funcție* μ *-măsurabilă. Dacă pentru orice* $x \in E$, *funcția* $t \to U(t)x$ *este* μ *-neglijabilă, atunci* U *este* μ *-neglijabilă.*

Corolarul 2. *Fie E un spațiu Banach și Z un subspațiu al lui E astfel încît* $|x| = \sup_{z \in Z} \frac{|< x, z >|}{|z|}$ *pentru orice $x \in E$. Fie* $\mathbf{f} : T \to E$ *o funcție μ-măsurabilă. Dacă funcția $t \to < \mathbf{f}(t), z >$ este μ-neglijabilă pentru orice $z \in Z$, atunci $\mathbf{f}$ este μ-neglijabilă.*

Se ia $F = Z$ în propoziția 2.

În particular, corolarul 2 este adevărat dacă se ia $Z = E'$.

Corolarul 3. *Fie E un spațiu Banach, E' dualul său și* $\mathbf{f}' : T \to E'$ *o funcție μ-măsurabilă. Dacă funcția $t \to < x, \mathbf{f}'(t) >$ este μ-neglijabilă pentru orice $x \in E$, atunci $\mathbf{f}'$ este μ-neglijabilă.*

Pentru orice spațiu Banach X să notăm cu $\mathcal{H}_X$ mulțimea funcțiilor de forma $\mathbf{g} = \sum_{i=1}^{n} \varphi_i x_i$ cu $\varphi_i \in \mathcal{K}(T)$ și $x_i \in E$. Avem $\mathcal{H}_X \subset \mathcal{K}_X(T)$ și $\mathcal{H}_X$ este un subspațiu bogat al lui $\mathcal{K}_X(T)$ (definiția 1, § 1).

Teorema 3. *Fie E, F și G trei spații Banach și $u : E \times F \to G$ o aplicație biliniară continuă astfel încît* $|x| = \sup_{|y| \leqslant 1} |u(x, y)|$ *pentru orice $x \in E$. Pentru orice funcție μ-măsurabilă* $\mathbf{f} : T \to E$ *avem*

$$N_p(\mathbf{f}) = \sup \int^* |u(\mathbf{f}, \mathbf{g})| \, d\mu = \sup \int^* |\mathbf{f}| \, |\mathbf{g}| \, d\mu$$

pentru $\mathbf{g} \in \mathcal{H}_F(T)$ *cu* $N_q(\mathbf{g}) < 1$ *(sau* $N_q(\mathbf{g}) = 1$*),* $1 \leqslant p \leqslant +\infty$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

Dacă $\mathbf{g} \in \mathcal{H}_F(T)$ cu $N_p(\mathbf{g}) < 1$, avem

$$\int^* |u(\mathbf{f}, \mathbf{g})| \, d\mu \leqslant \int^* |\mathbf{f}| \, |\mathbf{g}| \, d\mu \leqslant N_p(\mathbf{f}).$$

Dacă $N_p(\mathbf{f}) = 0$, concluzia teoremei este evidentă. Să presupunem că $N_p(\mathbf{f}) > 0$. Fie $0 < \alpha < N_p(\mathbf{f})$. Pentru fiecare n să definim funcția $\mathbf{f}_n$ prin egalitățile

$$\mathbf{f}_n(t) = \begin{cases} \mathbf{f}(t), & \text{dacă } |\mathbf{f}(t)| \leqslant n, \\ 0, & \text{dacă } |\mathbf{f}(t)| > n. \end{cases}$$

Funcția $\mathbf{f}_n$ este μ-măsurabilă, șirul $(|\mathbf{f}_n|)$ este crescător și $\sup |\mathbf{f}_n| = |\mathbf{f}|$, deci

$$N_p(\mathbf{f}) = \sup N_p(\mathbf{f}_n).$$

Există deci un număr natural n cu

$$\alpha < N_p(\mathbf{f}_n).$$

Există apoi o funcție etajată $\mathbf{h} = \sum_{i=1}^{k} \varphi_{A_i} y_i$ din $\mathcal{E}_F$ cu mulțimile A_i disjuncte, $y_i \neq 0$ și $N_q(\mathbf{h}) < 1$ astfel încît

$$\alpha < \int^* |u(\mathbf{f}_n, \mathbf{h})| \, d\mu.$$

Să observăm că funcția $u(\mathbf{f}_n, \mathbf{h})$ este μ-măsurabilă, mărginită ($|u(\mathbf{f}_n(t), \mathbf{h}(t))| \leqslant n\|\mathbf{h}\|$) și cu suport compact (conținut în suportul lui $\mathbf{h}$), deci este μ-integrabilă. Fie $\eta > 0$ un număr astfel încît să avem în același timp

$$\sum_{i=1}^{k} \eta |y_i| < \frac{1}{n}\left(\int |u(\mathbf{f}_n, \mathbf{h})| \, d\mu - \alpha\right) \text{ și } \sum_{i=1}^{k} \eta |y_i|^q < 1 - [N_q(\mathbf{h})]^q.$$

Pentru fiecare i există o mulțime compactă $K_i \subset A_i$ cu $\mu(A_i - K_i) < \eta$, o mulțime deschisă relativ compactă $U_i \supset K_i$ astfel încît $\mu(U_i - K_i) < \eta$ și o funcție $\varphi_i : T \to [0, 1]$, continuă cu suport compact, egală cu 1 pe K_i și nulă pe U_i. În plus, deoarece mulțimile K_i sînt disjuncte, putem alege mulțimile U_i disjuncte. Avem

$$\varphi_i \leqslant \varphi_{U_i} = \varphi_{K_i} + \varphi_{U_i - K_i} \leqslant \varphi_{A_i} + \varphi_{U_i - K_i}$$

deci

$$\int \varphi_i \, d\mu \leqslant \mu(A_i) + \mu(U_i - K_i) \leqslant \mu(A_i) + \eta.$$

Funcția

$$\mathbf{g} = \sum_{i=1}^{k} \varphi_i y_i$$

este continuă cu suport compact, din $\mathcal{K}_F$. Avem $\mathbf{g}(t) = \mathbf{h}(t)$ pentru $t \in K = \bigcup_{i=1}^{k} K_i$ și $|\mathbf{g}(t)| \leqslant |y_i|$ pentru $t \in U_i$. Atunci, dacă $q < +\infty$,

$$[N_q(\mathbf{g})]^q = \int |\mathbf{g}(t)|^q \, d\mu = \sum_i |y_i|^q \int \varphi_i \, d\mu \leqslant \sum_i \mu(A_i) |y_i|^q + \sum_i \eta |y_i|^q < 1$$

deci $N_q(\mathbf{g}) < 1$; dacă $q = +\infty$, avem $N_\infty(\mathbf{g}) \leqslant \sup_i |y_i| = N_\infty(\mathbf{h}) < 1$. Așadar, pentru orice q avem $N_q(\mathbf{g}) < 1$. Pe de altă parte,

$$\int_{T-K} |u(\mathbf{f}_n, \mathbf{h})| d\mu \leqslant n \sum_i \mu(A_i - K_i) |y_i| < \int |u(\mathbf{f}_n, \mathbf{h})| \, d\mu + \alpha$$

deci

$$\int^* |u(\mathbf{f}, \mathbf{g})| \, d\mu \geqslant \int^* |u(\mathbf{f}_n, \mathbf{g})| \, d\mu \geqslant \int^* |u(\mathbf{f}_n, \mathbf{g})| \, d\mu = \int_K |u(\mathbf{f}_n, \mathbf{h})| \, d\mu =$$

$$= \int |u(\mathbf{f}_n, \mathbf{h})| \, d\mu - \int_{T-K} |u(\mathbf{f}_n, \mathbf{h})| \, d\mu > \alpha.$$

Urmează că

$$N_p(\mathbf{f}) = \sup \int^* |u(\mathbf{f}, \mathbf{g})| \, d\mu, \quad \mathbf{g} \in \mathcal{K}_F, \quad N_q(\mathbf{g}) < 1.$$

Să arătăm că marginea superioară poate fi luată pentru funcțiile $\mathbf{g} \in \mathcal{H}_F$ cu $N_q(\mathbf{g}) = 1$.

Să presupunem $N_p(\mathbf{f}) > 0$ și fie $0 < \alpha < N_p(\mathbf{f})$. Fie $\mathbf{h} \in \mathcal{H}_F$ cu $N_q(\mathbf{h}) < 1$ și

$$\alpha < \int^* |u(\mathbf{f}, \mathbf{h})| \, d\mu.$$

Deducem în primul rînd că $N_q(\mathbf{h}) > 0$. Să punem $\mathbf{g} = \dfrac{\mathbf{h}}{N_q(\mathbf{h})}$. Funcția $\mathbf{g}$ aparține spațiului $\mathcal{H}_F$, și $N_q(\mathbf{g}) = 1$. Avem apoi

$$\alpha < \int^* |u(\mathbf{f}, \mathbf{h})| \, d\mu = N_q(\mathbf{h}) \int^* |u(\mathbf{f}, \mathbf{g})| \, d\mu < \int^* |u(\mathbf{f}, \mathbf{g})| \, d\mu$$

de unde rezultă că

$$N_p(\mathbf{f}) = \sup \int^* |u(\mathbf{f}, \mathbf{g})| \, d\mu, \quad \mathbf{g} \in \mathcal{H}_F, \quad N_q(\mathbf{g}) = 1.$$

Corolarul 1. *Fie E și F două spații Banach și $U : T \to \mathcal{L}(E, F)$ o funcție μ-măsurabilă. Avem*

$$N_p(U) = \sup \int^* |U(t)\,\mathbf{g}(t)| \, d\mu(t) = \sup \int^* |U(t)| \, |\mathbf{g}(t)| \, d\mu(t)$$

pentru $\mathbf{g} \in \mathcal{E}_E$ sau $\mathbf{g} \in \mathcal{H}_E$ cu $N_q(\mathbf{g}) < 1$ sau $N_q(\mathbf{g}) = 1$, $1 \leqslant p \leqslant +\infty$, $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$.

Corolarul 2. *Fie E un spațiu Banach și $\mathbf{f} : T \to E$ o funcție μ-măsurabilă. Avem*

$$N_p(\mathbf{f}) = \sup \int^* |\mathbf{f}(t)\,\varphi(t)| \, d\mu(t) = \sup \int^* |\mathbf{f}(t)| \, |\varphi(t)| \, d\mu(t)$$

pentru $\varphi \in \mathcal{E}$ sau $\varphi \in \mathcal{K}(T)$ cu $N_q(\varphi) < 1$ sau $N_q(\varphi) = 1$, $1 \leqslant p \leqslant +\infty$ $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$.

Propoziția 3. *Fie E un spațiu Banach și $\mathbf{f} : T \to E$ o funcție μ-măsurabilă. Dacă pentru orice funcție $\varphi \in \mathcal{K}(T)$ funcția $\mathbf{f}\varphi$ este μ-neglijabilă, atunci $\mathbf{f}$ este μ-neglijabilă.*

Teorema 4. *Fie E un spațiu Banach, E' dualul său, $1 \leqslant p \leqslant \infty$ și $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$. Pentru orice funcție $\mathbf{f} \in \mathcal{L}^p_E$ avem*

$$N_p(\mathbf{f}) = \sup \left| \int \langle \mathbf{f}, \mathbf{f}' \rangle \, d\mu \right| = \sup \int |\langle \mathbf{f}, \mathbf{f}' \rangle| \, d\mu = \sup \int |\mathbf{f}| \, |\mathbf{f}'| \, d\mu$$

cînd $\mathbf{f}'$ parcurge mulțimea funcțiilor din $\mathcal{E}_{E'}$, sau din $\mathcal{H}_{E'}$, cu $N_q(\mathbf{f}') \leqslant 1$ (sau $N_q(\mathbf{f}') = 1$).

Pentru orice funcție $\mathbf{f}' \in \mathcal{L}^q_E$, *avem*

$$N_q(\mathbf{f}') = \sup \left| \int < \mathbf{f}, \mathbf{f}' > d\mu \right| = \sup \int | < \mathbf{f}, \mathbf{f}' > | \, d\mu = \sup \int |\mathbf{f}| \, |\mathbf{f}'| \, d\mu$$

cînd $\mathbf{f}$ *parcurge mulțimea funcțiilor din* $\mathcal{E}_E$ *sau* $\mathcal{K}_E$ *cu* $N_p(\mathbf{f}) \leqslant 1$ (*sau* $N_p(\mathbf{f}) = 1$.

Pentru a demonstra prima serie de egalități, se consideră funcționala biliniară $u(x, y) = < x, y >$ definită pe $E \times E'$ și se observă că pentru orice $x \in E$ avem $|x| = \sup_{|y| \leqslant 1} | < x, y > |$ și că pentru orice $x \in E$ și orice $\varepsilon > 0$ există un element $y \in E'$ cu $|y| \leqslant 1$ astfel încît $< x, y >$ este pozitiv și $< x, y > \geqslant (1 - \varepsilon)|x|$. Se urmărește apoi pas cu pas demonstrația teoremelor 2 și 3 pentru a arăta că pentru $\mathbf{f} \in \mathcal{L}^p_E$, avem

$$\sup \left| \int < \mathbf{f}, \mathbf{g} > d\mu \right| \geqslant N_p(\mathbf{f})$$

pentru $\mathbf{g} \in \mathcal{E}_E$, sau $\mathbf{g} \in \mathcal{K}_E$, cu $N_p(\mathbf{g}) \leqslant 1$.

La fel se demonstrează a doua serie de egalități.

Observație. În prima serie de egalități se poate înlocui E' cu un subspațiu Z cu proprietatea că $|x| = \sup_{z \in Z} \frac{| < x, z > |}{|z|}$ pentru $x \in E$.

Corolar. *Dacă* $\mathbf{f} \in \mathcal{L}^p(\mu)$, $1 \leqslant p \leqslant \infty$, *atunci*

$$N_p(\mathbf{f}) = \sup \left| \int \mathbf{f} g \, d\mu \right| = \sup \int |\mathbf{f}| \, |g| \, d\mu$$

cînd g *parcurge mulțimea funcțiilor din* $\mathcal{E}(T)$ *sau din* $\mathcal{K}(T)$ *cu* $N_q(g) \leqslant 1$ (*sau* $N_q(g) = 1$), $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

Propoziția 4. *Fie* E *un spațiu Banach și* $\mathbf{f} : T \to E$ *o funcție* μ*-măsurabilă. Dacă pentru orice mulțime compactă* $K \subset T$ *funcția* $\mathbf{f}\varphi_K$ *este* μ *-integrabilă și*

$$\int_K \mathbf{f} \, d\mu = 0$$

sau dacă ,pentru orice funcție $\varphi \in \mathcal{K}(T)$, *funcția* $\mathbf{f}\varphi$ *este* μ *-integrabilă și*

$$\int \mathbf{f}\varphi \, d\mu = 0,$$

atunci $\mathbf{f}$ *este* μ *-neglijabilă.*

Să presupunem mai întîi că pentru orice mulțime compactă $K \subset T$ funcția $\mathbf{f}\varphi_K$ este μ -integrabilă și

$$\int_K \mathbf{f} \, d\mu = 0.$$

Fie $A \subset T$ o mulțime boreliană relativ compactă. Să arătăm că $\mathbf{f}\varphi_A$ este μ -integrabilă și

$$\int_A \mathbf{f}\, d\mu = 0.$$

Deoarece A este μ -integrabilă, există un șir crescător (K_n) de mulțimi compacte astfel încît mulțimea $A - \bigcup_{n=1}^{\infty} K_n$ să fie μ -neglijabilă. Șirul $(\mathbf{f}\varphi_{K_n})$ este format din funcții integrabile din $\mathcal{L}^1_E(\mu)$ și tinde aproape peste tot către $\mathbf{f}\varphi_A$. Deoarece $|\mathbf{f}\varphi_{K_n}| \leqslant |\mathbf{f}\varphi_{\bar{A}}|$ pentru orice $n \in N$ iar $\mathbf{f}\varphi_{\bar{A}}$ este μ -integrabilă, conform teoremei lui Lebesgue rezultă că $\mathbf{f}\varphi_A$ este μ -integrabilă și

$$\int \mathbf{f}\varphi_A\, d\mu = \lim_{n\to\infty} \int \mathbf{f}\varphi_{K_n}\, d\mu = 0.$$

Urmează atunci că pentru orice $x' \in E'$ avem

$$\int \langle \mathbf{f},\ x'\varphi_A \rangle\, d\mu = \left\langle \int \mathbf{f}\varphi_A\, d\mu,\ x' \right\rangle = 0$$

deci pentru orice funcție etajată $\mathbf{f}'$ din $\mathcal{E}_{E'}$ și orice mulțime compactă $K \subset T$ avem $\varphi_K \mathbf{f}' \in \mathcal{E}_{E'}$, și

$$\int \langle \mathbf{f}\varphi_K,\ \mathbf{f}' \rangle\, d\mu = \int \langle \mathbf{f},\ \varphi_K \mathbf{f}' \rangle\, d\mu = 0.$$

Deoarece $\mathbf{f}\varphi_K \in \mathcal{L}^1_E(\mu)$, din teorema 4 deducem că $N_p(\mathbf{f}\varphi_K) = 0$, deci $\mathbf{f}\varphi_K$ este μ -neglijabilă și deci $\mathbf{f}$ este μ -neglijabilă.

Să presupunem acum că pentru orice funcție $\varphi \in \mathcal{K}(T)$ avem

$$\int \mathbf{f}\varphi\, d\mu = 0.$$

Pentru orice $x' \in E'$ avem atunci

$$\int \langle \mathbf{f},\ \varphi x' \rangle\, d\mu = \left\langle \int \mathbf{f}\varphi\, d\mu,\ x' \right\rangle = 0$$

deci pentru orice funcție $\mathbf{g} = \sum_i \varphi_i x'_i$ din $\mathcal{H}_E$ și orice funcție $\psi \in \mathcal{K}(T)$, avem $\mathbf{g}\psi \in \mathcal{H}_E$, și

$$\int \langle \mathbf{f}\psi,\ \mathbf{g} \rangle\, d\mu = \int \langle \mathbf{f},\ \psi\mathbf{g} \rangle\, d\mu = 0.$$

Deoarece $\mathbf{f}\psi \in \mathcal{L}^1_E(\mu)$, din teorema 4 deducem că $\mathbf{f}\psi$ este μ-neglijabilă pentru orice $\psi \in \mathcal{K}(T)$. Pentru orice mulțime compactă $K \subset T$ există o

funcție $\psi \in \mathcal{K}(T)$ cu $\psi(t) = 1$ pentru $t \in K$. Atunci $|\mathbf{g}\varphi| \leqslant |\mathbf{g}\psi|$, deci $\mathbf{g}\varphi_K$ este μ -neglijabilă și deci $\mathbf{g}$ este μ -neglijabilă.

Corolar. *Dacă* $\mathbf{f} \in \mathcal{L}_E^p$, $1 \leqslant p \leqslant \infty$, *și dacă*

$$\int_K \mathbf{f}\, d\mu = 0, \text{ pentru orice mnlțime compactă } K \subset T,$$

sau dacă

$$\int \mathbf{f}\varphi\, d\mu = 0, \text{ pentru orice funcție } \varphi \in \mathcal{K}(T),$$

atunci $\mathbf{f}$ *este* μ *-neglijabilă.*

Într-adevăr, dacă $\mathbf{f} \in \mathcal{L}_E^p$, atunci $\mathbf{f}\varphi_K$ și $\mathbf{f}\varphi$ sînt μ -integrabile oricare ar fi mulțimea compactă $K \subset T$ și funcția $\varphi \in \mathcal{K}(T)$.

Propoziția 5. *Fie* E, F *și* G *trei spații Banach și* $u : E \times F \to G$ *o aplicație biliniară continuă cu* $|x| = \sup_{|y| \leqslant 1} |u(x, y)|$ *pentru orice* $x \in E$. *Fie* $\mathbf{f} : T \to E$ *o funcție* μ *-măsurabilă.*

Dacă pentru orice mulțime compactă $K \subset T$ *și orice* $y \in F$ *funcția* $t \to u(\mathbf{f}(t), y)\, \varphi_K(t)$ *este* μ *-integrabilă și*

$$\int_K u(\mathbf{f}(t), y)\, d\mu(t) = 0.$$

sau dacă pentru orice funcție $\varphi \in \mathcal{K}(T)$ *și orice* $y \in F$, *funcția* $t \to u(\mathbf{f}(t), y)\varphi(t)$ *este* μ *-integrabilă și*

$$\int u(\mathbf{f}(t), y)\, \varphi(t)\, d\mu(t) = 0,$$

atunci $\mathbf{f}$ *este* μ *-neglijabilă.*

Într-adevăr, conform propoziției 4, funcția $t \to u(\mathbf{f}(t), y)$ este μ-neglijabilă oricare ar fi $y \in F$. Conform propoziției 2, funcția $\mathbf{f}$ este μ -neglijabilă.

Corolarul 1. *Fie* E *și* F *două spații Banach și* $U : T \to \mathcal{L}(E, F)$ *o funcție* μ *-măsurabilă.*

Dacă pentru orice $x \in E$ *și orice mulțime compactă* $K \subset T$ *funcția* $t \to U(t)\, x\, \varphi_K(t)$ *este* μ *-integrabilă și*

$$\int_K U(t)\, x\, d\mu = 0$$

sau dacă pentru orice $x \in E$ *și orice* $\varphi \in \mathcal{K}(T)$ *funcția* $Ux\varphi$ *este* μ *-integrabilă și*

$$\int U\, x\, \varphi\, d\mu = 0,$$

atunci U *este* μ *-neglijabilă.*

Corolarul 2. *Fie E un spațiu Banach, Z un subpsațiu al lui E' cu* $|x| = \sup_{z \in Z} \frac{|< x, z >|}{|z|}$ *pentru orice* $x \in E$ *și* $\mathbf{f} : T \to E$ *o funcție* μ *-măsurabilă.*

Dacă pentru orice $z \in Z$ *și orice mulțime compactă* $K \subset T$, *funcția* $< \mathbf{f}, z > \varphi_K$ *este* μ *-integrabilă și*

$$\int_K < \mathbf{f}, z > \mathrm{d}\mu = 0$$

sau dacă pentru orice $z \in Z$ *și orice* $\varphi \in \mathcal{K}(T)$, *funcția* $< \mathbf{f}, z > \varphi$ *este* μ *-integrabilă și*

$$\int < \mathbf{f}, z > \varphi \, \mathrm{d}\mu = 0,$$

atunci $\mathbf{f}$ *este* μ *-neglijabilă.*

Corolarul 3. *Fie E un spațiu Banach, E' dualul său și* $\mathbf{f}' : T \to E'$ *o funcție* μ *-măsurabilă.*

Dacă pentru orice $x \in E$ *și orice mulțime compactă* $K \subset T$ *funcția* $< x, \mathbf{f}' > \varphi_K$ *este* μ *-integrabilă și*

$$\int_K < x, \mathbf{f}' > \mathrm{d}\mu = 0$$

sau dacă pentru orice $x \in E$ *și* $\varphi \in \mathcal{K}(T)$, *funcția* $< x, \mathbf{f}' > \varphi$ *este* μ *-integrabilă și*

$$\int < x, \mathbf{f}' > \varphi \, \mathrm{d}\mu = 0,$$

atunci $\mathbf{f}'$ *este* μ *-neglijabilă.*

Teorema 5. *Fie E, F și G trei spații Banach și* $u : E \times F \to G$ *o aplicație biliniară continuă cu* $|x| = \sup_{|y| \leqslant 1} |u(x, y)|$ *pentru fiecare* $x \in E$. *O aplicație* μ *-măsurabilă* $\mathbf{f} : T \to E$ *aparține spațiului* $\mathcal{L}_E^p(\mu)$, $1 \leqslant p \leqslant +\infty$, *dacă și numai dacă pentru orice* $\mathbf{g} \in \mathcal{L}_F^q(\mu)$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, *funcția* $t \to u(\mathbf{f}(t), \mathbf{g}(t))$, *este* μ *-integrabilă.*

Dacă $\mathbf{f} \in \mathcal{L}_E^p$, atunci $u(\mathbf{f}, \mathbf{g}) \in \mathcal{L}_G^1$, oricare ar fi funcția $\mathbf{g} \in \mathcal{L}_F^q$, chiar dacă $p = 1$.

Reciproc, să presupunem că $u(\mathbf{f}, \mathbf{g}) \in \mathcal{L}_G^1$ oricare ar fi $\mathbf{g} \in \mathcal{L}_F^p$. Deoarece $\mathbf{f}$ este μ -măsurabilă, pentru a arăta că $\mathbf{f} \in \mathcal{L}_E^p$, este suficient să arătăm că

$$N_p(\mathbf{f}) = \sup \int^* |u(\mathbf{f}, \mathbf{g})| \mathrm{d}\mu < +\infty, N_q(\mathbf{g}) \leqslant 1.$$

Să presupunem mai întîi că f este o funcție *reală* măsurabilă și că $fg \in \mathcal{L}^1$ pentru orice funcție $g \in \mathcal{L}^q$. Să presupunem, prin absurd, că

$$N_p(f) = \sup \int |fg| \, d\mu = +\infty, \quad N_q(g) \leqslant 1, \quad g \in \mathcal{L}^q$$

Pentru fiecare n există o funcție $g_n \in \mathcal{L}^q$ cu $N_q(g_n) \leqslant 1$ și

$$\int |f g_n| \, d\mu > \frac{1}{n^3}.$$

Funcția

$$g = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} |g_n|$$

cu valori finite sau $+\infty$, este μ -măsurabilă și

$$N_q(g) < \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} N_q(g_n) \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} < +\infty,$$

deci g este finită μ -aproape peste tot. Modificînd g pe mulțimea μ -neglijabilă pe care are valoarea $+\infty$, obținem $g \in \mathcal{L}^q$. Deoarece $g \geqslant \frac{1}{n^2} |g_n|$ pentru orice n, avem

$$\int^* |f| \, g \, d\mu \geqslant \frac{1}{n^2} \int |f| \, |g_n| \, d\mu = \frac{1}{n^2} \int |f g_n| \, d\mu > n$$

deci $\int^* |f| g \, d\mu = + -\infty$ și deci fg n-ar fi integrabilă, ceea ce contrazice ipoteza. Așadar, $f \in \mathcal{L}^p$.

Să considerăm acum cazul general, cînd $\mathbf{f} : T \to E$ este μ -măsurabilă și $u(\mathbf{f}, \mathbf{g}) \in \mathcal{L}^1_G$ pentru orice $\mathbf{g} \in \mathcal{L}^q_F$.

Fie $0 < a < 1$. Există o funcție μ -măsurabilă $\mathbf{h} : T \to F$ cu

$$a \, |\mathbf{f}(t)| < |u(\mathbf{f}(t), \mathbf{h}(t))| \text{ și } |\mathbf{h}(t)| = 1.$$

μ -aproape peste tot. Fie $\varphi \in \mathcal{L}^q$. Atunci $\varphi \mathbf{h} \in \mathcal{L}^1_F$, deci funcția $u(\mathbf{f}, \mathbf{h}\varphi)$ este μ -integrabilă. Dar

$$a \, |\mathbf{f}(t)| \, |\varphi(t)| \leqslant |u(\mathbf{f}(t), \mathbf{h}(t))| \, |\varphi(t)|$$

deci funcția $a|\mathbf{f}(t)| \, |\varphi(t)|$ este μ -integrabilă pentru orice $\varphi \in \mathcal{L}^q$. Din prima parte a teoremei deducem că $a|\mathbf{f}| \in \mathcal{L}^p$, deci $|\mathbf{f}| \in \mathcal{L}^p$, adică $N_p(\mathbf{f}) < +\infty$. Urmează atunci că $\mathbf{f} \in \mathcal{L}^p_E$ și teorema este demonstrată.

Corolarul 1. *Fie E și F două spații Banach. O funcție μ -măsurabilă $U : T \to X = \mathcal{L}(E, F)$ aparține spațiului $\mathcal{L}^p_X$, dacă și numai dacă pentru orice funcție $\mathbf{f} \in \mathcal{L}^q_E$, funcția $t \to U(t)\mathbf{f}(t)$ este μ -integrabilă,* $\left(1 \leqslant p \leqslant +\infty, \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1\right)$.

Corolarul 2. *Fie E un spațiu Banach. O funcție μ -măsurabilă $\mathbf{f}: T \to E$ aparține spațiului $\mathcal{L}^p_E$, $1 \leqslant p \leqslant +\infty$, dacă și numai dacă pentru orice funcție reală $\varphi \in \mathcal{L}^q$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, funcția $\mathbf{f}\varphi$ este μ -integrabilă.*

Corolarul 3. *Fie E un spațiu Banach. O funcție μ -măsurabilă $\mathbf{f}: T \to E$ aparține spațiului $\mathcal{L}^p_E$, $1 \leqslant p \leqslant +\infty$, dacă și numai dacă pentru orice funcție $\mathbf{f}' \in \mathcal{L}^q_{E'}$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, funcția scalară $t \to <\mathbf{f}(t), \mathbf{f}'(t)>$ este μ -integrabilă.*

Corolarul 4. *Fie E un spațiu Banach. O funcție μ -măsurabilă $\mathbf{f}': T \to E'$ aparține spațiului $\mathcal{L}^p_{E'}$, $1 \leqslant p \leqslant +\infty$, dacă și numai dacă pentru orice funcție $\mathbf{f} \in \mathcal{L}^q_E$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, funcția scalară $t \to <\mathbf{f}(t), \mathbf{f}'(t)>$ este μ -integrabilă.*

Corolarul 5. *O funcție reală f aparține lui $\mathcal{L}^p$, $1 \leqslant p \leqslant +\infty$, dacă și numai dacă $fg \in \mathcal{L}^1$ oricare ar fi $g \in \mathcal{L}^q$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.*

Într-adevăr, f este μ -măsurabilă dacă și numai dacă fg este μ -măsurabilă, oricare ar fi funcția μ -măsurabilă etajată g.

Propoziția 6. *Pentru orice funcție $\mathbf{g} \in \mathcal{L}^q_{E'}$, aplicația*

$$U(\mathbf{f}) = \int_T < \mathbf{f}, \mathbf{g} > d\mu, \quad \mathbf{f} \in \mathcal{L}^p_E$$

este o funcțională liniară continuă pe $\mathcal{L}^p_E$ și

$$\| U \| = N_q(\mathbf{g}).$$

Liniaritatea aplicației U este imediată. Continuitatea rezultă din egalitatea

$$\| U \| = \sup | U(\mathbf{f}) | = \sup \left| \int_T < \mathbf{f}, \mathbf{g} > d\mu \right| = N_q(\mathbf{g}) < \infty, \quad N_p(\mathbf{f}) < 1.$$

Observație. Din egalitatea $\| U \| = N_q(\mathbf{g})$ rezultă că dacă $N_q(\mathbf{g}) = 0$, atunci $U = 0$, deci entru două funcții echivalente $\mathbf{g}$ și $\mathbf{g}'$ din $\mathcal{L}^q_{E'}$ corespunde aceeași funcțională U pe $\mathcal{L}^p_E$.

Pe de altă parte, dualul lui $\mathcal{L}^p_E$ se poate identifica cu dualul lui L^p_E. Din propoziția de mai sus rezultă că spațiul $\mathcal{L}^q_{E'}$ se poate scufunda izometric în dualul spațiului L^p_E.

Mai departe se va arăta că fiecare funcțională liniară continuă U pe spațiul $\mathcal{L}^p_E$ cu $1 \leqslant p < +\infty$ se poate obține ca mai sus dintr-o funcție $\mathbf{g} \in \mathcal{L}^q_{E'}$. În acest caz, dualul spațiului L^p_E cu $1 \leqslant p < +\infty$ se poate identifica cu spațiul $L^q_{E'}$.

Dualul spațiului $L^\infty_{E'}$ nu este însă izomorf cu L^1_E decît dacă măsura μ are suportul finit.

Corolar. *Dacă E este un spațiu Hilbert, atunci L^2_E este un spațiu Hilbert pentru produsul scalar*

$$< \tilde{\mathbf{f}}, \tilde{\mathbf{g}} > = \int < \mathbf{f}(t), \mathbf{g}(t) > \mathrm{d}\mu(t).$$

Pentru orice funcțională liniară și continuă U pe $\mathcal{L}^2_E$ există o funcție $\mathbf{g} \in \mathcal{L}^2_E$, determinată μ-aproape peste tot, astfel încît să avem

$$U(\mathbf{f}) = \int < \mathbf{f}(t), \mathbf{g}(t) > \mathrm{d}\mu(t), \quad \textit{pentru } \mathbf{f} \in \mathcal{L}^2_E$$

și

$$\| U \| = N_2(\mathbf{g}).$$

Faptul că $< \tilde{\mathbf{f}}, \tilde{\mathbf{g}} >$ este un produs scalar pe L^2_E se verifică imediat fără dificultate. Avem apoi $\| \mathbf{f} \|_2 = N_2(\mathbf{f}) = \sqrt{< \tilde{\mathbf{f}}, \tilde{\mathbf{f}} >}$, deci spațiul Banach L^2_E este un spațiu Hilbert.

Fie acum U o funcțională liniară și continuă pe $\mathcal{L}^2_E$. Dacă $\tilde{\mathbf{f}} = \tilde{\mathbf{g}}$ avem $U(\mathbf{f}) = U(\mathbf{g})$. Definim funcționala $\tilde{U}$ pe L^2_E punînd

$$\tilde{U}(\tilde{\mathbf{f}}) = U(\mathbf{f}).$$

Această funcțională este continuă deoarece

$$\| \tilde{U} \| = \sup_{\| \tilde{\mathbf{f}} \|_2 \leqslant 1} | \tilde{U}(\tilde{\mathbf{f}}) | = \sup_{N_2(\mathbf{f}) \leqslant 1} | U(\mathbf{f}) | = \| U \| < + \infty.$$

Deoarece L^2_E este un spațiu Hilbert, există *) un element $\tilde{\mathbf{g}} \in L^2_E$ astfel încît să avem

$$\tilde{U}(\tilde{\mathbf{f}}) = < \tilde{\mathbf{f}}, \tilde{\mathbf{g}} > \text{ oricare ar fi } \tilde{\mathbf{f}} \in L^2_E$$

și $\| \tilde{U} \| = \| \tilde{\mathbf{g}} \|_2$. Rezultă atunci că, pentru o funcție oarecare $\mathbf{g} \in \tilde{\mathbf{g}}$, avem

$$U(\mathbf{f}) = < \tilde{\mathbf{f}}, \tilde{\mathbf{g}} > = \int < \mathbf{f}(t), \mathbf{g}(t) > \mathrm{d}\mu(t), \text{ pentru } \mathbf{f} \in \mathcal{L}^2_E$$

și

$$\| U \| = N_2(\mathbf{g})$$

3. Relații între spațiile $\mathcal{L}^r$ și $\mathcal{L}^s$

Fie E un spațiu Banach și μ o măsură pozitivă pe T.

Propoziția 7. *Dacă $1 \leqslant r < p < s \leqslant + \infty$, atunci*

$$\mathcal{F}^r_E \cap \mathcal{F}^s_F \subset \mathcal{F}^p_E \quad \textit{și} \quad \mathcal{L}^r_E \cap \mathcal{L}^s_E \subset \mathcal{L}^p_E.$$

*) Orice spațiu Hilbert E este izomorf și izometric cu dualul său: orice funcțională liniară continuă pe E este de forma $u(x) = < x, z >$, cu $z \in E$ și $\| u \| = \| z \|$.

Să presupunem mai întîi că $s < +\infty$. Există un număr t astfel încît $0 < t < 1$ și $p = tr + (1-t)s$. Să notăm $\alpha = \frac{1}{t}$ și $\beta = \frac{1}{1-t}$. Avem $0 < \alpha, \beta < +\infty, \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = 1$ și $p = \frac{r}{\alpha} + \frac{s}{\beta}$. Folosind inegalitatea lui Hölder, pentru orice funcție $\mathbf{f}: T \to E$ avem

$$\int^* |\mathbf{f}|^p \, d\mu = \int^* |\mathbf{f}|^{\frac{r}{\alpha}} |\mathbf{f}|^{\frac{s}{\beta}} d\mu \leqslant N_\alpha(|\mathbf{f}|^{\frac{r}{\alpha}}) \, N_\beta(|\mathbf{f}|^{\frac{s}{\beta}}) =$$

$$= \left(\int^* |\mathbf{f}|^r \, d\mu\right)^{\frac{1}{\alpha}} \left(\int^* |\mathbf{f}|^s \, d\mu\right)^{\frac{1}{\beta}}.$$

Dacă $N_r(\mathbf{f}) < +\infty$ și $N_s(\mathbf{f}) < \infty$, rezultă că $N_p(\mathbf{f}) < +\infty$ și deci

$$\mathcal{F}_E^r \cap \mathcal{F}_E^s \subset \mathcal{F}_E^p.$$

Să presupunem acum $s = +\infty$. Dacă $\mathbf{f} \in \mathcal{F}_E^r \cap \mathcal{F}_E^{+\infty}$, avem atunci

$$\int^* |\mathbf{f}|^p \, d\mu = \int^* |\mathbf{f}|^r \, |\mathbf{f}|^{p-r} \, d\mu \leqslant N_1(|\mathbf{f}|^r) \, N_\infty(|\mathbf{f}|^{p-r}) =$$

$$= \int^* |\mathbf{f}|^r \, d\mu \; [N_\infty(\mathbf{f})]^{p-r} < +\infty$$

deci $\mathbf{f} \in \mathcal{F}_E^p$. Așadar, incluziunea $\mathcal{F}_E^r \cap \mathcal{F}_E^s \subset \mathcal{F}_E^p$ este valabilă pentru $1 < s \leqslant +\infty$.

Dacă acum $\mathbf{f} \in \mathcal{L}_E^r \cap \mathcal{L}_E^s$, atunci $\mathbf{f}$ este μ-măsurabilă și $\mathbf{f} \in \mathcal{F}_E^p$, deci $\mathbf{f} \in \mathcal{L}_E^p$. Propoziția este astfel demonstrată.

Corolar. *Pentru orice funcție* $\mathbf{f}: T \to E$, *mulțimea* $I_\mathbf{f} = \{p \mid 1 \leqslant p \leqslant +\infty, N_p(\mathbf{f}) < +\infty\}$ *este sau vidă sau un interval din* $\overline{R}$. *Dacă* $I_\mathbf{f}$ *nu este vidă (și nu se reduce la un punct), funcția* $\lg N_p(\mathbf{f})$ *este o funcție convexă de* $\frac{1}{p}$, *iar aplicația* $p \to N_p(\mathbf{f})$ *este continuă pe* $I_\mathbf{f}$.

Prima parte a corolarului rezultă din propoziția precedentă. Să demonstrăm convexitatea aplicației $\frac{1}{p} \to \lg N_p(\mathbf{f})$. Aceasta înseamnă că dacă $r, s, p \in I_\mathbf{f}$ și dacă

$$\frac{1}{p} = \frac{t}{r} + \frac{1-t}{s} \text{ cu } 0 < t < 1,$$

atunci

$$\lg N_p(\mathbf{f}) \leqslant t \lg N_r(\mathbf{f}) + (1-t) \lg N_s(\mathbf{f}).$$

Pentru aceasta să presupunem mai întîi că $+\infty \notin I_f$, deci $1 \leqslant r < p < s < +\infty$.

Să punem $\alpha = \frac{r}{tp}$ și $\beta = \frac{s}{(1-t)p}$. Avem $\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = 1$ și $1 \leqslant \alpha, \beta < +\infty$. Aplicînd inegalitatea lui Hölder obținem

$$\int^* |f|^p \, d\mu = \int^* |f|^{tp} \, |f|^{(1-t)p} \, d\mu = \int^* |f|^{\frac{r}{\alpha}} |f|^{\frac{s}{\beta}} \, d\mu \leqslant$$

$$\leqslant N_\alpha (|f|^{\frac{r}{\alpha}}) \, N_\beta (|f|^{\frac{s}{\beta}}) = \left(\int^* |f|^r \, d\mu\right)^{\frac{1}{\alpha}} \left(\int^* |f|^s \, d\mu\right)^{\frac{1}{\beta}} =$$

$$= \left(\int^* |f|^r \, d\mu\right)^{\frac{1}{r} tp} \left(\int^* |f|^s \, d\mu\right)^{\frac{1}{s}(1-t)p}$$

adică

$$N_p(f)^p \leqslant N_r(f)^{tp} \, N_s(f)^{(1-t)p}$$

de unde

$$N_p(f) \leqslant N_r(f)^t \, N_s(f)^{(1-t)}$$

deci

$$\lg N_p(f) \leqslant t \lg N_r(f) + (1-t) \lg N_s(f).$$

Dacă $+\infty \in I_f$ și $s = +\infty$, și dacă $\frac{1}{p} = \frac{t}{r} + \frac{(1-t)}{s} = \frac{t}{r}$, $0 < t < 1$, atunci, ca în propoziția precedentă, avem

$$\int^* |f|^p \, d\mu \leqslant \int^* |f|^r \, d\mu \, [N_\infty (f)]^{p-r} < +\infty$$

adică

$$N_p(f)^p \leqslant N_r(f)^r \, N_\infty(f)^{p-r}$$

de unde

$$N_p(f) \leqslant N_r(f)^{\frac{r}{p}} \, N_\infty(f)^{\frac{p-r}{p}} = N_r(f)^t \, N_\infty(f)^{1-t}$$

și deci, de asemenea,

$$\lg N_p(f) \leqslant t \lg N_r(f) + (1-t) \lg N_\infty(f).$$

Așadar, funcția $\lg N_p(f)$ este convexă în raport cu variabila $\frac{1}{p}$, (cînd p parcurge I_f). De aici rezultă continuitatea lui $\lg N_p(f)$ ca funcție de $\frac{1}{p}$ deci și ca funcție de p. Atunci $N_p(f) = e^{\lg N_p(f)}$ este de asemenea funcție continuă de p. Propoziția este astfel demonstrată.

Propoziția 8. *Dacă măsura μ este mărginită și dacă $1 \leqslant r < s \leqslant +\infty$, atunci $\mathcal{F}_E^s \subset \mathcal{F}_E^r$ și $\mathcal{L}_E^s \subset \mathcal{L}_E^r$, iar topologia convergenței în medie de ordin s este mai fină decît topologia convergenței în medie de ordin p (pe $\mathcal{F}_E^s$).*

Propoziția este evident adevărată dacă $\mu = 0$. Vom presupune deci $\mu \neq 0$, adică $0 < \mu(T) < +\infty$. Fie p un număr astfel încît

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{s} + \frac{1}{p}.$$

Rezultă că $1 \leqslant r \leqslant p < +\infty$. Să notăm $\frac{1}{\alpha} = \frac{r}{s}$ și $\frac{1}{\beta} = \frac{r}{p}$. Avem $1 \leqslant \alpha,\ \beta \leqslant +\infty$ și $\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = 1$. Pentru orice funcție $\mathbf{f}: T \to E$, aplicînd inegalitatea lui Hölder obținem:

$$\int^* |\mathbf{f}|^r \, d\mu = \int^* |\mathbf{f}|^r \, 1 \, d\mu \leqslant N_\alpha(|\mathbf{f}|^r)\, N_\beta(1)$$

de unde

$$\left(\int^* |\mathbf{f}|^r \, d\mu\right)^{\frac{1}{r}} \leqslant N_\alpha(|\mathbf{f}|^r)^{\frac{1}{r}}\, N_\beta(1)^{\frac{1}{r}}$$

adică

$$N_r(\mathbf{f}) \leqslant N_\alpha(|\mathbf{f}|^r)^{\frac{1}{r}}\, \mu(T)^{\frac{1}{\beta r}}.$$

Dacă $s < +\infty$, atunci $\alpha < +\infty$, deci

$$N_r(\mathbf{f}) \leqslant \left(\int^* |\mathbf{f}|^{\alpha r} \, d\mu\right)^{\frac{1}{\alpha r}} \mu(T)^{\frac{1}{\beta r}} = \left(\int^* |\mathbf{f}|^s \, d\mu\right)^{\frac{1}{s}} \mu(T)^{\frac{1}{p}} =$$

$$= N_s(\mathbf{f})\, \mu(T)^{\frac{1}{r} - \frac{1}{s}}$$

de unde

$$\mu(T)^{-\frac{1}{r}} N_r(\mathbf{f}) \leqslant \mu(T)^{-\frac{1}{s}} N_s(\mathbf{f}).$$

Această relație rămîne adevărată și pentru $s = +\infty$, deoarece în acest caz $\alpha = +\infty$, deci $\beta = 1$ și

$$N_r(\mathbf{f}) \leqslant N_\infty(|\mathbf{f}|^r)^{\frac{1}{r}}\, \mu(T)^{\frac{1}{r}} = N_\infty(\mathbf{f})\, \mu(T)^{\frac{1}{r}}$$

de unde

$$\mu(T)^{-\frac{1}{r}}\, N_r(\mathbf{f}) \leqslant N_\infty(\mathbf{f}) = \mu(T)^{-\frac{1}{\infty}} N_\infty(\mathbf{f}).$$

Din inegalitatea

$$\mu(T)^{-\frac{1}{r}}\, N_r(\mathbf{f}) \leqslant \mu(T)^{-\frac{1}{s}}\, N_r(\mathbf{f})$$

rezultă că $\mathcal{F}_E^s \subset \mathcal{F}_E^r$ și de asemenea că $\mathcal{L}_E^s \subset \mathcal{L}_E^r$. Dacă $(\mathbf{f}_n)$ este un șir de funcții din $\mathcal{L}_E^s$, convergent în medie de ordin s către o funcție $\mathbf{f} \in \mathcal{F}_E^s$, din inegalitatea precedentă rezultă că $(\mathbf{f}_n)$ converge către $\mathbf{f}$ și în medie de ordin r, deci, pe $\mathcal{F}_E^s$, topologia convergenței în medie de ordin s este mai fină decît topologia convergenței în medie de ordin r.

Corolar. *Dacă* μ *este mărginită, și* $\mathbf{f}: T \to E$, *mulțimea* $I_{\mathbf{f}} = \{p \mid 1 \leqslant p \leqslant +\infty,\ N_p(\mathbf{f}) < +\infty\}$ *este sau vidă sau este un interval din* $\overline{\mathbf{R}}$, *care conține punctul* 1. *Dacă* $I_{\mathbf{f}}$ *nu este vid (și nu se reduce la un punct), funcția* $p \to \mu(T)^{-\frac{1}{p}} N_p(\mathbf{f})$ *este crescătoare pe* $I_{\mathbf{f}}$.

Propoziția 9. *Fie* T *un spațiu discret și* μ *măsura definită prin masa* $+1$ *în fiecare punct din* T. *Dacă* $1 \leqslant r < s \leqslant +\infty$, *atunci* $\mathcal{F}_E^r \subset \mathcal{F}_E^s$ *și* $\mathcal{L}_E^r \subset \mathcal{L}_E^s$ *iar topologia convergenței în medie de ordin* r *este mai fină decît topologia convergenței în medie de ordin* s *(pe* $\mathcal{F}_E^r$*).*

Să presupunem mai întîi că $s = +\infty$, și să arătăm că $N_\infty(\mathbf{f}) \leqslant N_r(\mathbf{f})$ oricare ar fi funcția $\mathbf{f}: T \to E$. Într-adevăr, dacă

$$\alpha < N_\infty(\mathbf{f}) = \|\mathbf{f}\| = \sup_{t \in T} |\mathbf{f}(t)|$$

există un punct $t_0 \in T$ cu $|\mathbf{f}(t_0)| > \alpha$. Atunci

$$N_r(\mathbf{f}) = \left(\int^* |\mathbf{f}(t)|^r \, d\mu\right)^{\frac{1}{r}} = \left(\sum_{t \in T} |\mathbf{f}(t)|^r\right)^{\frac{1}{r}} \geqslant$$

$$\geqslant (|\mathbf{f}(t_0)|^r)^{\frac{1}{r}} = |\mathbf{f}(t_0)| > \alpha$$

de unde $N_r(\mathbf{f}) \geqslant N_\infty(\mathbf{f})$.

Să presupunem acum $1 \leqslant r < s < +\infty$. Atunci

$$\int^* |\mathbf{f}|^s \, d\mu = \int |\mathbf{f}|^r \, |\mathbf{f}|^{s-r} \, d\mu \leqslant N_1(|\mathbf{f}|^r) \, N_\infty(|\mathbf{f}|^{s-r})$$

dar

$$N_\infty(|\mathbf{f}|^{s-r}) = N_\infty(|\mathbf{f}|^r)^{\frac{s-r}{r}} \leqslant N_1(|\mathbf{f}|^r)^{\frac{s-r}{r}}$$

deci

$$\int^* |\mathbf{f}|^s \, d\mu \leqslant N_1(|\mathbf{f}|^r) \, N_1(|\mathbf{f}|^r)^{\frac{s-r}{r}} = N_1(|\mathbf{f}|^r)^{\frac{s}{r}} =$$

$$= \left(\int^* |\mathbf{f}|^r \, d\mu\right)^{\frac{s}{r}}$$

de unde

$$\left(\int^* |\mathbf{f}|^s \, d\mu\right)^{\frac{1}{s}} \leqslant \left(\int^* |\mathbf{f}|^r \, d\mu\right)^{\frac{1}{r}}.$$

adică

$$N_s(\mathbf{f}) \leqslant N_r(\mathbf{f}).$$

Așadar inegalitatea

$$N_s(\mathrm{f}) \leqslant N_r(\mathrm{f})$$

este valabilă oricum ar fi s. Din această inegalitate rezultă propoziția de demonstrat.

Corolar. *Dacă T este discret și dacă μ este măsura definită prin masa $+1$ în fiecare punct din T, atunci pentru orice funcție $\mathrm{f}: T \to E$, mulțimea $I_\mathrm{f} = \{p \mid 1 \leqslant p \leqslant +\infty,\ N_p(\mathrm{f}) < +\infty\}$ este sau vidă sau este un interval din $\bar{R}$, care conține punctul $+\infty$. Dacă I_f nu este vidă (și nu se reduce la un punct), funcția $p \to N_p(\mathrm{f})$ este descrescătoare pe I_f.*

PARTEA A DOUA

MĂSURI DEFINITE PRIN DENSITĂȚI

§ 15. FUNCȚII LOCAL INTEGRABILE. MĂSURI DEFINITE PRIN DENSITĂȚI

1. Funcții local integrabile

Fie μ o măsură pozitivă și E un spațiu Banach.

Definiția 1. *Spunem că o funcție* $\mathbf{f}$ *definită pe* T *cu valori în* E *sau în* $\overline{R}$ *este local integrabilă în raport cu* μ, *sau local* μ *-integrabilă dacă funcția* $f\varphi_K$ *este* μ *-integrabilă oricare ar fi mulțimea compactă* $K \subset T$.

A spune că $\mathbf{f}$ este *local* μ *-integrabilă*, înseamnă că $\mathbf{f}$ este μ *-măsurabilă* și că

$$\int_K^* |\mathbf{f}|\, d\mu < \infty, \text{ pentru oricare mulțime compactă } K \subset T.$$

Exemple. 1°. Orice funcție $\mathbf{f}$ din $\mathcal{L}_E^p(\mu)$ cu $1 \leqslant p \leqslant \infty$ este local μ -integrabilă.

Într-adevăr, pentru orice mulțime compactă $K \subset T$ funcția φ_K aparține spațiului $\mathcal{L}^q(\mu)$ cu $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, deci funcția $\mathbf{f}\varphi_K$ este μ-integrabilă.

2°. Orice funcție μ-măsurabilă și esențial mărginită pe orice mulțime compactă este local integrabilă.

Dacă $\mathbf{m}$ este o măsură majorată, spunem că o funcție este local $\mathbf{m}$-integrabilă, dacă este local $|\mathbf{m}|$ -integrabilă.

Orice funcție egală aproape peste tot cu o funcție local μ -integrabilă, este de asemenea local μ -integrabilă.

O funcție $\mathbf{f}$ definită μ -aproape peste tot pe T cu valori în E sau în $\overline{R}$ va fi numită, de asemenea, funcție local μ -integrabilă, dacă este egală μ -aproape peste tot cu o funcție $\mathbf{f}'$ local μ -integrabilă, definită pe întreg spațiul T.

Dacă T este compact, sau dacă măsura μ are suportul compact, noțiunea de funcție local μ -integrabilă coincide cu aceea de funcție μ -integrabilă.

Dacă $\mathbf{f}$ este local μ -integrabilă, atunci funcția $|\mathbf{f}|$ este local μ -integrabilă.

Reciproc, dacă $\mathbf{f}$ este μ *-măsurabilă* și dacă $|\mathbf{f}|$ este local μ -integrabilă, atunci $\mathbf{f}$ este local μ -integrabilă.

Așadar, a spune că $\mathbf{f}$ este local μ -integrabilă, înseamnă că $\mathbf{f}$ este μ -măsurabilă și că funcția pozitivă $|\mathbf{f}|$ este local μ -integrabilă.

Observație. Dacă funcțiile f și g au valori în $\bar{R}$ și sînt local μ -integrabile, atunci ele sînt finite aproape peste tot, deci suma $f + g$ este definită μ -aproape peste tot.

Propoziția 1. *O funcție* $\mathbf{f}$ *definită pe* T *cu valori în* E *sau în* $\bar{R}$ *este local* μ *-integrabilă dacă și numai dacă pentru orice funcție* $h \in \mathcal{K}(T)$, *funcția* $\mathbf{f}h$ *este* μ *-integrabilă.*

Să presupunem că $\mathbf{f}$ este local μ -integrabilă. Fie $h \in \mathcal{K}(T)$ și fie K suportul lui h. Funcția $\mathbf{f}\varphi_K$ este μ -integrabilă, iar $h \in \mathcal{L}^\infty(\mu)$, deci funcția $\mathbf{f}h = \mathbf{f}\varphi_K\, h$ este μ -integrabilă.

Reciproc, să presupunem că $\mathbf{f}h$ este μ -integrabilă pentru orice $h \in \mathcal{K}(T)$ și fie $K \subset T$ o mulțime compactă. Fie h_0 o funcție din $\mathcal{K}(T)$ egală cu 1 pe K. Funcția $\mathbf{f}h_0$ este μ -integrabilă iar $\varphi_K \in \mathcal{L}^\infty(\mu)$, deci funcția $\mathbf{f}\varphi_K = \mathbf{f}h_0\varphi_K$ este μ -integrabilă. Rezultă că $\mathbf{f}$ este local μ -integrabilă.

Propoziția 2. *Fie* E *și* F *două spații Banach și* $\mathbf{f} : T \to \mathcal{L}(E, F)$ *o funcție local* μ *-integrabilă. Atunci pentru orice funcție* $\mathbf{h} \in \mathcal{K}_E(T)$ *funcția* $\mathbf{fh} : T \to F$ *este* μ *-integrabilă.*

Într-adevăr, funcția $\mathbf{f}$ este μ -măsurabilă deci funcția $\mathbf{fh}$ este μ -măsurabilă. Pe de altă parte, funcția $|\mathbf{f}|$ este local μ -integrabilă și $|\mathbf{h}| \in \mathcal{K}(T)$ deci funcția $|\mathbf{f}|\,|\mathbf{h}|$ este μ -integrabilă. Atunci

$$\int^* |\mathbf{fh}|\, d\mu \leqslant \int^* |\mathbf{f}|\,|\mathbf{h}|\, d\mu < \infty.$$

Conform criteriului de integrabilitate, rezultă că funcția $\mathbf{fh}$ este μ -integrabilă.

Propoziția 3. *Dacă* $\mathbf{f}, \mathbf{g} : T \to E$ *sînt local* μ *-integrabile iar* α *este un scalar, atunci* $\mathbf{f} + \mathbf{g}$ *și* $\alpha\mathbf{f}$ *sînt local* μ *-integrabile.*

Proprietatea rezultă imediat din definiția 1.

În cazul funcțiilor scalare, această proprietate se precizează astfel:

Propoziția 4. *O funcție reală* f *este local* μ*-integrabilă dacă și numai dacă funcțiile* f^+ *și* f^- *sînt local* μ *-integrabile.*

Dacă f^+ și f^- sînt local μ -integrabile, atunci funcția $f = f^+ - f^-$ este local μ -integrabilă. Reciproc, dacă f este local μ -integrabilă, atunci funcția $|f|$ este local μ -integrabilă, deci și funcțiile $f^+ = \frac{1}{2}(|f| + f)$ și $f^- = \frac{1}{2}(|f| - f)$ sînt local μ -integrabile.

Propoziția 5. *O funcție complexă* $f = f_1 + if_2$ *este local* μ*-integrabilă, dacă și numai dacă* f_1 *și* f_2 *sînt local* μ *-integrabile.*

Într-adevăr, pentru orice mulțime compactă $K \subset T$ avem $f\varphi_K = f_1\varphi_K + if_2\varphi_K$ iar funcția $f\varphi_K$ este μ -integrabilă dacă și numai dacă funcțiile $f_1\varphi_K$ și $f_2\varphi_K$ sînt μ -integrabile.

Propoziția 6. *Fie* μ *și* ν *două măsuri pozitive. Dacă* $\mu \leqslant \nu$ *și dacă* $\mathbf{f} : T \to E$ *este o funcție local* ν *-integrabilă, atunci* $\mathbf{f}$ *este local* μ *-integrabilă.*

Proprietatea rezultă imediat din definiția 1.

Propoziția 7. *Fie* $\mathbf{m}$ *și* $\mathbf{n}$ *două măsuri majorate și* α *un scalar. Dacă funcția* $\mathbf{f}: T \to E$ *este local integrabilă în raport cu* $\mathbf{m}$ *și în raport cu* $\mathbf{n}$, *atunci* $\mathbf{f}$ *este local integrabilă în raport cu* $\mathbf{m} + \mathbf{n}$ *și în raport cu* $\alpha\mathbf{m}$.

Proprietatea rezultă din relațiile $|\mathbf{m} + \mathbf{n}| \leqslant |\mathbf{m}| + |\mathbf{n}|$ și $|\alpha\mathbf{m}| = |\alpha|\,|\mathbf{m}|$, folosind propoziția precedentă.

În cazul măsurilor scalare, această proprietate se precizează astfel:

Propoziția 8. *Fie* μ *și* ν *două măsuri pozitive. O funcție* $\mathbf{f}: T \to E$ *este local integrabilă în raport cu* $\mu + \nu$ *dacă și numai dacă* $\mathbf{f}$ *este local integrabilă în raport cu* μ *și în raport cu* ν.

Într-adevăr, $\mu \leqslant \mu + \nu$ și $\nu \leqslant \mu + \nu$.

Propoziția 9. *Fie* μ *o măsură reală. O funcție* $\mathbf{f}: T \to E$ *este local* μ*-integrabilă, dacă și numai dacă* $\mathbf{f}$ *este local integrabilă în raport cu* μ^+ *și în raport cu* μ^-.

Într-adevăr, $|\mu| = \mu^+ + \mu^-$, iar integrabilitatea locală în raport cu μ este echivalentă cu integrabilitatea locală în raport cu $|\mu|$.

Propoziția 10. *Fie* μ *și* ν *două măsuri reale. O funcție* $\mathbf{f}: T \to E$ *este local integrabilă în raport cu măsura complexă* $\mu + i\nu$ *dacă și numai dacă* $\mathbf{f}$ *este local integrabilă în raport cu* μ *și cu* ν.

Se folosesc **relațiile** $|\mu + i\nu| \leqslant |\mu| + |\nu|$ și $|\mu| \leqslant |\mu + i\nu|$, $|\nu| \leqslant |\mu + i\nu|$ și se aplică propoziția 6.

2. Măsuri definite prin densități local integrabile

Fie X, E și F trei spații Banach. Să presupunem că există o aplicație biliniară $(u, v) \to uv$ a lui $X \times E$ în F astfel încît $|uv| \leqslant |u|\,|v|$ pentru orice $u \in X$ și $v \in E$.

Putem avea, de exemplu, $X \subset \mathcal{L}(E, F)$ sau $E \subset \mathcal{L}(X, F)$.

Fie $\mathbf{m}: \mathcal{K}(T) \to X$ o *măsură majorată și* $\mathbf{g}: T \to E$ *o funcție local* $\mathbf{m}$*-integrabilă.*

Pentru orice funcție *reală* $\varphi \in \mathcal{K}(T)$, funcția $\mathbf{g}\varphi: T \to E$ este $\mathbf{m}$-integrabilă. Să notăm

$$\mathbf{n}(\varphi) = \int \varphi\mathbf{g}\,\mathbf{dm}, \text{ pentru } \varphi \in \mathcal{K}(T).$$

Funcția $|\mathbf{g}|$ este de asemenea local $|\mathbf{m}|$-integrabilă, deci pentru orice funcție reală $\varphi \in \mathcal{K}(T)$, funcția $\varphi|\mathbf{g}|$ este local $|\mathbf{m}|$-integrabilă. Să notăm

$$\nu(\varphi) = \int \varphi|\mathbf{g}|\,\mathrm{d}|\mathbf{m}|, \text{ pentru } \varphi \in \mathcal{K}(T).$$

Se verifică imediat că ν este o *funcțională liniară pozitivă* pe $\mathcal{K}(T)$, deci este o *măsură pozitivă* pe T.

De asemenea, aplicația $\mathbf{n} : \mathcal{K}(T) \to F$ este liniară și majorată de ν:

$$|\mathbf{n}(\varphi)| = \left|\int \varphi \mathbf{g}\, \mathrm{dm}\right| \leqslant \int |\varphi|\,|\mathbf{g}|\, \mathrm{d}|\mathbf{m}| = \nu(|\varphi|)$$

deci $\mathbf{n}$ este o măsură vectorială majorată și avem $|\mathbf{n}| \leqslant \nu$.

Definiția 2. *Fie* $\mathbf{m} : \mathcal{K}(T) \to X$ *o măsură majorată,* $\mathbf{g} : T \to E$ *o funcție local* $\mathbf{m}$ *-integrabilă și* $\mathbf{n} : \mathcal{K}(T) \to F$ *măsura definită prin egalitatea*

$$\mathbf{n}(\varphi) = \int \varphi \mathbf{g}\, \mathrm{dm}, \text{ pentru } \varphi \in \mathcal{K}(T).$$

Spunem că $\mathbf{n}$ *este măsura cu densitatea* $\mathbf{g}$ *și cu baza* $\mathbf{m}$, *sau că* $\mathbf{n}$ *este produsul măsurii* $\mathbf{m}$ *cu funcția local* $\mathbf{m}$*-integrabilă* $\mathbf{g}$ *și scriem*

$$\mathbf{n} = \mathbf{gm}.$$

Avem deci

$$\int \varphi \mathrm{d}(\mathbf{gm}) = \int \varphi \mathbf{g}\, \mathbf{dm}, \text{ pentru } \varphi \in \mathcal{K}(T).$$

Conform acestei definiții, măsura ν definită prin egalitatea

$$\nu(\varphi) = \int \varphi |\mathbf{g}|\, \mathrm{d}|\mathbf{m}|, \text{ pentru } \varphi \in \mathcal{K}(T)$$

este de bază $|\mathbf{m}|$ și densitate $|\mathbf{g}|$, adică

$$\nu = |\mathbf{g}|\,|\mathbf{m}|.$$

Inegalitatea $|\mathbf{n}| \leqslant \nu$ se scrie acum

$$|\mathbf{gm}| \leqslant |\mathbf{g}|\,|\mathbf{m}|.$$

Vom arăta că în anumite cazuri, avem chiar egalitatea $|\mathbf{gm}| = |\mathbf{g}|\,|\mathbf{m}|$. Anume:

1) Dacă μ este o măsură *scalară* și $\mathbf{g} : T \to E$ este o funcție *local* μ *-integrabilă*, avem (teorema 4, § 18).

$$|\mathbf{g}\mu| = |\mathbf{g}|\,|\mu|.$$

2) Dacă $\mathbf{m} : \mathcal{K}(T) \to E$ este *măsură majorată*, și g este o funcție *scalară local* $\mathbf{m}$ -integrabilă, avem (teorema 5, § 18)

$$|g\mathbf{m}| = |g|\,|\mathbf{m}|.$$

Observație. Egalitatea $\mathbf{n} = \mathbf{gm}$ se scrie adesea

$$\mathbf{dn}(t) = \mathbf{g}(t)\, \mathbf{dm}(t).$$

Atunci egalitatea $\nu = |\mathbf{g}|\,|\mathbf{m}|$ se scrie

$$\mathrm{d}\nu(t) = |\mathbf{g}(t)|\, \mathrm{d}|\mathbf{m}|(t).$$

Propoziția 11. *Fie* μ *o măsură scalară,* $\mathbf{g}: T \to \mathcal{L}(E, F)$ *o funcție local* μ *-integrabilă și* $\mathbf{g}\mu: \mathcal{K}(T) \to \mathcal{L}(E, F)$ *măsura produs. Avem*

$$\int \mathbf{f}\, \mathrm{d}(\mathbf{g}\mu) = \int \mathbf{f}\mathbf{g}\, \mathrm{d}\mu, \quad \textit{pentru orice } \mathbf{f} \in \mathcal{K}_E(T).$$

Observăm mai întîi că dacă $\mathbf{f} \in \mathcal{K}_E(T)$, atunci funcția $\mathbf{fg}$ este μ -integrabilă (propoziția 2), deci în egalitatea de mai sus ambele integrale au sens.

Să punem

$$\mathbf{m}(\mathbf{f}) = \int \mathbf{f}\mathbf{g}\, \mathrm{d}\mu, \quad \text{pentru } \mathbf{f} \in \mathcal{K}_E(T).$$

Se verifică ușor că $\mathbf{m}: \mathcal{K}_E(T) \to F$ este o aplicație liniară și majorată de $|\mathbf{g}|\,|\mu|$, deci este o măsură majorată.

Pentru orice $\varphi \in \mathcal{K}(T)$ și $x \in E$ avem (corolarul 1 al teoremei 1, § 8)

$$\mathbf{m}(\varphi)\, x = \mathbf{m}(\varphi x) = \int \varphi x\, \mathbf{g}\, \mathrm{d}\mu = x \int \varphi \mathbf{g}\, \mathrm{d}\mu = x \int \varphi\, \mathrm{d}(\mathbf{g}\mu)$$

deci

$$\mathbf{m}(\varphi) = \int \varphi\, \mathrm{d}(\mathbf{g}\mu), \quad \text{pentru } \varphi \in \mathcal{K}(T).$$

Rezultă că $\mathbf{m} = \mathbf{g}\mu$, deci

$$\int \mathbf{f}\, \mathrm{d}(\mathbf{g}\mu) = \int \mathbf{f}\mathbf{g}\, \mathrm{d}\mu, \quad \text{pentru } \mathbf{f} \in \mathcal{K}_E(T)$$

și propoziția este demonstrată.

În particular, propoziția este valabilă dacă g este o funcție *scalară* local μ -integrabilă.

3. Funcții operatoriale simplu măsurabile

Fie E și F două spații Banach și μ o măsură *pozitivă* pe T. Notăm cu $\mathcal{L}^*(E, F)$ spațiul aplicațiilor liniare ale lui E în F.

Definiția 3. *Spunem că o funcție* $\mathbf{f}: T \to \mathcal{L}^*(E, F)$ *este simplu* μ *-măsurabilă, dacă pentru orice* $x \in E$ *funcția* $t \to \mathbf{f}(t)x$ *(cu valori în* F*) este* μ *-măsurabilă.*

Dacă $\mathbf{m}$ este o măsură majorată, spunem că o funcție este simplu $\mathbf{m}$ -măsurabilă, dacă este simplu $|\mathbf{m}|$ -măsurabilă.

Dacă E este mulțimea scalarilor — adică dacă $\mathcal{L}^*(E, F) = F$ — atunci noțiunea de măsurabilitate simplă este identică cu aceea de măsurabilitate.

Orice funcție μ -măsurabilă $\mathbf{f}: T \to \mathcal{L}(E, F)$ este și simplu μ -măsurabilă.

Vom spune că o funcție $\mathbf{g}$ definită μ -aproape peste tot pe T, cu valori în $\mathcal{L}^*(E, F)$ este simplu μ -măsurabilă, dacă este egală aproape este tot cu o funcție simplu μ -măsurabilă, definită pe întreg spațiul T.

Dacă $\mathbf{f}$ și $\mathbf{g}$ sînt simplu μ -măsurabile iar α este un scalar, atunci și funcțiile $\mathbf{f} + \mathbf{g}$ și $\alpha\mathbf{f}$ sînt simplu μ -măsurabile.

Propoziția 12. *Dacă funcția* $\mathbf{f} : T \to \mathcal{L}^*(E, F)$ *este simplu* μ *-măsurabilă, atunci pentru orice funcție* μ *-măsurabilă* $\mathbf{h} : T \to E$ *funcția* $t \to \mathbf{f}(t)\,\mathbf{h}(t)$ *este* μ *-măsurabilă.*

Fie $K \subset T$ o mulțime compactă. Deoarece $\mathbf{h}$ este μ -măsurabilă, ea poate fi aproximată pe K prin funcțiie μ -măsurabile etajate de forma $\mathbf{h}_n = \sum \varphi_{A_i}\, x_i$, unde $x_i \in E$ iar (A_i) este o partiție finită a lui K în mulțimi μ -măsurabile. Atunci funcția $\mathbf{fh}$ se poate aproxima pe K prin funcțiile μ -măsurabile $\mathbf{fh}_n = \sum \varphi_{A_i}\, \mathbf{f}\, x_i$. Rezultă că funcția $\mathbf{fh}\varphi_K$ este μ -măsurabilă.

Conform principiului localizării, funcția $\mathbf{fh}$ este μ -măsurabilă.

Dacă funcția $\mathbf{f} : T \to \mathcal{L}^*(E, F)$ este μ -măsurabilă, atunci funcția pozitivă $t \to |\mathbf{f}(t)|$ este μ -măsurabilă. În anumite condiții această funcție este μ -măsurabilă chiar dacă $\mathbf{f}$ este simplu μ -măsurabilă.

Propoziția 13. *Dacă funcția* $\mathbf{f} : T \to \mathcal{L}^*(E, F)$ *este simplu* μ *-măsurabilă, și dacă pentru fiecare mulțime compactă* $K \subset T$ *există o mulțime numărabilă* $H \subset E$ *astfel încît să avem*

$$|\mathbf{f}(t)| = \sup_{x \in H} \frac{|\mathbf{f}(t)\, x|}{|x|}, \quad \mu \text{ -aproape peste tot pe } K,$$

atunci funcția $t \to |\mathbf{f}(t)|$ *este* μ *-măsurabilă.*

Într-adevăr, funcțiile $t \to \mathbf{f}(t)x$ sînt μ -măsurabile, deci funcțiile $t \to |\mathbf{f}(t)\, x|$ și $t \to \dfrac{|\mathbf{f}(t)\, x|}{|x|}$ sînt de asemenea μ -măsurabile. Atunci funcția $|\mathbf{f}|\varphi_K$ este μ -măsurabilă ca margine superioară a unei familii numărabile de funcții μ -măsurabile. Conform principiului localizării, funcția $|\mathbf{f}|$ este μ -măsurabilă.

Corolar. *Dacă* $\mathbf{f} : T \to \mathcal{L}^*(E, F)$ *este simplu* μ *-măsurabilă și dacă* E *este de tip numărabil, atunci funcția* $t \to |\mathbf{f}(t)|$ *este* μ *-măsurabilă.*

Propoziția 14. *Dacă* $\mathbf{f} : T \to \mathcal{L}(E, F)$ *este simplu* μ *-măsurabilă și dacă pentru orice mulțime compactă* $K \subset T$ *există o mulțime* μ *-neglijabilă* $N \subset K$ *și o mulțime numărabilă* $H \subset \mathcal{L}(E, F)$ *astfel încît* $\mathbf{f}(K - N) \subset H$, *atunci* $\mathbf{f}$ *este* μ *-măsurabilă.*

Pentru demonstrație a se vedea teorema 5, § 10.

Corolar. *Dacă* $\mathbf{f} : T \to \mathcal{L}(E, F)$ *este simplu* μ *-măsurabilă și dacă există o mulțime numărabilă* $H \subset \mathcal{L}(E, F)$ *astfel încît* $\mathbf{f}(T) \subset \overline{H}$, *atunci* $\mathbf{f}$ *este* μ *-măsurabilă.*

4. Funcții operatoriale simplu local integrabile

Fie E și F două spații Banach și μ o măsură pozitivă.

Definiția 4. *Spunem că o funcție* $\mathbf{f} : T \to \mathcal{L}^*(E, F)$, *este simplu local* μ *-integrabilă, dacă* $\mathbf{f}$ *este simplu* μ *-măsurabilă și dacă funcția pozitivă* $|\mathbf{f}|$ *este local* μ *-integrabilă.*

Aceasta înseamnă că pentru orice $x \in E$, funcția $t \to \mathbf{f}(t)x$ (cu valori în F) este μ -măsurabilă iar funcția $t \to |\mathbf{f}(t)|$ este μ -măsurabilă și pentru orice mulțime compactă $K \subset T$ avem

$$\int_K^* |\mathbf{f}| \, d\mu < \infty.$$

Rezultă că $|\mathbf{f}(t)| < \infty$ aproape peste tot, deci $\mathbf{f}(t) \in \mathcal{L}(E, F)$ aproape peste tot.

Dacă $\mathbf{f}$ este simplu local μ -integrabilă, atunci funcția $\mathbf{f}(t)x$ este local μ -integrabilă, oricare ar fi $x \in E$.

Dacă $\mathbf{m}$ este o măsură majorată, vom spune că o funcție este simplu local $\mathbf{m}$-integrabilă, dacă este simplu local $|\mathbf{m}|$ -integrabilă.

Orice funcție local μ -integrabilă $\mathbf{f} : T \to \mathcal{L}(E, F)$ este simplu local μ -integrabilă.

În cazul cînd E este mulțimea scalarilor, a spune că funcția $\mathbf{f} : T \to \mathcal{L}^*(E, F)$ este simplu local μ -integrabilă, înseamnă că funcția $\mathbf{f} : T \to F$ este local μ -integrabilă.

Dacă $\mathbf{f}$ este o funcție definită μ -aproape peste tot pe T cu valori în $\mathcal{L}^*(E, F)$, spunem că $\mathbf{f}$ este simplu local μ -integrabilă dacă este egală μ -aproape peste tot cu o funcție simplu local μ -integrabilă, definită pe întreg spațiul T.

Dacă $\mathbf{f}$ este simplu local μ -integrabilă, iar α este un scalar, atunci $\alpha\mathbf{f}$ este simplu local μ -integrabilă.

Suma $\mathbf{f} + \mathbf{g}$ a două funcții simplu local μ -integrabile nu este, în general, o funcție simplu local μ -integrabilă, deoarece, din faptul că $|\mathbf{f}|$ și $|\mathbf{g}|$ sînt μ -măsurabile, nu rezultă că $|\mathbf{f} + \mathbf{g}|$ este μ -măsurabilă.

Dacă $0 \leqslant \mu \leqslant \nu$ și dacă $\mathbf{f}$ este simplu local ν -integrabilă, atunci $\mathbf{f}$ este simplu local μ -integrabilă.

Propoziția 15. *Dacă funcția* $\mathbf{f} : T \to \mathcal{L}^*(E, F)$ *este simplu local* μ *-integrabilă, atunci funcția* $\mathbf{fh}$ *este* μ *-integrabilă, oricare ar fi funcția* $\mathbf{h} \in \mathcal{K}_E(T)$.

Fie $\mathbf{h} \in \mathcal{K}_E(T)$. Deoarece funcția $\mathbf{f}$ este simplu μ -măsurabilă, funcția $t \to \mathbf{f}(t)\mathbf{h}(t)$ este μ -măsurabilă. Deoarece funcția $|\mathbf{f}|$ este local μ -integrabilă avem

$$\int^* |\mathbf{fh}| \, d\mu \leqslant \int^* |\mathbf{f}| \, |\mathbf{h}| \, d\mu < \infty.$$

Așadar funcția $\mathbf{fh}$ este μ -integrabilă.

Observație. Să presupunem că funcția $\mathbf{f} : T \to \mathcal{L}^*(E, F)$ este simplu μ -măsurabilă și că $\int_K^* |\mathbf{f}| \, d\mu < \infty$ pentru orice mulțime compactă $K \subset T$.

În general funcția $\mathbf{f}$ nu este simplu local μ -integrabilă, deoarece funcția $|\mathbf{f}|$ nu este în general μ -măsurabilă.

În condițiile propoziției 13 rezultă că funcția $\mathbf{f}$ este simplu local μ -integrabilă.

În condițiile propoziției 14 rezultă chiar că $\mathbf{f}$ este local μ -integrabilă.

5. Măsuri definite prin densități simplu local integrabile

Fie E, F și G trei spații Banach, $\mathbf{m} : \mathcal{K}(T) \to \mathcal{L}(F, G)$ o *măsură majorată* și $\mathbf{g} : T \to \mathcal{L}^*(E, F)$ o funcție *simplu local* $\mathbf{m}$-*integrabilă*.

Atunci funcția $|\mathbf{g}|$ este local $\mathbf{m}$-integrabilă, deci se poate considera măsura $|\mathbf{g}|\,|\mathbf{m}|$.

Pentru orice funcție $\mathbf{f} \in \mathcal{K}_E(T)$, funcția $\mathbf{gf} : T \to F$ este $\mathbf{m}$-integrabilă. În particular, pentru orice funcție $\varphi \in \mathcal{K}(T)$ și $x \in E$ avem $\varphi x \in \mathcal{K}_E(T)$, deci funcția $\mathbf{g}x\varphi$ este $\mathbf{m}$-integrabilă. Să punem

$$\mathbf{n}(\varphi)x = \int \mathbf{g}x\,\varphi\,\mathbf{dm}, \text{ pentru } \varphi \in \mathcal{K}(T) \text{ și } x \in E.$$

Se verifică imediat că pentru fiecare $\varphi \in \mathcal{K}(T)$ aplicația $\mathbf{n}(\varphi) : x \to \mathbf{n}(\varphi)x$ a lui E în G este liniară și continuă :

$$|\mathbf{n}(\varphi)x| \leqslant \int |\mathbf{g}|\,|x|\,|\varphi|\,\mathrm{d}\,|\mathbf{m}| = |x| \int |\varphi|\,\mathrm{d}\,(|\mathbf{g}|\,|\mathbf{m}|)$$

deci

$$|\mathbf{n}(\varphi)| \leqslant \int |\varphi|\,\mathrm{d}\,(|\mathbf{g}|\,|\mathbf{m}|).$$

Se verifică de asemenea ușor că aplicația $\mathbf{n} : \mathcal{K}(T) \to \mathcal{L}(E, G)$ este liniară și majorată de măsura $|\mathbf{g}|\,|\mathbf{m}|$, deci $\mathbf{n}$ este o *măsură majorată* și $|\mathbf{n}| \leqslant |\mathbf{g}|\,|\mathbf{m}|$.

Se constată că dacă, de exemplu, $\mathbf{m}$ este o măsură *scalară* iar $\mathbf{g}$ este *local* $\mathbf{m}$-*integrabilă*, sau dacă $\mathbf{m}$ este o măsură majorată iar $\mathbf{g}$ este o măsură *scalară* local $\mathbf{m}$-integrabilă, măsura $\mathbf{n}$ definită mai sus este egală cu măsura produs $\mathbf{gm}$.

Într-adevăr, în fiecare din aceste cazuri, funcția $\mathbf{g}\varphi$ este $\mathbf{m}$-integrabilă, deci

$$\mathbf{n}(\varphi)x = \int \mathbf{g}x\,\varphi\,\mathbf{dm} = x \int \mathbf{g}\,\varphi\,\mathbf{dm} = x \int \varphi\,\mathrm{d}\,(\mathbf{gm})$$

de unde $\mathbf{n} = \mathbf{gm}$.

Prin extensiune, sîntem conduși la definiția următoare :

Definiția 5. *Fie* $\mathbf{m} : \mathcal{K}(T) \to \mathcal{L}(F, G)$ *o măsură majorată,* $\mathbf{g} : T \to \mathcal{L}^*(E, F)$ *o funcție simplu local* $\mathbf{m}$-*integrabilă și* $\mathbf{n} : \mathcal{K}(T) \to \mathcal{L}(E, G)$ *măsura definită prin egalitatea*

$$\mathbf{n}(\varphi)x = \int \mathbf{g}x\,\varphi\,\mathbf{dm}, \textit{ pentru } \varphi \in \mathcal{K}(T) \textit{ și } x \in E.$$

Spunem că $\mathbf{n}$ *este măsura cu densitatea* $\mathbf{g}$ *și cu baza* $\mathbf{m}$, *sau că* $\mathbf{n}$ *este produsul dintre măsura* $\mathbf{m}$ *și funcția simplu local* $\mathbf{m}$-*integrabilă* $\mathbf{g}$, *și scriem*

$$\mathbf{n} = \mathbf{gm}.$$

Avem deci

$$\int \varphi \, \mathrm{d}\,(\mathbf{gm})\, x = \int \mathbf{g}\, x\, \varphi \, \mathrm{d}\mathbf{m}, \text{ pentru } \varphi \in \mathcal{K}(T) \text{ și } x \in E.$$

Inegalitatea $|\mathbf{n}| \leqslant |\mathbf{g}|\,|\mathbf{m}|$ se scrie acum

$$|\mathbf{gm}| \leqslant |\mathbf{g}|\,|\mathbf{m}|.$$

În anumite cazuri avem chiar egalitatea $|\mathbf{gm}| = |\mathbf{g}|\,|\mathbf{m}|$.

În cazul cînd $\mathbf{g}$ este *local* $\mathbf{m}$-*integrabilă* iar $E = R$, deci $\mathcal{L}(E, F) = F$, produsul $\mathbf{gm}$ în sensul definiției 5 coincide cu produsul $\mathbf{gm}$ în sensul definiției 2.

Observație. Pentru orice $x \in E$, funcția $\mathbf{g}x : T \to F$ este local $\mathbf{m}$-integrabilă, deci se poate considera produsul $(\mathbf{g}x)\,\mathbf{m}$. Avem atunci

$$\int \varphi \, \mathrm{d}\,[(\mathbf{g}x)\,\mathbf{m}] = \int \varphi\, \mathbf{g}\, x \, \mathrm{d}\mathbf{m} = \int \varphi \, \mathrm{d}\,(\mathbf{gm}) \cdot x$$

pentru $\varphi \in \mathcal{K}(T)$ și $x \in E$, deci $(\mathbf{g}x)\,\mathbf{m} = x \cdot (\mathbf{gm})$.

Propoziția 16. *Fie* $\mathbf{m} : \mathcal{K}(T) \to \mathcal{L}(F, G)$ *o măsură majorată,* $\mathbf{g} : T \to \mathcal{L}^*(E, F)$ *o funcție simplu local* $\mathbf{m}$*-integrabilă și măsura* $\mathbf{gm} : \mathcal{K}(T) \to \mathcal{L}(E, G)$. *Avem atunci*

$$\int \mathbf{f}\, \mathrm{d}\,(\mathbf{gm}) = \int \mathbf{f}\mathbf{g}\, \mathrm{d}\mathbf{m}, \text{ *pentru* } \mathbf{f} \in \mathcal{K}_E(T).$$

Observăm mai întîi că pentru $\mathbf{f} \in \mathcal{K}_E(T)$, funcția $\mathbf{fg} : T \to F$ este $\mathbf{m}$-integrabilă, deci în egalitatea precedentă ambele integrale au sens.

Pentru orice $\varphi \in \mathcal{K}(T)$ și orice $x \in E$ avem $\varphi x \in \mathcal{K}_E(T)$. Notînd $\mathbf{n} = \mathbf{gm}$, avem

$$\mathbf{n}(\varphi)\, x = \mathbf{n}(\varphi x) = \int \varphi\, x\, \mathbf{g}\, \mathrm{d}\mathbf{m}.$$

Atunci, pentru orice funcție de forma

$$\mathbf{f} = \sum_{i=1}^{n} \varphi_i\, x_i \quad \text{cu} \quad \varphi_i \in \mathcal{K}(T) \text{ și } x_i \in E$$

avem

$$\mathbf{n}(\mathbf{f}) = \int \mathbf{f}\mathbf{g}\, \mathrm{d}\mathbf{m}.$$

Fie acum $\mathbf{f} \in \mathcal{K}_E(T)$ o funcție oarecare. Există atunci un șir $(\mathbf{f}_n)$ de combinații liniare de forma precedentă, cu suporturile conținute într-o aceeași mulțime compactă, și uniform convergent către $\mathbf{f}$. Atunci

$$\lim_{n \to \infty} \mathbf{n}(\mathbf{f}_n) = \mathbf{n}(\mathbf{f}).$$

Pe de altă parte, funcțiile $\mathbf{gf}_n$ și $\mathbf{gf}$ sînt $\mathbf{m}$-integrabile, au suporturile conținute într-o mulțime compactă iar șirul $(\mathbf{gf}_n)$ tinde uniform către $\mathbf{gf}$, deci

$$\lim_{n\to\infty} \int \mathbf{f}_n \mathbf{g}\, d\mathbf{m} = \int \mathbf{f}\mathbf{g}\, d\mathbf{m}.$$

Cum pentru fiecare n avem

$$\mathbf{n}(\mathbf{f}_n) = \int \mathbf{f}_n \mathbf{g}\, d\mathbf{m},$$

prin trecerea la limită obținem

$$\mathbf{n}(\mathbf{f}_n) = \int \mathbf{f}_n \mathbf{g}\, d\mathbf{m},$$

și propoziția este demonstrată.

6. Funcții operatoriale slab măsurabile

Fie E și F două spații Banach, Z un subspațiu vectorial al lui F' și μ o măsură *pozitivă* pe T. Vom spune că Z este o mulțime *normantă* (pentru F) dacă

$$|y| = \sup_{z\in Z} \frac{|<y, z>|}{z} \quad \text{pentru orice } y \in F.$$

Definiția 6. *Spunem că o funcție* $\mathbf{u} : T \to \mathcal{L}(E, F)$ *este* Z*- slab* μ*- măsurabilă, dacă pentru orice* $x \in E$ *și orice* $z \in Z$ *funcția scalară* $t \to <\mathbf{u}(t)x, t>$ *este* μ*-măsurabilă.*

Funcțiile F'-slab măsurabile vor fi numite, mai simplu, slab măsurabile.

A spune că funcția $\mathbf{u}$ este Z-slab μ-măsurabilă, înseamnă că pentru orice $z \in Z$ funcția compusă $z \circ \mathbf{u} : T \to \mathcal{L}(E, C)$ este simplu μ- măsurabilă.

Evident, o funcție slab măsurabilă este Z-slab măsurabilă oricare ar fi subspațiul $Z \subset F'$.

Dacă $\mathbf{m}$ este o măsură majorată, spunem că o funcție este slab $\mathbf{m}$-măsurabilă, dacă este slab $|\mathbf{m}|$-măsurabilă.

Dacă E este mulțimea scalarilor, a spune că funcția operatorială $\mathbf{u} : T \to \mathcal{L}(E, F)$ este Z -slab μ-măsurabilă înseamnă că funcția vectorială $\mathbf{u} : T \to F$ este Z-slab μ-măsurabilă, adică $t \to <\mathbf{u}(t), z>$ este μ -măsurabilă pentru orice $z \in Z$.

Dacă F este mulțimea scalarilor, a spune că funcția $\mathbf{u} : T \to \mathcal{L}(E, F) = E'$ este E-slab μ-măsurabilă înseamnă că funcția $\mathbf{u}$ este simplu μ-măsurabilă, adică $t \to <x, \mathbf{u}(t)>$ este μ -măsurabilă oricare ar fi $x \in E$.

Dacă $\mathbf{u}$ și $\mathbf{v}$ sînt Z-slab μ-măsurabile, iar α este un scalar, atunci $\mathbf{u} + \mathbf{v}$ și $\alpha\mathbf{u}$ sînt Z-slab μ-măsurabile.

A spune că $\mathbf{u} : T \to \mathcal{L}^*(E, F)$ este Z -slab μ -măsurabilă, înseamnă că pentru orice $x \in E$, funcția $t \to \mathbf{u}(t)x$ cu valori în F, este Z-slab μ-măsurabilă.

Propoziția 17. *Dacă funcția* $\mathbf{u} : T \to \mathcal{L}^*(E, F)$ *este* Z*-slab* μ*-măsurabilă, atunci pentru orice funcții* μ*-măsurabile* $\mathbf{f} : T \to E$ *și* $\mathbf{h} : T \to Z$, *funcția scalară* $t \to < \mathbf{u}(t)\,\mathbf{f}(t), \mathbf{h}(t) >$ *este* μ*-măsurabilă.*

Fie $x \in Z$. Pentru orice funcție boreliană etajată $\mathbf{f} = \sum \varphi_{A_i} x_i$ cu suport compact, avem

$$< \mathbf{u}\,\mathbf{f}, z > = \sum \varphi_{A_i} < \mathbf{u}\, x_i, z >$$

deci funcția $< \mathbf{u}\,\mathbf{f}, z >$ este μ-măsurabilă.

Să presupunem că $\mathbf{f} : T \to E$ este o funcție μ-măsurabilă oarecare. Fie $K \subset T$ o mulțime compactă. Există un șir de funcții boreliene etajate $\mathbf{f}_n : T \to E$, cu suportul conținut în K, astfel încît $\mathbf{f}_n(t) \to \mathbf{f}(t)$, μ-aproape peste tot pe K. Atunci

$$< \mathbf{u}(t)\mathbf{f}_n(t), z > \to < \mathbf{u}(t)\mathbf{f}(t), z >$$

μ-aproape peste tot pe K. Deoarece funcțiile $< \mathbf{u}\,\mathbf{f}_n, z >$ sînt μ-măsurabile, rezultă că funcția $< \mathbf{u}\mathbf{f}, z > \varphi_K$ este μ-măsurabilă.

Conform principiului localizării, funcția $< \mathbf{u}\,\mathbf{f}, z > \varphi_K$ este μ-măsurabilă.

Se arată apoi că funcția $< \mathbf{u}\,\mathbf{f}, \mathbf{h} >$ este μ-măsurabilă, mai întîi pentru funcții etajate de forma $\mathbf{h} = \sum \varphi_{A_i} z_i$ cu A_i boreliene și $z_i \in Z$ și apoi pentru funcții μ-măsurabile oarecare $\mathbf{h} : T \to Z$.

Observație. Dacă funcția $\mathbf{u} : T \to \mathcal{L}^*(E, F)$ este slab μ-măsurabilă iar funcția $\mathbf{f} : T \to E$ este μ-măsurabilă, nu rezultă că funcțiile $t \to \mathbf{u}(t)\mathbf{f}(t)$ și $t \to |\mathbf{u}(t)\mathbf{f}(t)|$ sînt μ-măsurabile.

În anumite condiții, ultima funcție este μ-măsurabilă.

Propoziția 18. *Fie* $\mathbf{f} : T \to F$ *o funcție* Z*-slab* μ*-măsurabilă. Dacă pentru fiecare mulțime compactă* $K \subset T$ *există o mulțime numărabilă* $S \subset Z$ *astfel încît să avem*

$$|\mathbf{f}(t)| = \sup_{s \in S} \frac{|< \mathbf{f}(t), s >|}{|s|}, \text{ aproape pentru orice } t \in K,$$

atunci funcția $|\mathbf{f}|$ *este* μ*-măsurabilă.*

Într-adevăr, pentru fiecare $s \in S$, funcția $t \to < \mathbf{f}(t), s >$ este μ-măsurabilă, deci funcția $t \to \dfrac{|< \mathbf{f}(t), s >|}{|s|}$ este μ-măsurabilă. Din ipoteză rezultă că pentru orice mulțime compactă $K \subset T$ funcția $|\mathbf{f}|\,\varphi_K$ este egală aproape peste tot cu marginea superioară a unei familii numărabile de funcții μ-măsurabile, deci $|\mathbf{f}|\varphi_K$ este μ-măsurabilă și deci $|\mathbf{f}|$ este μ-măsurabilă.

Corolar. *Dacă există o mulțime numărabilă* $S \subset Z$ *normantă pentru* F *și dacă* $\mathbf{f} : T \to F$ *este* Z*-slab* μ*-măsurabilă, atunci funcția* $|\mathbf{f}|$ *este* μ*-măsurabilă.*

Propoziția 19. *Să presupunem că există o mulțime numărabilă* $S \subset Z$ *normantă pentru* F. *Dacă funcția* $\mathbf{u} : T \to \mathcal{L}^*(E, F)$ *este* Z*-slab* μ*-măsurabilă, atunci pentru orice funcție* μ*-măsurabilă* $\mathbf{f} : T \to E$ *funcția* $t \to |\mathbf{u}(t)\mathbf{f}(t)|$ *este* μ*-măsurabilă.*

Într-adevăr, pentru fiecare funcție μ-măsurabilă $\mathbf{f}: T \to E$ și orice $z \in Z$, funcția $t \to < \mathbf{u}(t)\,\mathbf{f}(t), z >$ este μ-măsurabilă, deci funcția $t \to \mathbf{u}(t)\,\mathbf{f}(t)$ este Z-slab μ-măsurabilă și se aplică propoziția 18.

În particular, condițiile propoziției 19 sînt îndeplinite în următoarele cazuri:

1° Z este un spațiu Banach de tip numărabil și $F = Z'$;

2° F' este de tip numărabil și $Z = F'$;

3° F este de tip numărabil și $Z = F'$.

În ultimul caz avem mai mult (corolarul 3 al teoremei 5, § 10):

Propoziția 20. *Dacă F este de tip numărabil, atunci orice funcție slab μ-măsurabilă $\mathbf{u}: T \to \mathcal{L}^*(E, F)$ este simplu μ-măsurabilă.*

În anumite condiții, chiar funcția $|\mathbf{u}|$ este μ-măsurabilă.

Propoziția 21. *Fie $\mathbf{u}: T \to \mathcal{L}^*(E, F)$ o funcție Z-slab μ-măsurabilă. Să presupunem că Z este normant pentru F. Dacă există o ridicare ρ a lui $\mathcal{L}^\infty(\mu)$ astfel ca $\rho[\mathbf{u}] = \mathbf{u}$, atunci:*

1) *funcția $t \to |\mathbf{u}(t)|$ este μ-măsurabilă;*

2) *funcția $t \to |\mathbf{u}(t)\,x|$ este μ-măsurabilă, oricare ar fi $x \in E$;*

3) *dacă, în plus, $\mathbf{u}$ are valori în $\mathcal{L}(E, F)$, funcția $t \to |\mathbf{u}(t)\,\mathbf{f}(t)|$ este μ-măsurabilă, oricare ar fi funcția μ-măsurabilă $\mathbf{f}: T \to E$.*

Afirmațiile 1) și 2) rezultă din propoziția 7, § 13 și corolarul său. Afirmația 3) rezultă din lema următoare:

Lemă. *Fie $\mathbf{u}: T \to \mathcal{L}(E, F)$ o funcție astfel încît funcția $t \to |\mathbf{u}(t)\,x|$ este μ-măsurabilă pentru orice $x \in E$. Atunci pentru orice funcție μ-măsurabilă $\mathbf{f}: T \to E$, funcția $t \to |\mathbf{u}(t)\,\mathbf{f}(t)|$ este μ-măsurabilă.*

Fie mai întîi $\mathbf{f} = \sum_{i=1}^{n} \varphi_{A_i}\, x_i$ o funcție etajată boreliană cu $x_i \in E$. Putem presupune mulțimile A_i disjuncte. În acest caz avem

$$|\mathbf{u}(t)\,\mathbf{f}_n(t)| = \sum_{i=1}^{n} \varphi_{A_i}(t)\,|\mathbf{u}(t)\,x_i|$$

deci $|\mathbf{u}\mathbf{f}|$ este μ-măsurabilă.

Fie acum $\mathbf{f}: T \to E$ o funcție μ-măsurabilă oarecare și $K \subset T$ o mulțime compactă. Există o mulțime μ-neglijabilă $N \subset K$ și un sir $(\mathbf{f}_n)$ de funcții boreliene etajate care tinde către $\mathbf{f}$ pe $K - N$. Atunci

$$\mathbf{u}(t)\,\mathbf{f}_n(t) \to \mathbf{u}(t)\,\mathbf{f}(t), \text{ pentru } t \in K - N$$

deci

$$|\mathbf{u}(t)\mathbf{f}_n(t)| \to |\mathbf{u}(t)\,\mathbf{f}(t)|, \text{ pentru } t \in K - N.$$

Urmează că funcția $|\mathbf{uf}|$ este μ-măsurabilă.

Propoziția 22. *Să presupunem că E este de tip numărabil și că există o mulțime numărabilă $S \subset Z$ normantă pentru F.*

Atunci pentru orice funcție Z-slab μ-măsurabilă $\mathbf{u}: T \to \mathcal{L}^*(E, F)$, funcția $|\mathbf{u}|$ este μ-măsurabilă.

Din propoziția 13 rezultă că pentru orice $x \in E$ funcția $t \to |\mathbf{u}(t)x|$ este μ-măsurabilă. Dacă (x_n) este un șir dens în E, avem

$$|\mathbf{u}(t)| = \sup_n \frac{|\mathbf{u}(t)x_n|}{|x_n|}$$

deci $|\mathbf{u}|$ este μ-măsurabilă.

În particular, condițiile propoziției 22 sînt îndeplinite în următoarele cazuri:

1° E este de tip numărabil, Z este un spațiu Banach de tip numărabil și $F = Z'$;

2° E este de tip numărabil, F' este de tip numărabil și $Z = F'$;

3° E este de tip numărabil, F este de tip numărabil și $Z = F'$.

Observație. În condițiile propoziției 22, funcția $t \to |\mathbf{u}(t)\mathbf{f}(t)|$ este de asemenea μ-măsurabilă oricare ar fi funcția μ-măsurabilă $\mathbf{f}: T \to E$.

În cazul 3°, funcția $\mathbf{u}$ este chiar simplu μ-măsurabilă.

7. Funcții operatoriale slab local integrabile

Fie E și F două spații Banach, $Z \subset F'$ un spațiu vectorial și μ o măsură *pozitivă*.

Definiția 7. *Spunem că o funcție* $\mathbf{u}: T \to \mathcal{L}^*(E, F)$ *este* Z*-slab local* μ*-integrabilă dacă* u *este* Z*-slab* μ*-măsurabilă și dacă funcția* $t \to |\mathbf{u}(t)|$ *este local* μ*-integrabilă.*

Dacă $\mathbf{m}$ este o măsură majorată, spunem că funcția $\mathbf{u}$ este Z-slab local $\mathbf{m}$-integrabilă, dacă $\mathbf{u}$ este Z-slab local $|\mathbf{m}|$-integrabilă.

Din definiția 5 rezultă că dacă $\mathbf{u}$ este slab local μ-integrabilă avem $|\mathbf{u}(t)| < \infty$ deci $\mathbf{u}(t) \in \mathcal{L}(E, F)$, μ-aproape peste tot.

Orice funcție simplu local μ-integrabilă este slab local μ-integrabilă.

Dacă $0 \leqslant \mu \leqslant \nu$ și dacă $\mathbf{u}$ este Z-slab local ν-integrabilă, atunci $\mathbf{u}$ este Z-slab local μ-integrabilă.

Suma a două funcții Z-slab local μ-integrabile poate să nu fie Z-slab local μ-integrabilă.

Propoziția 23. *Dacă funcția* $\mathbf{u}: T \to \mathcal{L}^*(E, F)$ *este* Z*-slab local* μ*-integrabilă, atunci pentru orice funcție* $\mathbf{f} \in \mathcal{K}_E(T)$ *și orice* $z \in Z$, *funcția numerică* $t \to < \mathbf{u}(t)\mathbf{f}(t), z >$ *este* μ*-integrabilă.*

Într-adevăr, funcția $t \to < \mathbf{u}(t)\mathbf{f}(t), z >$ *este* μ-măsurabilă; deoarece $|\mathbf{u}|$ este local μ-integrabilă și $|\mathbf{f}| \in \mathcal{K}(T)$ avem

$$\int^* |< \mathbf{u}(t)\mathbf{f}(t), z >| \, d\mu \leqslant |z'| \int^* |\mathbf{u}| \, |\mathbf{f}| \, d\mu < \infty.$$

Corolar. *Dacă* $\mathbf{u}: T \to \mathcal{L}^*(E, F)$ *este* Z*-slab local* μ*-integrabilă atunci pentru orice* $x \in E$ *și* $z \in Z$ *funcția* $t \to < \mathbf{u}(t)x, z >$ *este local* μ*-integrabilă.*

Într-adevăr, pentru orice funcție $\varphi \in \mathcal{K}(T)$ și $x \in E$ avem $\varphi x \in \mathcal{K}_E(T)$.

Observație. Să presupunem că funcția $\mathbf{u} : T \to \mathcal{L}^*(E, F)$ este slab μ-măsurabilă și că $\int_K^* |\mathbf{u}| \, d\mu < \infty$ pentru orice mulțime compactă $K \subset T$.

În general funcția $\mathbf{u}$ nu este slab local μ-integrabilă, deoarece funcția $|\mathbf{u}|$ nu este μ-măsurabilă.

În condițiile propozițiilor 21 și 22 rezultă însă că $\mathbf{u}$ este slab local μ-integrabilă. În cazul cînd E și F sînt de tip numărabil și $Z = F'$ rezultă chiar că $\mathbf{u}$ este simplu local μ-integrabilă.

8. Măsuri definite prin densități slab local integrabile

Fie E și F două spații Banach, Z un subspațiu vectorial al lui F' și μ o măsură scalară. Vom presupune că Z este *normant* pentru F.

Propoziția 24. *Pentru orice funcție Z-slab local μ-integrabilă $\mathbf{u} : T \to \mathcal{L}^*(E, F)$ există o măsură $\mathbf{m} : \mathcal{K}(T) \to \mathcal{L}(E, Z')$ astfel încît să avem*

$$< \mathbf{m}(\varphi) x, \; z > = \int < \mathbf{u}(t) \varphi(t) x, \; z > \, d\mu(t)$$

pentru orice $\varphi \in \mathcal{K}(T)$, $x \in E$ și $z \in Z$. Măsura $\mathbf{m}$ este majorată și

$$|\mathbf{m}| \leqslant |\mathbf{u}| \, |\mu|.$$

Măsura $\mathbf{m}$ are valori $\mathcal{L}(E, F)$ în fiecare din cazurile următoare

1) $F = Z'$;

2) *$\mathbf{u}$ este simplu μ-măsurabilă; în particular F este de tip numărabil;*

3) *pentru orice $x \in E$ există o familie local numărabilă $(K_j)_{j \in J}$ de părți compacte disjuncte cu $T - \bigcup K_j$, μ-neglijabilă, astfel încît acoperirea echilibrată convexă și închisă (în topologia $\sigma(F, Z)$) a mulțimii $\{\mathbf{u}(t)x \, ; \, t \in K_j\}$ să fie compactă pentru topologia $\sigma(F, Z)$.*

Pentru $\varphi \in \mathcal{K}(T)$, $x \in E$ și $z \in Z$ avem $\varphi x \in \mathcal{K}_E(T)$ deci (propoziția 23), funcția $t \to < \mathbf{u}(t) \varphi(t) x, \; z >$ este μ-integrabilă; să punem

$$M(\varphi, \; x, \; z) = \int < \mathbf{u} \varphi x, \; z > \, d\mu.$$

Aplicația $M(z, \; x) : z \to M(\varphi, \; x, \; z)$ este o funcțională liniară pe Z; ea este și continuă:

$$|M(\varphi, \; x, \; z)| \leqslant \int |\mathbf{u}| \, |\varphi| \, |x| \, |z| \, |\mathbf{d}| \, |\mu|$$

deci $M(\varphi, \; x) \in Z'$ și

$$|M(\varphi, x)| \leqslant \int |\mathbf{u}| \, |\varphi| \, |x| \, |\mathbf{d}| \, |\mu|.$$

Aplicația $\mathbf{m}(\varphi) : x \to M(\varphi, x)$ a lui E în Z' este liniară și continuă deci $\mathbf{m}(\varphi) \in \mathcal{L}(E, Z')$ și

$$|\mathbf{m}(\varphi)| \leqslant \int |\mathbf{u}|\,|\varphi|\,\mathrm{d}|\mu|.$$

Aplicația $\mathbf{m} : \varphi \to \mathbf{m}(\varphi)$ a lui $\mathcal{K}(T)$ în $\mathcal{L}(E, Z')$ este liniară și majorată de măsura pozitivă $|\mathbf{u}|\,|\mu|$, deci $\mathbf{m}$ este o măsură majorată și $|\mathbf{m}| \leqslant |\mathbf{u}|\,|\mu|$. Din cele de mai sus rezultă

$$<\mathbf{m}(\varphi)x,\ z> = \int <\mathbf{u}\,\varphi x,\ z>\,\mathrm{d}\mu, \text{ pentru } \varphi \in \mathcal{K}(T),\ x \in E \text{ și } z \in Z.$$

Rămîn de considerat cazurile în care $\mathbf{m}$ are valori în $\mathcal{L}(E, F)$. Cazul $F = Z'$ este banal. Să presupunem acum că $\mathbf{u}$ este simplu μ-măsurabilă și să considerăm măsura $\mathbf{m}_1 : \mathcal{K}(T) \to \mathcal{L}(E, F)$ definită prin egalitatea (definiția 5)

$$\mathbf{m}_1(\varphi)x = \int \mathbf{u}\,x\,\varphi\,\mathrm{d}\mu, \text{ pentru } \varphi \in \mathcal{K}(T) \text{ și } x \in E.$$

Atunci pentru orice $\varphi \in \mathcal{K}(T)$, $x \in E$ și $z \in Z$ avem

$$<\mathbf{m}_1(\varphi)x,\ z> = <\int \mathbf{u}\,x\,\varphi\,\mathrm{d}\mu,\ z> = \int <\mathbf{u}\,x\,\varphi,\ z>\mathrm{d}\mu = <\mathbf{m}(\varphi)x,\ z>$$

de unde $\mathbf{m} = \mathbf{m}_1$, și deci $\mathbf{m}$ are valori în $\mathcal{L}(E, F)$.

În sfîrșit, să presupunem îndeplinită condiția 3. În acest caz, vom putea demonstra că $\mathbf{m}$ are valori în $\mathcal{L}(E, F)$ după parcurgerea propoziției 3 din § 16, dar demonstrația o dăm aici. Fie $\varphi \in \mathcal{K}(T)$, $x \in E$, $z \in Z$ și o mulțime compactă $K \subset T$. Să arătăm că avem

$$<\int_K \varphi\,\mathrm{d}\,\mathbf{m}\,x,\ z> = \int_K <\mathbf{u}\varphi x,\ z>\,\mathrm{d}\mu.$$

Există un șir (φ_n) de funcții fin $\mathcal{K}(T)$ astfel încît să avem

$$\lim_{n\to\infty} \int |\varphi_n - \varphi\varphi_K|\,\mathrm{d}(|\mathbf{u}|\,|\mu|) = 0.$$

Funcțiile φ_n și $\varphi\varphi_K$ sînt integrabile în raport cu orice măsură.

Deoarece $|\mathbf{m}| \leqslant |\mathbf{u}|\,|\mu|$, deducem că

$$\lim_{n\to\infty} \int |\varphi_n - \varphi\varphi_K|\,\mathrm{d}\,|\mathbf{m}| = 0$$

deci

$$\lim_{n\to\infty} \int \varphi_n \mathrm{d}\mathbf{m} = \int \varphi\varphi_K\,\mathrm{d}\mathbf{m}$$

și deci

$$\lim_{n\to\infty} < \int \varphi_n \, \mathbf{dm}\, x, z > = < \int \varphi\varphi_K \, \mathbf{dm}\, x, z >.$$

Din propoziția 3, § 16, deducem că

$$\lim_{n\to\infty} \int^* |\mathbf{u}|\,|\varphi_n - \varphi\varphi_K|\,\mathrm{d}\,|\mu| = 0.$$

Funcțiile $< \mathbf{u}\varphi_n x, z >$ și $< \mathbf{u}\varphi\varphi_K x, z >$ sînt μ-integrabile și avem

$$\left| \int < \mathbf{u}\,\varphi_n x, z > \mathrm{d}\mu - \int < \mathbf{u}\,\varphi\,\varphi_K x, z > \mathrm{d}\mu \right| \leqslant |x|\,|z| \int^* |\mathbf{u}|\,|\varphi_n - \varphi\varphi_K|\,\mathrm{d}\,|\mu|$$

deci

$$\lim_{n\to\infty} \int < \mathbf{u}\,\varphi_n x, \; z > \mathrm{d}\mu = \int < \mathbf{u}\,\varphi\varphi_K x, z > \mathrm{d}\mu.$$

Cum pentru fiecare n avem

$$< \int \varphi_n \mathbf{dm}\, x, z > = \int < \mathbf{u}\,\varphi_n x, \; z > \mathrm{d}\mu,$$

prin trecere la limită obținem

$$< \int \varphi\varphi_K \mathbf{dm}\, x, \; z > = \int < \mathbf{u}\,\varphi\varphi_K x, \; z > \mathrm{d}\mu.$$

Fie acum $x \in E$ și fie $\mathcal{K} = (K_j)_{j\in J}$ o familie de părți compacte disjuncte astfel ca $T - \bigcup K_j$ să fie μ-neglijabilă și astfel încît pentru fiecare $j \in J$, acoperirea echilibrată convexă și închisă A_j a mulțimii $\{\mathbf{u}(t)\,x\,;\, t \in K_j\}$ să fie compactă pentru topologia $\sigma(F, Z)$. Fie $\varphi \in \mathcal{K}\,(T)$ cu $\|\varphi\| \leqslant 1$. Atunci $\mathbf{u}(t)\,\varphi(t)\; x \in A_j$, pentru orice $t \in K_j$ și orice $j \in J$.

Fie (K_n) șirul de mulțimi din familia $\mathcal{K}$, ce intersectează suportul lui φ.

Pentru fiecare K_n mulțimea A_n este compactă și convexă în dualul algebric Z^* al lui Z, pentru topologia $\sigma(Z^*, Z)$. Există deci o familie $(z_i)_{i\in I}$ de elemente din Z astfel încît să avem

$$A_n = \bigcap_{i\in I} \{y\,;\; y \in Z^*,\; |< y,\; z_i >| \leqslant 1\}.$$

Atunci

$$|<\mathbf{u}(t)\varphi(t)\,x, z_i>| \leqslant 1, \text{ pentru } i \in I \text{ și } t \in K_n.$$

Urmează că pentru orice n avem

$$\left| < \int_{K_n} \varphi \mathbf{dm}\, x, z_i > \right| \leqslant \int_{K_n} |<\mathbf{u}(t)\varphi(t)\,x, z_i>|\,\mathrm{d}\,|\mu| \leqslant |\mu|\,(K_n)$$

deci

$$\int_{K_n} \varphi \mathbf{dm}\, x \in |\mu|(K_n)\, A_n \subset F.$$

Urmează apoi că

$$\int \varphi\, \mathbf{dm}\, x = \sum \int_{K_n} \varphi\, \mathbf{dm}\, x \in F$$

și cum $x \in E$ este arbitrar, deducem $\mathbf{m}(\varphi) \in \mathcal{L}(E, F)$. Această relație se deduce apoi pentru orice $\varphi \in \mathcal{K}(T)$. Cu aceasta propoziția este demonstrată

Observații. 1° Măsura $\mathbf{m}$ depinde de subspațiul Z. Dacă Z_1 și Z_2 sînt două subspații ale lui F' cu $Z_1 \subset Z_2$ și dacă $\mathbf{m}_1 : \mathcal{K}(T) \to \mathcal{L}(E, Z_1')$ și $\mathbf{m}_2 : \mathcal{K}(T) \to \mathcal{L}(E, Z_2')$ sînt măsurile corespunzătoare, atunci pentru fiecare $\varphi \in \mathcal{K}(T)$ și $x \in E$, funcționala $\mathbf{m}_1(\varphi)x \in Z_1'$ este restricția la subspațiul Z_1 a funcționalei $\mathbf{m}_2(\varphi)x \in Z_2'$.

2° Existența măsurii $\mathbf{m} : \mathcal{K}(T) \to \mathcal{L}(E, Z')$ a fost dedusă fără nici o ipoteză asupra lui Z. Faptul că Z este normant a fost folosit pentru a putea scufunda izometric F în Z' și a deduce că $\mathbf{m}$ are valori în $\mathcal{L}(E, F)$, în cazurile 2) și 3) Dacă se presupune doar că Z separă punctele lui F, atunci se poate scufunda algebric F în Z' și se poate de asemenea deduce că $\mathbf{m}$ are valori în $\mathcal{L}(E, F)$. În acest caz însă, modulul lui $\mathbf{m}$ diferă după cum se consideră $\mathbf{m}$ cu valori $\mathcal{L}(E, F)$ sau în $\mathcal{L}(E, Z')$, deoarece normele pe aceste spații sînt diferite.

În continuare vom presupune totdeauna că Z este normant pentru F.

Dacă $\mathbf{u}$ este *local* μ-integrabilă, atunci măsura $\mathbf{m}$ este produsul măsurii μ cu funcția $\mathbf{u}$ în sensul definiției 2, adică $\mathbf{m} = \mathbf{u}\mu$.

Într-adevăr, în acest caz, pentru orice $\varphi \in \mathcal{K}(T)$, funcția $\mathbf{u}\varphi$ este μ-integrabilă și pentru orice $x \in E$ și $z \in F$ avem

$$< \mathbf{m}(\varphi)\, x, z > = \int < \mathbf{u}\varphi x, z > \mathrm{d}\mu = < \int \mathbf{u}\, \varphi x\, \mathrm{d}\mu, z > = < x \int \mathbf{u}\, \varphi\, \mathrm{d}\mu, z >$$

deci

$$\mathbf{m}(\varphi) = \int \mathbf{u}\, \varphi\, d\mu$$

adică $\mathbf{m} = \mathbf{u}\mu$.

De asemenea dacă $\mathbf{u}$ este simplu local μ-integrabilă, atunci măsura $\mathbf{m}$ este produsul măsurii μ cu funcția $\mathbf{u}$ în sensul definiției 5, adică

$$\mathbf{m}(\varphi)\, x = \int \mathbf{u}\, x\, \varphi\, \mathrm{d}\mu, \text{ pentru } \varphi \in \mathcal{K}(T) \text{ și } x \in E$$

deci și în acest caz avem $\mathbf{m} = \mathbf{u}\mu$.

Prin extensiune sîntem conduși la definiția următoare:

Definiția 8. *Fie* μ *o măsură scalară,* $\mathbf{u}: T \to \mathcal{L}^*(E, F)$ *o funcție Z-slab local* μ*-integrabilă și* $\mathbf{m}: \mathcal{K}(T) \to \mathcal{L}(E, Z')$ *măsura majorată definită prin egalitatea*

$$<\mathbf{m}(\varphi)x, z> = \int <\mathbf{u}\,\varphi x, z>\, d\mu, \text{ pentru } \varphi \in \mathcal{K}(T),\ x \in E \text{ și } z \in Z.$$

Spunem că $\mathbf{m}$ *este măsura cu densitatea* $\mathbf{u}$ *și baza* μ, *sau că* $\mathbf{m}$ *este produsul dintre măsura* μ *și funcția Z -slab local* μ*-integrabilă* $\mathbf{u}$ *și scriem*

$$\mathbf{m} = \mathbf{u}\mu.$$

Avem deci

$$<\int \varphi\, d(\mathbf{u}\mu)\cdot x, z> = \int <\mathbf{u}\,\varphi x, z>\, d\mu$$

pentru $\varphi \in \mathcal{K}(T)$, $x \in E$ și $z \in Z$.

Inegalitatea $|\mathbf{m}| \leqslant |\mathbf{u}|\,|\mu|$ se scrie

$$|\mathbf{u}\mu| \leqslant |\mathbf{u}|\,|\mu|.$$

În anumite cazuri avem chiar egalitatea $|\mathbf{u}\mu| = |\mathbf{u}|\,|\mu|$.

Vom arăta mai departe că orice măsură majorată este produsul dintre o măsură pozitivă μ și o funcție slab local μ-integrabilă.

Dacă funcția $\mathbf{u}: T \to \mathcal{L}^*(E, F)$ este *simplu local* μ*-integrabilă*, atunci avem

$$x \int \varphi\, d(\mathbf{u}\mu) = \int \mathbf{u}\,\varphi x\, d\mu,$$

pentru $\varphi \in \mathcal{K}(T)$ și $x \in E$, deci $\mathbf{u}\mu$ coincide cu produsul dintre $\mathbf{u}$ și μ în sensul definiției 5.

Dacă funcția $\mathbf{u}: T \to \mathcal{L}(E, F)$ este *local* μ*-integrabilă*, atunci avem

$$\int \varphi\, d(\mathbf{u}\mu) = \int \mathbf{u}\,\varphi\, d\mu, \text{ pentru } \varphi \in \mathcal{K}(T).$$

deci $\mathbf{u}\mu$ este produsul dintre $\mathbf{u}$ și μ și în sensul definiției 2.

Propozițiile 11 și 16 se extind și pentru funcțiile slab local μ-integrabile.

Propoziția 25. *Dacă* $\mathbf{u}: T \to \mathcal{L}^*(E, F)$ *este o funcție Z-slab local* μ*-integrabilă, atunci avem*

$$<\int \mathbf{f}\, d(\mathbf{u}\mu), z> = \int <\mathbf{u}\,\mathbf{f}, z>\, d\mu, \text{ pentru } \mathbf{f} \in \mathcal{K}_B(T) \text{ și } z \in Z.$$

Să notăm $\mathbf{m} = \mathbf{u}\mu$. Pentru $\varphi \in \mathcal{K}(T)$ și $x \in E$ avem $\varphi x \in \mathcal{K}_E(T)$ și $\mathbf{m}(\varphi x) = \mathbf{m}(\varphi)x$, deci pentru orice $z \in Z$ avem

$$< \mathbf{m}(\varphi x), z > = \int < \mathbf{u}\, \varphi x, z > \mathrm{d}\mu.$$

Rezultă că pentru orice funcție $\mathbf{f} = \sum_{i=1}^{n} \varphi_i\, x_i$ cu $\varphi_i \in \mathcal{K}(T)$ și $x_i \in E$ avem

$$< \mathbf{m}(\mathbf{f}), z > = \int < \mathbf{u}\, \mathbf{f}, z > \mathrm{d}\mu.$$

Fie acum $\mathbf{f} \in \mathcal{K}(T)$ oarecare. Există atunci un șir $(\mathbf{f}_n)$ de combinații liniare de forma precedentă, cu suporturile conținute în aceeași mulțime compactă K și uniform convergent către $\mathbf{f}$. Atunci

$$\lim_{n \to \infty} \mathbf{m}(\mathbf{f}_n) = \mathbf{m}(\mathbf{f}).$$

Pe de altă parte, funcțiile $< \mathbf{u}\mathbf{f}_n, z >$ au suporturile conținute în K și tind uniform către $< \mathbf{u}\mathbf{f}, z >$, pentru fiecare $z \in Z$, deci

$$\lim_{n \to \infty} \int < \mathbf{u}\, \mathbf{f}_n, z > \mathrm{d}\mu = \int < \mathbf{u}\, \mathbf{f}, z > \mathrm{d}\mu.$$

Cum pentru fiecare $\mathbf{n}$ avem

$$< \mathbf{m}(\mathbf{f}_n), z > = \int < \mathbf{u}\, \mathbf{f}_n, z > \mathrm{d}\mu,$$

prin trecere la limită obținem egalitatea dorită.

Cu aceasta propoziția este demonstrată.

Observație. Fie $\mathbf{u} : T \to \mathcal{L}^*(E, F)$ o funcție *Z-slab local* μ-*integrabilă*. În raport cu măsura $\mathbf{u}\mu : \mathcal{K}(T) \to \mathcal{L}(E, Z')$ se pot integra funcții vectoriale $\mathbf{f} : T \to E$. Totuși nu avem, în general, egalitatea

$$\int \mathbf{f}\, \mathrm{d}(\mathbf{u}\mu) = \int \mathbf{f}\, \mathbf{u}\, \mathrm{d}\mu, \text{ pentru } \mathbf{f} \in \mathcal{K}_E(T),$$

deoarece $\mathbf{uf}$ nu este μ-măsurabilă. După cum am văzut, această egalitate are loc dacă $\mathbf{u}$ este simplu local μ-integrabilă.

De asemenea, în raport cu $\mathbf{u}\mu$ se pot integra funcții scalare φ, dar nu avem în general egalitatea

$$\int \varphi\, \mathrm{d}(\mathbf{u}\mu) = \int \varphi\, \mathbf{u}\, \mathrm{d}\mu, \text{ pentru } \varphi \in \mathcal{K}(T).$$

Această egalitate are loc dacă $\mathbf{u}$ este local μ-integrabilă.

§ 16. INTEGRAREA ÎN RAPORT CU O MĂSURĂ DEFINITĂ PRIN DENSITĂȚI

1. Familii filtrante de funcții măsurabile

Demonstrăm mai întîi propoziția următoare, care va fi folosită mai departe. Fie μ o măsură pozitivă pe T.

Propoziția 1. *Fie $(f_i)_{i\in I}$ o familie de funcții $\geqslant 0$ (finite sau infinite), filtrantă pentru relația $\leqslant$. Dacă aplicația $t \to (f_i(t))_{i\in I}$ a lui T în $\overline{R}^I$ este μ-măsurabilă, atunci funcția $\sup_{i\in I} f_i$ este μ-măsurabilă, și*

$$\int^* \sup_{i\in I} f_i \, d\mu = \sup_{i\in I} \int^* f_i \, d\mu.$$

a) Fie $K \subset T$ o mulțime compactă și $\varepsilon > 0$. Există o mulțime compactă $K_1 \subset K$ astfel încît restricția la K_1 a aplicației $t \to (f_i(t))_{i\in I}$ să fie continuă și $\mu(K - K_1) < \frac{\varepsilon}{2}$. Atunci, pentru orice $i \in I$, restricția funcției f_i la K_1 este continuă, deci restricția la K_1 a funcției $f = \sup_{i\in I} f_i$ este semicontinuă inferior. Notînd cu g o funcție egală cu f pe K_1 și constantă pe $T - K_1$, g este μ-măsurabilă. Există deci o mulțime compactă $K_2 \subset K_1$ astfel încît $\mu(K_1 - K_2) < \frac{\varepsilon}{2}$ și restricția lui g la K_2 să fie continuă. Aceasta înseamnă că restricția lui f la K_2 este continuă și $\mu(K - K_2) < \varepsilon$. Așadar funcția $f = \sup_{i\in I} f_i$ este μ-măsurabilă.

b) Dacă mulțimea $A = \{t;\ f(t) = +\infty\}$ nu este μ-neglijabilă, atunci

$$\int^* f \, d\mu = \sup_{i\in I} \int^* f_i \, d\mu = +\infty.$$

Într-adevăr, A este μ-măsurabilă, deoarece f este μ-măsurabilă, deci $A \cap K$ este μ-integrabilă pentru orice mulțime compactă $K \subset T$. Există atunci o mulțime compactă $K \subset A$ cu $\mu(K) > 0$, astfel încît restricția funcției $t \to (f_i(t))_{i\in I}$ la K să fie continuă. Avem deci $\lim_{i\in I} f_i(t) = \sup_{i\in I} f_i(t) = f(t) = +\infty$ pentru $t \in K$. Restricțiile funcțiilor $g_i(t) = \frac{1}{1 + f_i(t)}$ la K sînt de asemenea continue ($g_i(t) = 0$ dacă $f_i(t) = +\infty$), funcțiile g_i formează o familie filtrantă pentru relația $\geqslant$ și $\inf_{i\in I} g_i(t) = \lim_{i\in I} g_i(t) = 0$. Conform teoremei lui Dini, funcțiile g_i tind uniform către 0 pe K. Pentru orice număr $a > 0$ există un indice $i \in I$, astfel încît pentru orice funcție $g_j \leqslant g_i$ să avem $g_j(t) \leqslant \frac{1}{1 + a}$ pentru $t \in K$. Aceasta înseamnă că $f_j(t) \geqslant a$

pentru $t \in K$, adică $f_i \varphi_K \geqslant a\, \varphi_K$ deci

$$\int^* f_i\, \varphi_K\, d\mu \geqslant a\, \mu(K).$$

Rezultă că

$$\sup_{i \in I} \int^* f_i\, \varphi_K d\mu = +\infty = \int^* f\, \varphi_K d\mu.$$

de unde

$$\sup_{i \in I} \int^* f_i\, d\mu = +\infty = \int^* f\, d\mu.$$

c) Să presupunem acum că A este μ-neglijabilă, deci $f(t) < +\infty$, μ-aproape peste tot.

Fie $K \subset T$ o mulțime compactă. Există o mulțime μ-neglijabilă $N \subset K$, și un șir crescător (K_n) de mulțimi compacte, a căror reuniune este $K - N$ și astfel încît restricțiile funcțiilor $t \to (f_i(t))_{i \in I}$ și $f(t) = \sup_{i \in I} f_i(t)$ la fiecare K_n să fie continue, iar $f(t) < +\infty$ pentru $t \in K - N$.

Rezultă că restricția fiecărei funcții f_i la fiecare mulțime K_n este continuă. Conform teoremei lui Dini, f_i converge uniform către f pe fiecare K_n.

Pentru fiecare K_n și fiecare $\varepsilon > 0$, există deci un indice i astfel încît pentru orice funcție $f_j \geqslant f_i$ din familie să avem $|f(t) - f_j(t)| < \varepsilon$ pentru $t \in K_n$, adică $|f\varphi_{K_n} - f_j \varphi_{K_n}| \leqslant \varepsilon \varphi_{K_n}$. Funcțiile $f\varphi_{K_n}$ și $f_j \varphi_{K_n}$ sînt μ-integrabile, deci

$$\left| \int f\varphi_{K_n}\, d\mu - \int f_j \varphi_{K_n}\, d\mu \right| \leqslant \int \left| f\varphi_{K_n} - f_j \varphi_{K_n} \right| d\mu \leqslant \varepsilon \mu\,(K_n).$$

Aceasta înseamnă că

$$\int f\varphi_{K_n} d\mu = \lim_{i \in I} \int f_i \varphi_{K_n}\, d\mu = \sup_{i \in I} \int f_i \varphi_{K_n}\, d\mu.$$

Șirul $(f\varphi_{K_n})$ este crescător și $\sup_n f\varphi_{K_n} = f\varphi_{K-N}$; de asemenea, pentru fiecare $i \in I$, șirul $(f_i \varphi_{K_n})$ este crescător și

$$\sup_n f_i\, \varphi_{K_n} = f_i \varphi_{K-N}.$$

Din teorema de integrare termen cu termen a șirurilor monotone de funcții pozitive, deducem

$$\int^* f\varphi_K\, d\mu = \int^* f\varphi_{K-N}\, d\mu = \sup_n \int^* f\varphi_{K_n}\, d\mu,$$

$$\int^* f_i \varphi_K\, d\mu = \int^* f_i \varphi_{K-N}\, d\mu = \sup_n \int^* f_i \varphi_{K_n}\, d\mu.$$

Atunci

$$\int^* f\varphi_K \, d\mu = \sup_n \int^* f\varphi_{K_n} \, d\mu = \sup_n \sup_{i\in I} \int^* f_i \varphi_{K_n} \, d\mu =$$

$$= \sup_{i\in I} \sup_n \int^* f_i \varphi_{K_n} \, d\mu = \sup_{i\in I} \int^* f_i \varphi_K \, d\mu.$$

De aici rezultă că

$$\int^* f \, d\mu = \sup_K \int^* f\varphi_K \, d\mu = \sup_K \sup_{i\in I} \int^* f_i \varphi_K \, d\mu =$$

$$= \sup_{i\in I} \sup_K \int^* f_i \varphi_K \, d\mu = \sup_{i\in I} \int^* f_i \, d\mu,$$

unde K parcurge mulțimea părților compacte ale lui T.

Cu aceasta propoziția este demonstrată.

2. Integrala superioară în raport cu o măsură pozitivă definită prin densități

Fie μ o măsură pozitivă pe T, $g \geqslant 0$ o funcție local μ-integrabilă și $\nu = g\mu$.

Pentru orice $f \in \mathcal{K}(T)$, $\nu(f)$ este definită prin egalitatea

$$\int f \, d\nu = \int fg \, d\mu.$$

Vom vedea că această egalitate se păstrează și pentru integralele superioare ale unei funcții $f \geqslant 0$ oarecare.

Lema 1. *Dacă $f \geqslant 0$ este semicontinuă inferior, atunci*

$$\int^* f \, d\nu = \int^* fg \, d\mu.$$

Fie $(h_\alpha)_{\alpha\in A}$ familia filtrantă de funcții din $\mathcal{K}_+(T)$ astfel încît $h_\alpha \leqslant f$. Pentru fiecare funcție h_α avem

$$\int h_\alpha \, d\nu = \int h_\alpha \, g \, d\mu.$$

Avem, de asemenea, $\sup_{\alpha\in A} h_\alpha = f$ și $\sup_{\alpha\in A} h_\alpha \, g = fg$.

Aplicația $t \to (h_\alpha(t)g(t))_{\alpha\in A}$ a lui T în $\overline{R}^A$ este μ măsurabilă. Într-adevăr, g fiind μ-măsurabilă, pentru fiecare mulțime compactă $K \subset T$ și orice $\varepsilon > 0$, există o mulțime compactă $K' \subset K$ astfel încît restricția lui g la K' este continuă și $\mu(K - K') < \varepsilon$; atunci restricțiile funcțiilor $h_\alpha \, g$ la K' sînt continue, deci și restricția aplicației $t \to (h_\alpha(t) \, g(t))_{\alpha\in A}$ la

K' este continuă. Aceasta înseamnă că funcția $t \to (h_\alpha(t)\, g(t))_{\alpha \in A}$ este μ-măsurabilă.

Din propoziția 1 rezultă atunci că

$$\int^* fg \, d\mu = \sup_{\alpha \in A} \int h_\alpha g \, d\mu = \sup_{\alpha \in A} \int h_\alpha \, d\nu = \int^* f \, d\nu.$$

Lema 2. *Pentru orice funcție* $f \geqslant 0$ *avem*

$$\int^* f \, d\nu \geqslant \int^* f g \, d\mu.$$

Fie $K \subset T$ o mulțime compactă și fie $h \in \mathcal{J}_+$ cu $h \geqslant f \varphi_K$. Din lema 1 rezultă

$$\int^* h \, d\nu = \int^* h g \, d\mu \geqslant \int^* f g \varphi_K \, d\mu.$$

Atunci

$$\int^* f \varphi_K \, d\nu = \inf_{\substack{h \in \mathcal{J}_+ \\ h \geqslant f\varphi_K}} \int^* h \, d\nu \geqslant \int^* fg \varphi_K \, d\mu$$

de unde

$$\int^* f \, d\nu \geqslant \int^* fg \, d\mu.$$

Lema 3. *Dacă* $f \geqslant 0$ *este* ν*-integrabilă, atunci* fg *este* μ*-integrabilă și avem*

$$\int f \, d\nu = \int fg \, d\mu.$$

Deoarece $f \geqslant 0$ este ν-integrabilă, există un șir (f_n) de funcții $\geqslant 0$ din $\mathcal{K}(T)$ astfel încît

$$\lim_{n \to \infty} \int |f_n - f| \, d\nu = 0.$$

Deoarece, conform lemei 2, avem

$$\int |f_n - f| \, d\nu = \int^* |f_n - f| \, d\nu \geqslant \int^* |f_n - f| \, g \, d\mu = \int^* |f_n g - fg| \, d\mu$$

deducem că

$$\lim_{n \to \infty} \int^* |f_n g - fg| \, d\mu = 0.$$

Dar $f_n \, g$ sînt μ-integrabile, deci fg este μ-integrabilă. Din egalitățile

$$\lim_{n \to \infty} \int f_n \, d\nu = \int f \, d\nu, \quad \lim_{n \to \infty} \int f_n \, g \, d\mu = \int fg \, d\mu$$

și

$$\int f_n \, d\nu = \int f_n g \, d\mu,$$

deducem

$$\int f \, d\nu = \int f g \, d\mu.$$

Lema 4. *Dacă $f \geqslant 0$ este ν-măsurabilă și cu suport compact, atunci fg este μ-măsurabilă și*

$$\int^* f \, d\nu = \int^* f g \, d\mu.$$

Dacă pentru fiecare n punem $f_n = \inf(n, f)$, funcția f_n este ν-integrabilă, șirul (f_n) este crescător și $f = \sup_n f_n$. Din lema 3 rezultă că $f_n g$ sînt μ-integrabile și

$$\int f_n \, d\nu = \int f_n g \, d\mu.$$

Dar

$$\int^* f \, d\nu = \sup_n \int^* f_n d\nu \quad \text{și} \quad \int^* f g \, d\mu = \sup_n \int^* f_n g \, d\mu$$

de unde

$$\int^* f \, d\nu = \int^* f g \, d\mu.$$

Funcțiile $f_n g$ sînt μ-măsurabile, deoarece sînt μ-integrabile, iar $fg = \sup_n f_n g$. Rezultă că fg este μ-măsurabilă.

Propoziția 2. *Pentru orice funcție $f \geqslant 0$ avem*

$$\int^* f \, d(g\mu) = \int^* f g \, d\mu.$$

Să notăm $\nu = g\mu$. Vom demonstra mai întîi propoziția în cazul cînd f este cu *suport compact* K.

Deoarece inegalitatea $\int^* f \, d\nu \geqslant \int^* fg \, d\mu$ a fost demonstrată în lema 2, rămîne de demonstrat inegalitatea contrară

$$\int^* f \, d\nu \leqslant \int^* f g \, d\mu.$$

Pentru aceasta este suficient să arătăm că dacă $h \in \mathcal{J}_+$ și $fg \leqslant h$, atunci $\int^* f \, d\nu \leqslant \int^* h \, d\mu$.

Fie deci $h \in \mathcal{J}_+$ cu $fg \leqslant h$. Vom arăta că putem găsi o funcție ν-măsurabilă f' cu suport compact astfel încît $f \leqslant f'$ și $f'g \leqslant h$. Va rezulta atunci din lema 4 că

$$\int^* f \, d\nu \leqslant \int^* f' \, d\nu = \int^* f' g \, d\mu \leqslant \int^* h \, d\mu$$

și propoziția va fi demonstrată.

Fie $S = \{t;\ g(t) \neq 0\}$. Deoarece g este μ-măsurabilă, mulțimea S este μ-măsurabilă, deci $K \cap S$ este μ-integrabilă.

Există atunci o mulțime μ-neglijabilă $N \subset K \cap S$ și un șir (K_n) de mulțimi compacte, disjuncte două cîte două, astfel încît $\bigcup_{n=1}^{\infty} K_n = (K \cap S) - N$ și astfel încît restricția lui g la fiecare K_n să fie continuă. Fie $\varphi \in \mathcal{J}_+$ cu $\varphi \geqslant f$. Definim funcția f' pe T prin egalitatea

$$f'(t) = \begin{cases} \dfrac{h(t)}{g(t)} & \text{dacă } t \in (K \cap S) - N, \\ \varphi(t) & \text{dacă } t \in (K - S) \cup N, \\ 0 & \text{dacă } t \in T - K. \end{cases}$$

Atunci $f' \geqslant f$ deoarece:

pentru $t \in (K \cap S) - N = \bigcup_{n=1}^{\infty} K_n$ avem $f'(t) g(t) = h(t) \geqslant f(t) g(t)$,

iar $g(t) > 0$;

pentru $t \in (K - S) \cup N$ avem $f'(t) = \varphi(t) \geqslant f(t)$;

pentru $t \in T - K$ avem $f'(t) = f(t) = 0$.

Funcția f' este ν-măsurabilă deoarece:

restricția lui $f' = \dfrac{h}{g}$ la fiecare K_n este inferior semicontinuă;

restricția lui $f' = \varphi$ la $(K - S) \cup N$ este inferior semicontinuă;

restricția lui f' la $T - K$ este nulă.

Din definiția lui f' rezultă că $h \geqslant f'g$, μ-aproape peste tot, deoarece

pentru $t \in (K \cap S) - N$ avem $h(t) = f'(t) g(t)$;

pentru $t \in K - S$ avem $g(t) = 0$;

pentru $t \in T - K$ avem $f'(t) = 0$.

Atunci, după cum am observat,

$$\int^* f \, d\nu \leqslant \int^* f' \, d\nu = \int^* f' g \, d\mu \leqslant \int^* h \, d\mu$$

și cum funcția $h \in \mathcal{J}_+$ cu $h \geqslant fg$ este arbitrară, deducem

$$\int^* f \, d\nu \leqslant \int^* f g \, d\mu$$

și deci

$$\int^* f \, d\nu = \int^* fg \, d\mu.$$

Fie acum $f \geqslant 0$ o funcție oarecare. Pentru orice mulțime compactă $K \subset T$, funcția $f\varphi_K$ are suportul compact; din prima parte a demonstrației rezultă

$$\int^* f\varphi_K \, d\nu = \int^* fg \, \varphi_K \, d\mu.$$

Luînd marginea superioară pentru toate mulțimile compacte $K \subset T$, obținem

$$\int^* f \, d\nu = \int^* fg \, d\mu$$

și propoziția este demonstrată.

3. Integrarea în raport cu o măsură pozitivă definită prin densități

Fie μ o măsură pozitivă pe T, $g \geqslant 0$ o funcție local μ-integrabilă și $\nu = g\mu$.

Propoziția 3. *O funcție* **f** *definită pe* T *cu valori într-un spațiu Banach* E *sau în* $\overline{R}$ *este* $g\mu$*-neglijabilă, dacă și numai dacă* $\mathbf{f}g$ *este* μ*-neglijabilă.*

Într-adevăr,

$$\int^* |\mathbf{f}| \, d\nu = \int^* |\mathbf{f}| \, d(g\mu) = \int^* |\mathbf{f}| g \, d\mu = \int^* |\mathbf{f}g| \, d\mu$$

deci $\nu^*(|\mathbf{f}|) = 0$ dacă și numai dacă $\mu^*(|\mathbf{f}|g) = 0$.

Observație. Să notăm $S_g = \{t;\ g(t) \neq 0\}$. A spune că $\mathbf{f}g$ este μ-neglijabilă înseamnă că $\mathbf{f}$ este μ-neglijabilă pe mulțimea S_g (adică $\mathbf{f}(t) = 0$ aproape pentru orice $t \in S_g$).

Corolar. *O mulțime* $A \subset T$ *este* $g\mu$*-neglijabilă dacă și numai dacă mulțimea* $A \cap S_g$ *este* μ*-neglijabilă.*

Propoziția 4. *O funcție* **f** *definită pe* T *cu valori într-un spațiu Banach* E *sau în* $\overline{R}$ *este* $g\mu$*-măsurabilă dacă și numai dacă* $\mathbf{f}g$ *este* μ*-măsurabilă.*

Să presupunem că $\mathbf{f}$ este $g\mu$-măsurabilă. Fie $K \subset T$ o mulțime compactă. Există o mulțime $g\mu$-neglijabilă $M_0 \subset K$ și un șir (K_n) de mulțimi compacte, disjuncte două cîte două, a căror reuniune este $K - M_0$ și astfel încît restricția lui $\mathbf{f}$ la fiecare K_n să fie continuă. Deoarece g este

μ-măsurabilă, fiecare K_n este reuniunea unei mulțimi μ-neglijabile N_n și a unui șir de mulțimi compacte $(K_{nm})_{m\in N}$ disjuncte două cîte două, astfel încît restricția lui g la fiecare K_{nm} să fie continuă. Să notăm $S = \{t;\ g(t) \neq 0\}$.

Deoarece M_0 este $g\mu$-neglijabilă, mulțimea $S \cap M$ este μ-neglijabilă.

Deoarece S este μ-măsurabilă și $S \cap M_0$ este μ-neglijabilă, mulțimea $M_0 - S$ este μ-măsurabilă și relativ compactă, deci este μ-integrabilă. Există deci o mulțime μ-neglijabilă $N_0 \subset M_0 - S$ și un șir $(K_{0m})_{m\in N}$ de mulțimi compacte, disjuncte două cîte două, a căror reuniune este $(M_0 - S) - N_0$.

Restricția lui g la fiecare K_{0m} este nulă, deci continuă. Atunci mulțimea $N = (\bigcup_{n=1}^{\infty} N_n) \cup N_0$ este μ-neglijabilă, iar $K - N$ este reuniunea mulțimilor compacte K_{nm}, $0 \leqslant n < \infty$, $1 \leqslant m < \infty$, astfel încît restricția funcției $\mathfrak{f}g$ la fiecare K_{nm} este continuă (pe mulțimile K_0 avem $\mathfrak{f}g = 0$). Rezultă că $\mathfrak{f}g$ este μ-măsurabilă.

Reciproc, să presupunem că $\mathfrak{f}g$ este μ-măsurabilă. Fie $K \subset T$ o mulțime compactă. Mulțimea $A = K - S$ este disjunctă de S, deci după corolarul 2, A este $g\mu$-neglijabilă. Funcțiile g și $\mathfrak{f}g$ sînt μ-măsurabile iar mulțimea $K \cap S$ este μ-integrabilă, deci se poate scrie ca reuniune a unei mulțimi μ-neglijabile M și a unui șir (K_n) de mulțimi compacte, astfel încît restricțiile funcțiilor g și $\mathfrak{f}g$ la fiecare K_n să fie continue. Deoarece M este μ-neglijabilă și $M \subset S$, rezultă că M este $g\mu$-neglijabilă.

Pe fiecare K_n avem $g_n(t) > 0$, deci restricția funcției $\mathfrak{f} = \dfrac{\mathfrak{f}g}{g}$ la fiecare K_n este continuă. Mulțimea $N = A \cup M$ este $g\mu$-neglijabilă iar reuniunea mulțimilor (K_n) este egală cu $K - N$. Rezultă că $\mathfrak{f}$ este $g\mu$-măsurabilă.

Corolar. *O mulțime $A \subset T$ este $g\mu$-măsurabilă dacă și numai dacă $A \cap S_g$ este μ-măsurabilă.*

Să presupunem mai întîi că A este $g\mu$-măsurabilă. Atunci φ_A este $g\mu$-măsurabilă, deci $\varphi_A g$ este μ-măsurabilă.

Funcția h definită astfel: $h(t) = \dfrac{1}{|g(t)|}$ dacă $g(t) \neq 0$ și $h(t) = 0$ dacă $g(t) = 0$, este μ-măsurabilă, deci $\varphi_A gh$ este μ-măsurabilă. Dar $gh = \varphi_{S_g}$, deci $\varphi_A \varphi_{S_g}$ este μ-măsurabilă, adică $A \cap S_g$ este μ-măsurabilă.

Reciproc, să presupunem că $A \cap S_g$ este μ-măsurabilă. Atunci $\varphi_A \varphi_{S_g}$ este μ-măsurabilă, deci funcția $\varphi_A g = \varphi_A \varphi_{S_g} g$ este μ-măsurabilă. Rezultă că φ_A este $g\mu$-măsurabilă, adică A este $g\mu$-măsurabilă.

Teorema 1. *O funcție $\mathfrak{f}$ definită pe T cu valori într-un spațiu Banach E sau în $\bar{R}$ este $g\mu$-integrabilă, dacă și numai dacă funcția $\mathfrak{f}g$ este μ-integrabilă. În acest caz avem*

$$\int \mathfrak{f}\, d(g\mu) = \int \mathfrak{f}g\, d\mu.$$

Să notăm $\nu = g\mu$. Din egalitatea

$$\int^* |f|\, d\nu = \int^* |f|\, g\, d\mu$$

rezultă că $\int^* |f|\, d\nu < \infty$ dacă și numai dacă $\int^* |f|\, g\, d\mu < \infty$.

De asemenea, f este ν-măsurabilă dacă și numai dacă fg este μ-măsurabilă. Conform criteriului de integrabilitate, rezultă că f este ν-integrabilă, dacă și numai dacă fg este μ-integrabilă.

Fie acum f o funcție ν-integrabilă cu valori în E (sau în $\bar{R}$) și (f_n) un șir de funcții din $\mathcal{K}_E(T)$ (sau din $\mathcal{K}(T)$) astfel încît

$$\lim_{n\to\infty} \int |f - f_n|\, d\nu = 0.$$

Atunci

$$\lim_{n\to\infty} \int f_n\, d\nu = \int f\, d\nu.$$

Dar, pentru funcțiile pozitive $|f - f_n|$, avem (propoziția 2)

$$\int |f - f_n|\, d\nu = \int |f - f_n|\, g\, d\mu,$$

deci

$$\lim_{n\to\infty} \int |fg - f_n g|\, d\mu = 0,$$

de unde

$$\lim_{n\to\infty} \int f_n g\, d\mu = \int fg\, d\mu.$$

Deoarece pentru funcțiile f_n avem (propoziția 11, § 15)

$$\int f_n\, d\nu = \int f_n g\, d\mu,$$

prin trecerea la limită deducem

$$\int f\, d\nu = \int fg\, d\mu.$$

Corolarul 1. *O mulțime $A \subset T$ este $g\mu$-integrabilă dacă și numai dacă $\varphi_A g$ este μ-integrabilă. În acest caz avem*

$$(g\mu)(A) = \int_A g\, d\mu.$$

Corolarul 2. *Măsura $g\mu$ este mărginită dacă și numai dacă g este μ-integrabilă. În acest caz avem*

$$\|g\mu\| = \int g\, d\mu.$$

Într-adevăr, T este $g\mu$-integrabilă dacă și numai dacă $g = \varphi_T g$ este μ-integrabilă, și avem

$$\|g\mu\| = (g\mu)(T) = \int g \, d\mu.$$

Propoziția 5. *Fie μ o măsură pozitivă, $g_1 \geqslant 0$ o funcție local μ-integrabilă și E un spațiu Banach. O funcție $\mathfrak{g}_2 : T \to E$ este local $g_1\mu$-integrabilă, dacă și numai dacă funcția $\mathfrak{g}_2 g_1$ este local μ-integrabilă. În acest caz avem*

$$\mathfrak{g}_2 (g_1\mu) = (\mathfrak{g}_2 g_1)\mu.$$

Să presupunem mai întîi că $\mathfrak{g}_2$ este local $g_1\mu$-integrabilă. Pentru orice funcție $\varphi \in \mathcal{K}(T)$, funcția $\mathfrak{g}_2\varphi$ este $g_1\mu$-integrabilă, deci $\mathfrak{g}_2\varphi g_1$ este μ-integrabilă și avem

$$\int \mathfrak{g}_2\varphi \, d(g_1\mu) := \int \mathfrak{g}_2\varphi g_1 \, d\mu.$$

Urmează că $\mathfrak{g}_2 g_1$ este local μ-integrabilă și

$$\mathfrak{g}_2 (g_1\mu) = (\mathfrak{g}_2 g_1)\mu.$$

Reciproc, dacă $\mathfrak{g}_2 g_1$ este local μ-integrabilă, atunci pentru orice $\varphi \in \mathcal{K}(T)$ funcția $\mathfrak{g}_2 g_1 \varphi$ este μ-integrabilă, deci $\mathfrak{g}_2\varphi$ este $g_1\mu$-integrabilă și deci $\mathfrak{g}_2$ este local $g_1\mu$-integrabilă.

Observație. Fie A o mulțime din T. Pentru ca funcția φ_A să fie local μ-integrabilă este necesar și suficient ca A să fie μ-măsurabilă.

Luînd $g = \varphi_A$ în propozițiile precedente obținem

Propoziția 6. *Fie A o mulțime μ-măsurabilă.*

1) *Pentru orice funcție $f \geqslant 0$ definită pe T avem*

$$\int^* f \, d(\varphi_A\mu) = \int^* f\varphi_A \, d\mu = \int_A^* f \, d\mu.$$

2) *O funcție $\mathfrak{f}$ definită pe T cu valori în E sau în $\overline{R}$ este $\varphi_A\mu$-neglijabilă dacă și numai dacă $\mathfrak{f}$ este μ-neglijabilă pe A;*

3) *O funcție $\mathfrak{f}$ definită pe T cu valori în E sau în $\overline{R}$ este $\varphi_A\mu$-măsurabilă dacă și numai dacă restricția lui $\mathfrak{f}$ la A este μ-măsurabilă.*

4) *O funcție $\mathfrak{f}$ definită pe T cu valori în E sau în $\overline{R}$ este $\varphi_A\mu$-integrabilă, dacă și numai dacă $\mathfrak{f}\varphi$ este μ-integrabilă și avem*

$$\int \mathfrak{f} \, d(\varphi_A\mu) = \int_A \mathfrak{f} \, d\mu.$$

Dacă două funcții $\mathfrak{f}$ și $\mathfrak{g}$ definite pe T cu valori în E sau $\overline{R}$ sînt egale pe A, atunci una din ele este $\varphi_A\mu$-neglijabilă, $\varphi_A\mu$-măsurabilă sau $\varphi_A\mu$-integrabilă, dacă și numai dacă și cealaltă are aceeași proprietate. Dacă sînt $\varphi_A\mu$-integrabile, atunci

$$\int \mathfrak{f} \, d(\varphi_A\mu) = \int \mathfrak{g} \, d(\varphi_A\mu),$$

adică

$$\int_A \mathbf{f}\,d\mu = \int_A \mathbf{g}\,d\mu.$$

Fie acum o mulțime $B \supset A$ și $\mathbf{f}$ o funcție definită pe B cu valori în E sau $\bar{R}$. Vom spune că $\mathbf{f}$ este μ-neglijabilă pe A (respectiv μ-măsurabilă pe A, μ-integrabilă pe A), dacă o prelungire oarecare $\bar{\mathbf{f}}$ la T a restricției lui $\mathbf{f}$ la A este μ-neglijabilă (respectiv μ-măsurabilă, μ-integrabilă). Dacă $\mathbf{f}$ este integrabilă pe A, notăm

$$\int_A \mathbf{f}\,d\mu = \int_A \bar{\mathbf{f}}\,d\mu = \int \bar{\mathbf{f}}\,\varphi_A\,d\mu$$

și spunem că $\int_A \mathbf{f}\,d\mu$ este integrala lui $\mathbf{f}$ pe mulțimea A. Se definește de asemenea $\int_A^* \mathbf{f}\,d\mu = \int_A^* \bar{\mathbf{f}}\,d\mu$.

Spunem că funcția $\mathbf{f}$ este local μ-integrabilă pe A, dacă $\bar{\mathbf{f}}$ este local $\varphi_A\mu$-integrabilă, adică, dacă pentru orice mulțime compactă $K \subset T$, funcția $\mathbf{f}\varphi_{K\cap A}$ este μ-integrabilă.

4. Integrarea în raport cu măsuri definite prin densități slab local integrabile

Fie E și F două spații Banach și $Z \subset F'$ un subspațiu normant pentru F.

Fie μ o măsură *scalară* pe T.

Teorema 2. *Fie* $\mathbf{u} : T \to \mathcal{L}^*(E, F)$ *o funcție* Z*-slab local* μ*-integrabilă și* $\mathbf{f} : T \to E$ *o funcție.*

1) *Dacă* $\mathbf{f}$ *este* $|\mathbf{u}|\,|\mu|$*-neglijabilă, atunci* $\mathbf{f}$ *este* $\mathbf{u}\mu$*-neglijabilă iar* $\mathbf{uf}$ *este* μ*-neglijabilă.*

2) *Dacă* $\mathbf{f}$ *este* $|\mathbf{u}|\,|\mu|$*-măsurabilă, atunci* $\mathbf{f}$ *este* $\mathbf{u}\mu$*-măsurabilă iar* $<\mathbf{uf}, z>$ *este* μ*-măsurabilă pentru orice* $z \in Z$.

3) *Dacă* $\mathbf{f}$ *este* $|\mathbf{u}|\,|\mu|$*-integrabilă, atunci* $\mathbf{f}$ *este* $\mathbf{u}\mu$*-integrabilă iar* $<\mathbf{uf}, z>$ este μ*-integrabilă pentru orice* $z \in Z$ *și*

$$<\int \mathbf{f}\,d(\mathbf{u}\mu), z> = \int <\mathbf{uf}, z>\,d\mu.$$

Prima parte a fiecăreia din cele trei propoziții, relative la măsura $\mathbf{u}\mu$, rezultă din inegalitatea $|\mathbf{u}\mu| \leqslant |\mathbf{u}|\,|\mu|$.

Din inegalitatea

$$\int^* |\mathbf{uf}|\,d\,|\mu| \leqslant \int^* |\mathbf{u}|\,|\mathbf{f}|\,d\,|\mu| = \int^* |\mathbf{f}|\,d(|\mathbf{u}|\,|\mu|)$$

rezultă că dacă $\mathbf{f}$ este $|\mathbf{u}|\,|\mu|$-neglijabilă, atunci $\mathbf{uf}$ este μ-neglijabilă. Dacă $\int^* |\mathbf{f}|\,d(|\mathbf{u}|\,|\mu|) < \infty$, atunci $\int^* |\mathbf{uf}|\,d\,|\mu| < \infty$.

Să presupunem că $\mathbf{f}$ este $|\mathbf{u}|\,|\mu|$-măsurabilă. Atunci funcția $\mathbf{f}\,|\mathbf{u}|$ este μ-măsurabilă. Deoarece funcția $|\mathbf{u}|$ este μ-măsurabilă, funcția $\mathbf{h}: T \to E$ definită prin

$$\mathbf{h}(t) = \frac{\mathbf{f}(t)\,|\mathbf{u}(t)|}{|\mathbf{u}(t)|} = \mathbf{f}(t) \text{ dacă } \mathbf{u}(t) \neq 0 \text{ și } \mathbf{h}(t) = 0 \text{ dacă } \mathbf{u}(t) = 0,$$

este μ-măsurabilă. Urmează că pentru orice $z \in Z$ funcția $< \mathbf{uh}, z >$ este μ-măsurabilă. Deoarece $\mathbf{u}(t)\,\mathbf{h}(t) = \mathbf{u}(t)\,\mathbf{f}(t)$, rezultă că pentru orice $z \in Z$ funcția $< \mathbf{uf}, z >$ este μ-măsurabilă.

Din cele de mai sus rezultă că dacă $\mathbf{f}$ este $|\mathbf{u}|\,|\mu|$-integrabilă, atunci $< \mathbf{uf}, z >$ este μ-integrabilă, oricare ar fi $z \in Z$.

Să presupunem că $\mathbf{f}$ este $|\mathbf{u}|\,|\mu|$-integrabilă.

Fie $(\mathbf{f}_n)$ un șir de funcții din $\mathcal{K}_E(T)$ astfel încît

$$\lim_{n\to\infty} \int |\mathbf{f} - \mathbf{f}_n|\, \mathrm{d}(|\mathbf{u}|\,|\mu|) = 0.$$

Funcțiile $\mathbf{f}$ și $\mathbf{f}_n$ sînt $\mathbf{u}\mu$-integrabile. Din inegalitățile

$$\left|\int \mathbf{f}\,\mathrm{d}(\mathbf{u}\mu) - \int \mathbf{f}_n\,\mathrm{d}(\mathbf{u}\mu)\right| \leqslant \int |\mathbf{f} - \mathbf{f}_n|\,\mathrm{d}\,|\mathbf{u}\mu| \leqslant \int |\mathbf{f} - \mathbf{f}_n|\,\mathrm{d}\,(|\mathbf{u}|\,|\mu|)$$

rezultă că

$$\lim_{n\to\infty} \int \mathbf{f}_n\,\mathrm{d}(\mathbf{u}\mu) = \int \mathbf{f}\,\mathrm{d}(\mathbf{u}\mu)$$

și pentru orice $z \in Z$

$$\lim_{n\to\infty} < \int \mathbf{f}_n\,\mathrm{d}(\mathbf{u}\mu), z > = < \int \mathbf{f}\,\mathrm{d}(\mathbf{u}\mu), z >.$$

Pe de altă parte, pentru orice $z \in Z$, funcțiile $< \mathbf{uf}_n, z >$ și $< \mathbf{uf}, z >$ sînt μ-integrabile. Din inegalitățile

$$\left|\int < \mathbf{uf}_n, \mathbf{z} > \mathrm{d}\mu - \int < \mathbf{uf}, z > \mathrm{d}\mu\right| \leqslant |z| \int |\mathbf{f}_n - \mathbf{f}|\,|\mathbf{u}|\,\mathrm{d}\,|\mu| =$$

$$= |z| \int |\mathbf{f}_n - \mathbf{f}|\,\mathrm{d}\,(|\mathbf{u}|\,|\mu|)$$

deducem că

$$\lim_{n\to\infty} \int < \mathbf{uf}_n, z > \mathrm{d}\mu = \int < \mathbf{uf}, z > \mathrm{d}\mu.$$

Dar pentru funcțiile $\mathbf{f}_n \in \mathcal{K}_E(T)$ avem

$$< \int \mathbf{f}_n\,\mathrm{d}(\mathbf{u}\mu), z > = \int < \mathbf{uf}_n, z > \mathrm{d}\mu.$$

Prin trecerea la limită obținem :

$$<\int \mathbf{f}\, d(\mathbf{u}\mu),\ z> = \int <\mathbf{uf},\ z>\, d\mu.$$

Corolar. *Fie* $\mathbf{u} : T \to \mathcal{L}^*(E, F)$ *o funcție Z-slab local* μ*-integrabilă. Să presupunem că avem*

$$|\mathbf{u}\mu| = |\mathbf{u}|\ |\mu|\ .$$

Fie funcția $\mathbf{f} : T \to E$.

1) *Dacă* $\mathbf{f}$ este $\mathbf{u}\mu$*-neglijabilă, atunci* $\mathbf{uf}$ *este* μ*-neglijabilă.*

2) *Dacă* $\mathbf{f}$ *este* $\mathbf{u}\mu$*-măsurabilă, atunci funcția* $<\mathbf{uf},\ z>$ *este* μ*-măsurabilă pentru orice* $z \in Z$.

3) *Dacă* $\mathbf{f}$ *este* $\mathbf{u}\mu$*-integrabilă, atunci funcția* $<\mathbf{uf},\ z>$ *este* μ*-integrabilă pentru orice* $z \in Z$ *și*

$$<\int \mathbf{f}\, d(\mathbf{u}\mu),\ z> = \int <\mathbf{uf},\ z>\, d\mu.$$

Funcțiile scalare au unele proprietăți suplimentare, în anumite condiții de numărabilitate pentru E și Z.

Propoziția 7. *Fie* $\mathbf{u} : T \to \mathcal{L}^*$ (E, F) *o funcție Z-slab local* μ*-integrabilă și* f *o funcție scalară definită pe* T.

1) *Dacă* f *este* $|\mathbf{u}|\ |\mu|$*-neglijabilă, atunci* f *este* $\mathbf{u}\mu$*-neglijabilă iar* $\mathbf{u}f$ *este* μ*-neglijabilă.*

2) *Dacă* f *este* $|\mathbf{u}|\ |\mu|$*-măsurabilă, atunci* f *este* $\mathbf{u}\mu$*-măsurabilă iar* $<\mathbf{u}xf,\ z>$ *este* μ*-măsurabilă pentru orice* $x \in E$ *și* $z \in Z$.

3) *Dacă* f *este* $|\mathbf{u}|\ |\mu|$*-integrabilă, atunci* f *este* $\mathbf{u}\mu$*-integrabilă iar* $<\mathbf{u}fx,\ z>$ *este* μ*-integrabilă pentru orice* $x \in E$ *și* $z \in Z$ *și avem*

$$<\int f\, d(\mathbf{u}\mu)\ x,\ \ z> = \int <\mathbf{u}fx,\ z>\, d\mu,$$

pentru $x \in E$ *și* $z \in Z$.

Reciproc, să presupunem că E *este de tip numărabil și că există o mulțime numărabilă* $S \subset Z$ *normată pentru* E.

În acest caz :

1′) *Dacă* $<\mathbf{u}fx,\ z>$ *este* μ*-neglijabilă pentru orice* $x \in E$ *și orice* $z \in Z$, *atunci* f *este neglijabilă în raport cu* $|\mathbf{u}|\ |\mu|$ *și în raport cu* $\mathbf{u}\mu$.

2′) *Dacă* f *este reală și dacă* $<\mathbf{u}fx,\ z>$ *este* μ*-măsurabilă pentru orice* $x \in E$ *și* $z \in Z$, *atunci* f *este măsurabilă în raport cu* $|\mathbf{u}|\ |\mu|$ *și în raport cu* $\mathbf{u}\mu$.

Dacă f este $|\mathbf{u}|\ |\mu|$-neglijabilă (măsurabilă, integrabilă), din inegalitatea $|\mathbf{u}\mu| \leqslant |\mathbf{u}|\ |\mu|$ rezultă că f este $\mathbf{u}\mu$-neglijabilă (măsurabilă, integrabilă).

Dacă f este $|\mathbf{u}|\,|\mu|$-neglijabilă, se arată ca în teorema 1 că $\mathbf{u}f$ este μ-neglijabilă și astfel proprietatea 1 este demonstrată.

Dacă f este $|\mathbf{u}|\ |\mu|$-măsurabilă (integrabilă), atunci pentru orice $x \in E$ funcția $fx : T \to E$ este $|\mathbf{u}|\ |\mu|$-măsurabilă (integrabilă) și din

teorema 2 deducem că funcția $< \mathbf{u}fx, z >$ este μ-măsurabilă (integrabilă) pentru orice $z \in Z$ și astfel și proprietățile 2) și 3) sînt demonstrate.

Reciproc, să presupunem că E și Z au proprietatea de numărabilitate din enunț.

Fie (x_n) un șir dens în E. Pentru orice $t \in T$ avem

$$|\mathbf{u}(t)|\ |f(t)| = |\mathbf{u}(t)f(t)| = \sup_{\substack{s \in S \\ n \in N}} \frac{|< \mathbf{u}(t)f(t)\ x_n,\ s >|}{|x_n|\ |s|}.$$

Din această egalitate rezultă că dacă $< \mathbf{u}fx, z >$ este μ-neglijabilă sau μ-măsurabilă pentru orice $x \in E$ și orice $z \in Z$, atunci $|f|\ |\mathbf{u}|$ este μ-neglijabilă respectiv μ-măsurabilă, deci $|f|$ este $|\mathbf{u}|\ |\mu|$-neglijabilă respectiv $|\mathbf{u}|\ |\mu|$-măsurabilă.

În acest fel proprietatea 1') este demonstrată.

Să presupunem acum că f este reală și că $< \mathbf{u}fx, z >$ este μ-măsurabilă pentru orice $x \in E$ și orice $z \in Z$.

Din cele de mai sus rezultă că $|f|$ este $|\mathbf{u}|\ |\mu|$-măsurabilă, iar din proprietatea 2 deducem că $|f| < \mathbf{u}x, z >$ este μ-măsurabilă pentru orice $x \in E$ și $z \in Z$.

Deoarece funcțiile $f < \mathbf{u}x, z >$ și $|f| < \mathbf{u}x, z >$ sînt μ-măsurabile, funcțiile

$$f^+ < \mathbf{u}x, z > = \frac{1}{2}(|f| + f) < \mathbf{u}x, z > \text{ și}$$

$$f^- < \mathbf{u}x, z > = \frac{1}{2}(|f| - f) < \mathbf{u}x, z >$$

sînt μ-măsurabile pentru orice $x \in E$ și $z \in Z$.

Repetînd raționamentul de mai sus, cu f^+ și cu f^- în loc de f, deducem că funcțiile $|f^+| = f^+$ și $|f^-| = f^-$ sînt $|\mathbf{u}|\ |\mu|$-măsurabile.

Atunci funcția $f = f^+ - f^-$ este $|\mathbf{u}|\,|\mu|$-măsurabilă și astfel și proprietatea 2') este demonstrată.

Corolar. *Să presupunem că E este de tip numărabil și că există o mulțime numărabilă $S \subset Z$ normantă pentru E.*

Fie $\mathbf{u} : T \to \mathcal{L}^*(E, F)$ o funcție Z-slab local μ-integrabilă astfel încît să avem

$$|\mathbf{u}\mu| = |\mathbf{u}|\ |\mu|.$$

1) *O funcție scalară f este $\mathbf{u}\mu$-neglijabilă dacă și numai dacă $< \mathbf{u}fx, z >$ este μ-neglijabilă pentru orice $x \in E$ și orice $z \in Z$.*

2) *O funcție reală f este $\mathbf{u}\mu$-măsurabilă, dacă și numai dacă $< \mathbf{u}fx, z >$ este μ-măsurabilă pentru orice $x \in E$ și orice $z \in Z$.*

Propoziția 8. *Să presupunem că există o mulțime numărabilă $S \subset Z$ normantă pentru F.*

Fie $\mathbf{u} : T \to \mathcal{L}^*(E, F)$ o funcție Z-slab local μ-integrabilă și $\mathbf{f} : T \to E$ o funcție.

Dacă $\mathbf{f}$ *este local* $|\mathbf{u}|\,|\mu|$*-integrabilă, atunci* $\mathbf{f}$ *este local* $\mathbf{u}\mu$*-integrabilă iar funcția* $\mathbf{u}f$ *este* Z*-slab local* μ*-integrabilă și avem*

$$\mathbf{f}(\mathbf{u}\mu) = (\mathbf{u}\mathbf{f})\mu.$$

Din inegalitatea $|\mathbf{u}\mu| \leqslant |\mathbf{u}|\,|\mu|$ rezultă că dacă f este local integrabilă în raport cu $|\mathbf{u}|\,|\mu|$, atunci f este local integrabilă și în raport cu $\mathbf{u}\mu$.

Deoarece f este local $|\mathbf{u}|\,|\mu|$-integrabilă, funcția f este $|\mathbf{u}|\,|\mu|$-măsurabilă, deci pentru orice $z \in Z$ funcția $< \mathbf{u}f, z >$ este μ-măsurabilă, adică $\mathbf{u}f$ este Z-slab μ-măsurabilă. Atunci funcția $| < \mathbf{u}f, z > |$ este μ-măsurabilă pentru orice $z \in Z$. Din egalitatea

$$|\mathbf{u}(t)f(t)| = \sup_{s \in S} \frac{| < \mathbf{u}(t)f(t), s > |}{|s|}, \text{ pentru } t \in T$$

deducem că $|\mathbf{u}f|$ este μ-măsurabilă. Pentru orice mulțime compactă $K \subset T$ avem

$$\int_K^* |\mathbf{u}f|\,\mathrm{d}\,|\mu| \leqslant \int_K^* |\mathbf{u}|\,|f|\,\mathrm{d}\,|\mu| = \int_K^* |f|\,\mathrm{d}\,(|\mathbf{u}|\,|\mu|) < \infty$$

deci $\mathbf{u}f$ este Z-slab local μ-integrabilă.

Fie $\varphi \in \mathcal{K}(T)$. Atunci $f\varphi$ este $|\mathbf{u}|\,|\mu|$-integrabilă, deci $< \mathbf{u}f\varphi, z >$ este μ-integrabilă pentru orice $z \in Z$ și avem

$$< \int f\varphi \mathrm{d}(\mathbf{u}\mu), z > = \int < \mathbf{u}f\varphi, z > \mathrm{d}\mu$$

adică

$$< \int \varphi \mathrm{d}\,[f(\mathbf{u}\mu)], z > = < \int \varphi \mathrm{d}\,[(\mathbf{u}f)\mu], z >$$

deci

$$f(\mathbf{u}\mu) = (f\mathbf{u})\mu.$$

Propoziția 9. *Fie* $\mathbf{u}: T \to \mathcal{L}^*(E, F)$ *o funcție* Z*-slab local* μ*-integrabilă și* f *o funcție scalară definită pe* T.

Dacă f *este local* $|\mathbf{u}|\,|\mu|$*-integrabilă, atunci* f *este local* $\mathbf{u}\mu$*-integrabilă iar* $\mathbf{u}f$ *este* Z*-slab local* μ*-integrabilă și avem*

$$f(\mathbf{u}\mu) = (f\mathbf{u})\mu.$$

Să presupunem că f este local $|\mathbf{u}|\,|\mu|$-integrabilă. Din inegalitatea $|\mathbf{u}\mu| \leqslant |\mathbf{u}|\,|\mu|$ deducem că f este local $\mathbf{u}\mu$-integrabilă.

Deoarece f este $|\mathbf{u}|\,|\mu|$-măsurabilă, rezultă că $< \mathbf{u}fx, z >$ este μ-măsurabilă pentru orice $x \in E$ și orice $z \in Z$, adică $\mathbf{u}f$ este Z-slab μ-măsurabilă.

Deoarece f este local $|\mathbf{u}|\,|\mu|$-integrabilă, funcția $|f|$ este local $|\mathbf{u}|\,|\mu|$-integrabilă, deci funcția $|\mathbf{u}f| = |\mathbf{u}|\,|f|$ este local $|\mu|$-integrabilă. Urmează că $\mathbf{u}f$ este Z-slab local μ-integrabilă.

Fie $h \in \mathcal{K}(T)$. Atunci fh este $|\mathbf{u}|\,|\mu|$-integrabilă deci fh este $\mathbf{u}\mu$-integrabilă iar $< \mathbf{u}fhx,\ z >$ este μ-integrabilă pentru orice $x \in E$ şi $z \in Z$ şi avem

$$< \int h\mathrm{d}\,[f(\mathbf{u}\mu)]x,\ z > = < \int fh\mathrm{d}\,(\mathbf{u}\mu)x,\ z > = \int < \mathbf{u}fhx,\ z > \mathrm{d}\mu =$$

$$= < \int h\mathrm{d}\,[(\mathbf{u}f)\mu]\,x,\ z >$$

de unde

$$\int h\mathrm{d}\,[f(\mathbf{u}\mu)] = \int h\mathrm{d}\,[(\mathbf{u}f)\mu]$$

adică

$$f(\mathbf{u}\mu) = (f\mathbf{u})\mu.$$

5. Integrarea în raport cu măsuri definite prin densităţi simplu local integrabile

Fie E, F şi G trei spaţii Banach.

Teorema 3. *Fie* $\mathbf{m} : \mathcal{K}(T) \to \mathcal{L}(F, G)$ *o măsură majorată,* $\mathbf{g} : T \to \mathcal{L}(E, F)$ *o funcţie simplu local* $\mathbf{m}$*-integrabilă, măsura* $\mathbf{gm} : \mathcal{K}(T) \to \mathcal{L}(E, G)$ *şi o funcţie* $\mathbf{f} : T \to E$.

1) *Dacă* $\mathbf{f}$ *este* $|\mathbf{g}|\,|\mathbf{m}|$*-neglijabilă, atunci* $\mathbf{f}$ *este* $\mathbf{gm}$*-neglijabilă iar* $\mathbf{fg}$ *este* $\mathbf{m}$*-neglijabilă.*

2) *Dacă* $\mathbf{f}$ *este* $|\mathbf{g}|\,|\mathbf{m}|$*-măsurabilă, atunci* $\mathbf{f}$ *este* $\mathbf{gm}$*-măsurabilă iar* $\mathbf{fg}$ *este* $\mathbf{m}$*-măsurabilă.*

3) *Dacă* $\mathbf{f}$ *este* $|\mathbf{g}|\,|\mathbf{m}|$*-integrabilă, atunci* $\mathbf{f}$ *este* $\mathbf{gm}$*-integrabilă iar* $\mathbf{fg}$ *este* $\mathbf{m}$*-integrabilă şi avem*

$$\int \mathbf{f}\mathrm{d}\,(\mathbf{gm}) = \int \mathbf{fg}\,\mathrm{d}\mathbf{m}.$$

Demonstraţia este aceeaşi ca a teoremei 2, fără a face apel la Z.

Corolar. *Fie* $\mathbf{m} : \mathcal{K}(T) \to \mathcal{L}(F, G)$ *o măsură majorată şi* $\mathbf{g} : T \to \mathcal{L}(E, F)$ *o funcţie simplu local* $\mathbf{m}$*-integrabilă astfel încît să avem*

$$|\mathbf{gm}| = |\mathbf{g}|\mathbf{m}|.$$

Dacă o funcţie $\mathbf{f} : T \to E$ *este* $\mathbf{gm}$*-neglijabilă (măsurabilă, integrabilă), atunci* $\mathbf{fg}$ *este* $\mathbf{m}$*-neglijabilă (măsurabilă, integrabilă)*

Pentru funcţii scalare avem propoziţia următoare:

Propoziţia 10. *Fie* $\mathbf{m} : \mathcal{K}(T) \to \mathcal{L}(F, G)$ *o măsură majorată,* $\mathbf{g} : T \to \mathcal{L}(E, F)$ *o funcţie simplu local* $\mathbf{m}$*-integrabilă, măsura* $\mathbf{gm} : \mathcal{K}(T) \to \mathcal{L}(E, G)$ *şi* f *o funcţie scalară.*

1) *Dacă* f *este* $|\mathbf{g}|\,|\mathbf{m}|$*-neglijabilă, atunci* f *este* $\mathbf{gm}$*-neglijabilă iar* $f\mathbf{g}$ *este* $\mathbf{m}$*-neglijabilă.*

2) *Dacă f este $|\mathbf{g}||\mathbf{m}|$-măsurabilă, atunci f este* $\mathbf{gm}$*-măsurabilă iar fgx este* $\mathbf{m}$*-măsurabilă, pentru orice $x \in E$.*

3) *Dacă f este $|\mathbf{g}||\mathbf{m}|$-integrabilă, atunci f este* $\mathbf{gm}$*-integrabilă iar fgx este* $\mathbf{m}$*-integrabilă pentru orice $x \in E$ și avem*

$$\int f\mathrm{d}(\mathbf{gm})x = \int fgx\,\mathrm{d}\mathbf{m}, \quad \text{pentru} \quad x \in E.$$

Reciproc, să presupunem că E este de tip numărabil. În acest caz:

1′) *Dacă fgx este* $\mathbf{m}$*-neglijabilă pentru orice $x \in E$, atunci f este* $\mathbf{gm}$*-neglijabilă și $|\mathbf{g}||\mathbf{m}|$-neglijabilă.*

2′) *Dacă f este reală și dacă fgx este* $\mathbf{m}$*-măsurabilă pentru orice $x \in E$, atunci f este $|\mathbf{g}||\mathbf{m}|$-măsurabilă și* $\mathbf{gm}$*-măsurabilă.*

Demonstrația este aceeași ca a propoziției 7, fără a mai folosi Z.

Corolar. *Fie* $\mathbf{m} : \mathcal{K}(T) \to \mathcal{L}(F, G)$ *o măsură majorată și* $\mathbf{g} : T \to \mathcal{L}^*(E, F)$ *o funcție simplu local* $\mathbf{m}$*-integrabilă. Să presupunem că E este de tip numărabil și că*

$$|\mathbf{gm}| = |\mathbf{g}||\mathbf{m}|.$$

Atunci:

1) *O funcție scalară f este* $\mathbf{gm}$*-neglijabilă dacă și numai dacă fgx este* $\mathbf{m}$*-neglijabilă pentru orice $x \in E$.*

2) *O funcție reală f este* $\mathbf{gm}$*-măsurabilă dacă și numai dacă fgx este* $\mathbf{m}$*-măsurabilă pentru orice $x \in E$.*

Propoziția 11 *Fie* $\mathbf{m} : \mathcal{K}(T) \to \mathcal{L}(F, G)$ *o măsură majorată,* $\mathbf{g} : T \to \mathcal{L}^*(E, F)$ *o funcție simplu local* $\mathbf{m}$*-integrabilă și* $\mathbf{f} : T \to E$ *o funcție.*

Dacă $\mathbf{f}$ *este local $|\mathbf{g}||\mathbf{m}|$-integrabilă, atunci* $\mathbf{f}$ *este local* $\mathbf{gm}$*-integrabilă iar* $\mathbf{fg}$ *este local* $\mathbf{m}$*-integrabilă și avem*

$$\mathbf{f(g)m} = \mathbf{(fg)m}.$$

Dacă $\mathbf{f}$ este local $|\mathbf{g}||\mathbf{m}|$-integrabilă, din inegalitatea $|\mathbf{gm}| \leqslant |\mathbf{g}||\mathbf{m}|$ rezultă că $\mathbf{f}$ este local $\mathbf{gm}$-integrabilă. Pe de altă parte, pentru orice $\varphi \in \mathcal{K}(T)$ funcția $\mathbf{f}\varphi$ este $|\mathbf{g}||\mathbf{m}|$-integrabilă, deci $\mathbf{gf}\varphi$ este $\mathbf{m}$-integrabilă și avem

$$\int \mathbf{f}\varphi\ \mathrm{d}(\mathbf{gm}) = \int \mathbf{fg}\,\varphi\,\mathrm{d}\mathbf{m}.$$

Rezultă că $\mathbf{fg}$ este local $\mathbf{m}$-integrabilă și că

$$\int \varphi \mathrm{d}\,[\mathbf{f(gm)}] = \int \varphi \mathrm{d}\,[\mathbf{(fg)m}], \quad \text{pentru} \quad \varphi \in \mathcal{K}(T)$$

deci

$$\mathbf{f(gm)} = \mathbf{(fg)m}.$$

Pentru funcții scalare, propoziția precedentă se enunță astfel:

Propoziția 12. *Fie* $\mathbf{m} : \mathcal{K}(T) \to \mathcal{L}(F, G)$ *o măsură majorată,* $\mathbf{g} : T \to \mathcal{L}^*(E, F)$ *o funcție simplu local* $\mathbf{m}$*-integrabilă și f o funcție scalară definită pe T.*

Dacă f este local $|\mathbf{g}||\mathbf{m}|$-integrabilă, atunci f este local $\mathbf{gm}$-integrabilă iar $f\mathbf{g}$ este simplu local $\mathbf{m}$-integrabilă și avem

$$f(\mathbf{gm}) = (f\mathbf{g})\mathbf{m}.$$

Demonstrația este aceeași ca la propoziția 9 fără a mai folosi Z.

6. Integrarea în raport cu măsuri definite prin densități local integrabile

Fie E, F și X trei spații Banach.

Vom considera trei cazuri, după cum m, g sau f sînt scalare.

Să considerăm mai întîi cazul cînd m este *scalară*.

Se va arăta mai departe (teorema 4, § 18) că dacă μ este o măsură scalară și dacă $\mathbf{g} : T \to X$ este local μ -integrabilă avem $|\mathbf{g}\mu| = |\mathbf{g}||\mu|$.

Teoremele 2 și 3 și corolariile lor se particularizează astfel:

Teorema 4. *Fie μ o măsură scalară, $\mathbf{g} : T \to \mathcal{L}(E, F)$ o funcție local μ-integrabilă, măsura $\mathbf{g}\mu : \mathcal{K}(T) \to \mathcal{L}(E, F)$ și o funcție $\mathbf{f} : T \to E$.*

Dacă $\mathbf{f}$ este $|\mathbf{g}||\mu|$-neglijabilă (măsurabilă, integrabilă), atunci $\mathbf{fg}$ este μ-neglijabilă (măsurabilă, integrabilă).

Dacă $\mathbf{f}$ este $|\mathbf{g}||\mu|$-integrabilă, atunci $\mathbf{f}$ este $\mathbf{g}\mu$-integrabilă și avem

$$\int \mathbf{f}\mathrm{d}(\mathbf{g}\mu) = \int \mathbf{fg}\mathrm{d}\mu.$$

Propozițiile 8 și 11 se particularizează astfel:

Propoziția 13. *Fie μ o măsură scalară, $\mathbf{g} : T \to \mathcal{L}(E, F)$ o funcție local μ-integrabilă și $\mathbf{f} : T \to E$ o funcție.*

Dacă $\mathbf{f}$ este local $|\mathbf{g}||\mu|$-integrabilă, atunci $\mathbf{f}$ este local $\mathbf{g}\mu$-integrabilă iar $\mathbf{fg}$ este local μ-integrabilă și avem

$$\mathbf{f}(\mathbf{g}\mu) = (\mathbf{fg})\mu.$$

Să considerăm acum cazul cînd g este *scalară*.

Se va arăta mai departe (teorema 5, § 18) că dacă $\mathbf{m} : \mathcal{K}(T) \to X$ este o măsură majorată iar g este o funcție *scalară* local $\mathbf{m}$-integrabilă, atunci $|g\mathbf{m}| = |g||\mathbf{m}|$.

Teoremele 3 și 4 se completează astfel:

Teorema 5. *Fie $\mathbf{m} : \mathcal{K}(T) \to \mathcal{L}(E, F)$ o măsură majorată, g o funcție scalară local $\mathbf{m}$-integrabilă, măsura $g\mathbf{m} : \mathcal{K}(T) \to \mathcal{L}(E, F)$ și $\mathbf{f} : T \to E$ o funcție.*

Funcția $\mathbf{f}$ este $|g||\mathbf{m}|$-neglijabilă (măsurabilă, integrabilă) dacă și numai dacă $\mathbf{f}g$ este $\mathbf{m}$-neglijabilă (măsurabilă, integrabilă).

Dacă $\mathbf{f}$ este $|g||\mathbf{m}|$-integrabilă, atunci $\mathbf{f}$ este $g\mathbf{m}$-integrabilă și avem

$$\int \mathbf{f}\mathrm{d}(g\mathbf{m}) = \int \mathbf{f}g\,\mathrm{d}\mathbf{m}.$$

Să presupunem că $\mathbf{f}g$ este $\mathbf{m}$-neglijabilă. Atunci funcția $|\mathbf{f}g| = |\mathbf{f}||g|$ este $|\mathbf{m}|$-neglijabilă, deci $|\mathbf{f}|$ este $|g||\mathbf{m}|$-neglijabilă, adică $\mathbf{f}$ este $|g||\mathbf{m}|$-neglijabilă.

Să presupunem că $\mathbf{f}g$ este $\mathbf{m}$-măsurabilă. Funcția scalară h definită pe T astfel:

$$h(t) = \begin{cases} \dfrac{|g(t)|}{g(t)} & \text{dacă } g(t) \neq 0 \\ 0 & \text{dacă } g(t) = 0 \end{cases}$$

este $\mathbf{m}$-măsurabilă și deci funcția $\mathbf{f}|g| = \mathbf{f}gh$ este $|\mathbf{m}|$-măsurabilă. Rezultă că $\mathbf{f}$ este $|g||\mathbf{m}|$-măsurabilă.

Dacă $\mathbf{f}g$ este $\mathbf{m}$-integrabilă, atunci $\mathbf{f}g$ este $\mathbf{m}$-măsurabilă iar funcția $|\mathbf{f}g| = |\mathbf{f}||g|$ este $|\mathbf{m}|$-integrabilă. Rezultă că $\mathbf{f}$ este $|g||\mathbf{m}|$-măsurabilă iar $|\mathbf{f}|$ este $|g||\mathbf{m}|$-integrabilă, deci $\mathbf{f}$ este $|g||\mathbf{m}|$-integrabilă. Celelalte afirmații rezultă din teorema 4, considerînd $\mathbf{g}: T \to \mathcal{L}(E, F)$.

Propoziția 14. *Fie* $\mathbf{m}: \mathcal{K}(T) \to \mathcal{L}(E, F)$ *o măsură majorată,* g *o funcție scalară local* $\mathbf{m}$*-integrabilă și măsura* $g\mathbf{m}: \mathcal{K}(T) \to \mathcal{L}(E, F)$.

1) *O funcție* $\mathbf{f}: T \to \mathcal{L}^*(H, E)$ *este simplu local* $|g||\mathbf{m}|$*-integrabilă dacă și numai dacă* $\mathbf{f}g$ *este simplu local* $\mathbf{m}$*-integrabilă. Dacă* $\mathbf{f}$ *este simplu local* $|g||\mathbf{m}|$*-integrabilă, atunci* $\mathbf{f}$ *este simplu local* $g\mathbf{m}$*-integrabilă și avem*

$$\mathbf{f}(g\mathbf{m}) = (\mathbf{f}g)\mathbf{m}.$$

2) *O funcție* $\mathbf{f}: T \to E$ *este local* $|g||\mathbf{m}|$*-integrabilă dacă și numai dacă* $\mathbf{f}g$ *este local* $\mathbf{m}$*-integrabilă. Dacă* $\mathbf{f}$ *este local* $|g||\mathbf{m}|$*-integrabilă, avem*

$$\mathbf{f}(g\mathbf{m}) = (\mathbf{f}g)\mathbf{m}.$$

Dacă $\mathbf{f}: T \to \mathcal{L}^*(H,E)$ este simplu local $|g||\mathbf{m}|$-integrabilă, din inegalitatea $|g\mathbf{m}| \leqslant |g||\mathbf{m}|$ rezultă că $\mathbf{f}$ este simplu local $g\mathbf{m}$-integrabilă. Rezultă, de asemenea, că $|\mathbf{f}|$ este local $|g||\mathbf{m}|$-integrabilă iar $\mathbf{f}x$ este $|g||\mathbf{m}|$-măsurabilă pentru orice $x \in H$. Atunci funcția $|\mathbf{f}g| = |\mathbf{f}|\,|g|$ este local $\mathbf{m}$-integrabilă iar $\mathbf{f}xg$ este $\mathbf{m}$-măsurabilă pentru orice $x \in H$, deci $\mathbf{f}g$ este simplu local $\mathbf{m}$-integrabilă. Pentru orice $\varphi \in \mathcal{K}(T)$ și $x \in H$ funcția $\varphi x\mathbf{f}$ este $g\mathbf{m}$-integrabilă iar $\varphi x\mathbf{f}g$ este $\mathbf{m}$-integrabilă și avem

$$\int \varphi x\mathbf{f}\, \mathrm{d}(g\mathbf{m}) = \int \varphi x\mathbf{f}g\, \mathrm{d}\mathbf{m}$$

de unde

$$\int \varphi\, \mathrm{d}[\mathbf{f}(g\mathbf{m})] \cdot x = \int \varphi\, \mathrm{d}[\mathbf{f}g)\mathbf{m}] \cdot x$$

deci

$$\mathbf{f}(g\mathbf{m}) = (\mathbf{f}g)\mathbf{m}.$$

Dacă $\mathbf{f}g$ este simplu local $\mathbf{m}$-integrabilă, atunci funcția $|\mathbf{f}g| = |\mathbf{f}||g|$ este local $|\mathbf{m}|$-integrabilă și $\mathbf{f}gx$ este $|\mathbf{m}|$-măsurabilă pentru orice $x \in H$.

Atunci $|\mathbf{f}|$ este local $|g||\mathbf{m}|$-integrabilă iar $\mathbf{f}x$ este $|g||\mathbf{m}|$-măsurabilă, deci $\mathbf{f}$ este simplu local $|g||\mathbf{m}|$-integrabilă.

Partea a doua rezultă din prima parte, luînd $H = R$.

Propoziția 15. *Fie* μ *o măsură scalară și* g *o funcție scalară local* μ*-integrabilă.*

O funcție $\mathbf{f} : T \to \mathcal{L}^*(E, F)$ *este* Z*-slab local* $|g||\mu|$*-integrabilă, dacă și numai dacă* $\mathbf{fg}$ *este* Z*-slab local* μ*-integrabilă. Dacă* $\mathbf{f}$ *este* Z*-slab local* $|g||\mu|$*-integrabilă, atunci* $\mathbf{f}$ *este* Z*-slab local* $g\mu$*-integrabilă și avem*

$$\mathbf{f}(g\mu) = (\mathbf{f}g)\mu.$$

Demonstrația este asemănătoare cu aceea a propoziției 14.

Să considerăm, în sfîrșit, cazul cînd f este *scalară*.

Propoziția 10 se precizează astfel :

Teorema 6. *Fie* $\mathbf{m} : \mathcal{K}(T) \to \mathcal{L}(E, F)$ *măsură majorată,* $\mathbf{g} : T \to E$ *o funcție local* $\mathbf{m}$*-integrabilă, măsura produs* $\mathbf{gm} : \mathcal{K}(T) \to E$ *și* f *o funcție scalară definită pe* T.

1) *Dacă funcția* f *este* $|\mathbf{g}||\mathbf{m}|$*-neglijabilă, atunci* f *este* $\mathbf{gm}$*-neglijabilă iar* $f\mathbf{g}$ *este* $\mathbf{m}$*-neglijabilă.*

1′) *Dacă* $f\mathbf{g}$ *este* $\mathbf{m}$*-neglijabilă, atunci* f *este* $|\mathbf{g}||\mathbf{m}|$*-neglijabilă și* $\mathbf{gm}$*-neglijabilă.*

2) *Dacă* f *este* $|\mathbf{g}||\mathbf{m}|$*-măsurabilă (integrabilă), atunci* f *este* $\mathbf{gm}$*-măsurabilă (integrabilă) iar* $f\mathbf{g}$ *este* $\mathbf{m}$*-măsurabilă (integrabilă). Dacă* f *este* $|\mathbf{g}||\mathbf{m}|$*-integrabilă, avem*

$$\int f \, \mathrm{d}(\mathbf{gm}) = \int f\mathbf{g} \, \mathbf{dm}.$$

2′) *Dacă* f *este reală și dacă* $f\mathbf{g}$ *este* $\mathbf{m}$*-măsurabilă (integrabilă), atunci* f *este măsurabilă (integrabilă) în raport cu* $|\mathbf{g}||\mathbf{m}|$ *și în raport cu* $\mathbf{gm}$.

Demonstrația este aceeași ca a propoziției 7.

Corolar. *Fie* $\mathbf{m} : \mathcal{K}(T) \to \mathcal{L}(E,F)$ *o măsură majorată și* $\mathbf{g} : T \to E$ *o funcție local* $\mathbf{m}$*-integrabilă, astfel încît să avem*

$$|\mathbf{g}||\mathbf{m}| = |\mathbf{g}||\mathbf{m}|.$$

O funcție reală f *este* $\mathbf{gm}$*-neglijabilă (măsurabilă, integrabilă), dacă și numai dacă* $f\mathbf{g}$ *este* $\mathbf{m}$*-neglijabilă (măsurabilă, integrabilă).*

Propoziția 12 se particularizează astfel :

Propoziția 16. *Fie* $\mathbf{m} : \mathcal{K}(T) \to \mathcal{L}(E, F)$ *o măsură majorată,* $\mathbf{g} : T \to E$ *o funcție local integrabilă și* f *o funcție scalară.*

Dacă f *este local* $|\mathbf{g}||\mathbf{m}|$*-integrabilă, atunci* f *este local* $\mathbf{gm}$*-integrabilă iar* $f\mathbf{g}$ *este local* $\mathbf{m}$*-integrabilă și avem*

$$f(\mathbf{gm}) = (f\mathbf{g})\mathbf{m}.$$

Reciproc, dacă f *este reală și dacă funcția* $f\mathbf{g}$ *este local* $\mathbf{m}$*-integrabilă, atunci* f *este local integrabilă în raport cu* $|\mathbf{g}||\mathbf{m}|$ *și în raport cu* $\mathbf{gm}$.

§ 17. PROPRIETĂȚILE MĂSURILOR DEFINITE PRIN DENSITĂȚI

1. Proprietăți algebrice

Dăm mai întîi proprietățile algebrice ale măsurilor definite prin densități.

Propoziția 1. *Fie* $\mathbf{m}$ *o măsură majorată,* $\mathbf{f}$ *și* $\mathbf{g}$ *două funcții definite pe* T *și* α *un scalar. Dacă măsurile* $\mathbf{fm}$, $\mathbf{gm}$ *și* $(\mathbf{f}+\mathbf{g})\mathbf{m}$ *sînt definite, atunci avem*

$$(\mathbf{f}+\mathbf{g})\mathbf{m} = \mathbf{fm}+\mathbf{gm} \text{ și } (\alpha\mathbf{f})\mathbf{m} = \alpha(\mathbf{fm}).$$

Demonstrația este imediată.

Observație. Dacă $\mathbf{f}$ și $\mathbf{g}$ sînt, de exemplu, simplu local $\mathbf{m}$ -integrabile, nu rezultă că $\mathbf{f}+\mathbf{g}$ este simplu local $\mathbf{m}$ -integrabilă. De aceea în enunțul propoziției s-a impus condiția ca și măsura $(\mathbf{f}+\mathbf{g})\mathbf{m}$ să fie definită.

Propoziția 2. *Fie* $\mathbf{m}$ *și* $\mathbf{n}$ *două măsuri majorate,* α *un scalar și* $\mathbf{g}$ *o funcție definită pe* T. *Dacă măsurile* $\mathbf{gm}$ *și* $\mathbf{gn}$ *sînt definite, atunci măsurile* $\mathbf{g}(\mathbf{m}+\mathbf{n})$ *și* $\mathbf{g}(\alpha\mathbf{m})$ *sînt definite și avem*

$$\mathbf{g}(\mathbf{m}+\mathbf{n}) = \mathbf{gm}+\mathbf{gn} \text{ și } \mathbf{g}(\alpha\mathbf{m}) = \alpha(\mathbf{gm}).$$

Demonstrația este imediată.

2. Măsuri cu densități local integrabile și baze pozitive

Fie E un spațiu Banach și μ o măsură *pozitivă*.

Teorema 1. *Pentru orice funcție local* μ *-integrabilă* $\mathbf{g}: T \to E$ *avem*

$$|\mathbf{g}\mu| = |\mathbf{g}|\mu.$$

Să presupunem mai întîi că $|\mathbf{g}(t)| \equiv 1$. Fie φ o funcție $\geqslant 0$ din $\mathcal{K}(T)$ și $0 < a < 1$; fie K suportul lui φ. Există o funcție μ -măsurabilă $\mathbf{g}'$, definită pe T, cu valori în dualul E' al lui E, astfel încît să avem

$$a|\mathbf{g}(t)| \leqslant \ < \mathbf{g}(t), \mathbf{g}'(t) > \text{ și } |\mathbf{g}'(t)| = 1$$

μ -aproape peste tot pe K (corolarul 2 al propoziției 11, § 11).

Fie $\varepsilon > 0$. Există o mulțime compactă $K' \subset K$ astfel încît $\mu(K-K') < \varepsilon$ și restricția lui $\mathbf{g}'$ la K' să fi continuă. Restricția lui $\mathbf{g}'$ la K' se poate prelungi la o funcție *continuă* $\mathbf{f}': T \to E'$, cu suport compact astfel încît $\|\mathbf{f}'\| \leqslant (2-a)\|\mathbf{g}'\|$. Avem, așadar,

$$\mathbf{f}'(t) = \mathbf{g}'(t), \text{ pentru } t \in K - K'$$

și

$$|\mathbf{f}'(t)| \leqslant (2-a), \text{ pentru } t \in T.$$

Atunci

$$a\mu(\varphi) = a\int |\mathbf{g}(t)|\,\varphi(t)\,d\mu(t) \leqslant \int <\mathbf{g}(t),\ \mathbf{g}'(t)>\varphi(t)\,d\mu(t) =$$

$$= \left|\int <\mathbf{g}, \mathbf{f}'>\varphi d\mu + \int <\mathbf{g},\ \mathbf{g}'-\mathbf{f}'>\varphi d\mu\right| \leqslant \left|\int <\mathbf{g}, \mathbf{f}'\varphi> d\mu\right| +$$

$$+ \left|\int_{K-K'} <\mathbf{g},\ \mathbf{g}'-\mathbf{f}'>\varphi d\mu\right|$$

Observînd că

$$\left|\int <\mathbf{g}, \mathbf{f}'\varphi> d\mu\right| = \left|\int \mathbf{f}'\varphi d(\mathbf{g}\mu)\right| \leqslant \int |\mathbf{f}'|\,\varphi d\,|\mathbf{g}\mu| \leqslant (2-a)\int \varphi d\,|\mathbf{g}\mu| =$$

$$= (2-a)\,|\mathbf{g}\mu|(\varphi)$$

și

$$\left|\int_{K-K'} <\mathbf{g},\ \mathbf{g}'-\mathbf{f}'>\varphi d\mu\right| \leqslant \int_{K-K'} |\mathbf{g}|\,(|\mathbf{g}'|+|\mathbf{f}'|)\,\varphi d\mu =$$

$$= \int_{K-K'} (1+|\mathbf{f}'|)\,\varphi d\mu \leqslant (3-a)\,\|\varphi\|\,\mu(K-K') \leqslant (3-a)\,\|\varphi\|\,\varepsilon$$

deducem

$$a\mu(\varphi) \leqslant (2-a)\,|\mathbf{g}\mu|(\varphi) + (3-a)\,\|\varphi\|\,\varepsilon.$$

Făcînd $a \to 1$ și $\varepsilon \to 0$, obținem

$$\mu(\varphi) \leqslant |\mathbf{g}\mu|(\varphi).$$

Deoarece funcția $\varphi \in \mathcal{K}_+(T)$ a fost aleasă arbitrar, rezultă $\mu \leqslant |\mathbf{g}\mu|$. Cum avem de asemenea $|\mathbf{g}\mu| \leqslant |\mathbf{g}|\,\mu = \mu$, deducem

$$|\mathbf{g}\mu| = |\mathbf{g}|\,\mu.$$

Fie acum $\mathbf{g} : T \to E$ o funcție local μ-integrabilă oarecare. Să notăm

$$\mathbf{h}(t) = \begin{cases} \dfrac{\mathbf{g}(t)}{|\mathbf{g}(t)|} \text{ dacă } \mathbf{g}(t) \neq 0, \\ x_0 \in E \text{ cu } |x_0| = 1, \text{ dacă } \mathbf{g}(t) = 0. \end{cases}$$

Avem $|\mathbf{h}(t)| = 1$ și $\mathbf{h}|\mathbf{g}| = \mathbf{g}$. Deoarece $\mathbf{g}$ este μ-măsurabilă, funcția $\mathbf{h}$ este $\lambda = |\mathbf{g}|\mu$-măsurabilă.

Din prima parte rezultă că $|\mathbf{h}\lambda| = \lambda$. Atunci

$$|\mathbf{g}\mu| = \left|\mathbf{h}\,|\mathbf{g}|\,\mu\right| = |\mathbf{h}\lambda| = \lambda = |\mathbf{g}|\,\mu$$

și teorema este demonstrată.

Observație. Se va arăta mai departe (teorema 4, § 18) că egalitatea $|g\mu| = |g|\,|\mu|$ rămîne adevărată pentru orice măsură *scalară* μ și orice funcție g local μ -integrabilă. Va rezulta că propozițiile 3 și 4 rămîn valabile și dacă μ este o măsură *scalară*.

Propoziția 3. *Fie* $g : T \to E$ *o funcție local* μ *-integrabilă. Avem* $g\mu = 0$ *dacă și numai dacă* g *este* μ *-neglijabilă.*

Dacă g este μ-neglijabilă, atunci pentru orice $\varphi \in \mathcal{K}(T)$ funcția φg este μ -neglijabilă deci

$$\int \varphi \, d(g\mu) = \int \varphi g \, d\mu = 0$$

adică $g\mu = 0$.

Reciproc, dacă $g\mu = 0$, atunci $|g|\,|\mu| = |g\mu| = 0$. Urmează că funcția φ_T este $|g\mu|$-neglijabilă, deci $|g|\,|\mu|$-neglijabilă și deci funcția $\varphi_T |g| = |g|$ este μ -neglijabilă, adică g este μ -neglijabilă.

Propoziția 4. *Fie* $g_1, g_2 : T \to E$ *două funcții local* μ *-integrabile. Avem* $g_1\mu = g_2\mu$ *dacă și numai dacă* $g_1(t) = g_2(t)$, μ *-aproape peste tot.*

Dacă $g_1 = g_2$, μ -aproape peste tot, rezultă imediat că $g_1\mu = g_2\mu$.

Reciproc, dacă $g_1\mu = g_2\mu$, atunci $(g_1 - g_2)\mu = 0$ deci $g_1 - g_2$ este μ -neglijabilă și deci $g_1 = g_2$, μ -aproape peste tot.

Măsurile definite prin *densități reale* în raport *cu baze pozitive* au proprietăți suplimentare.

Propoziția 5. *Dacă* μ *este o măsură pozitivă și* g *este o funcție reală local* μ *-integrabilă, atunci*

$$(g\mu)^+ = g^+\mu \quad \text{și} \quad (g\mu)^- = g^-\mu.$$

Într-adevăr,

$$(g\mu)^+ = \frac{1}{2}(|g\mu| + g\mu) = \frac{1}{2}(|g|\mu + g\mu) = \frac{1}{2}(|g| + g)\mu = g^+\mu$$

și

$$(g\mu)^- = \frac{1}{2}(|g\mu| - g\mu) = \frac{1}{2}(|g|\mu - g\mu) = \frac{1}{2}(|g| - g)\mu = g^-\mu.$$

Propoziția 6. *Fie* μ *o măsură pozitivă și* g *o funcție reală local* μ *-integrabilă. Avem* $g\mu \geqslant 0$ *dacă și numai dacă* $g(t) \geqslant 0$, μ *-aproape peste tot.*

Să presupunem că $g\mu \geqslant 0$. Atunci $|g|\mu = |g\mu| = g\mu$, deci, conform propoziției 4, avem $|g(t)| = g(t)$ μ-aproape peste tot, deci $g(t) \geqslant 0$ μ-aproape peste tot.

Reciproc, dacă $g(t) \geqslant 0$ μ-aproape peste tot, rezultă imediat că $g\mu \geqslant 0$.

Propoziția 7. *Fie* μ *o măsură pozitivă,* g_1 *și* g_2 *două funcții reale local* μ*-integrabile. Avem* $g_1\mu \leqslant g_2\mu$ *dacă și numai dacă* $g_1(t) \leqslant g_2(t)$, μ*-aproape peste tot.*

Într-adevăr, $g_1\mu \leqslant g_2\mu$ dacă și numai dacă $(g_2-g_1)\mu = g_2\mu - g_1\mu \geqslant 0$, deci dacă și numai dacă $g_2(t) - g_1(t) \geqslant 0$, μ -aproape peste tot, adică dacă și numai dacă $g_1(t) = g_2(t)$, μ -aproape peste tot.

Propoziția 8. *Fie μ o măsură pozitivă. Dacă g_1 și g_2 sînt două funcții reale local μ -integrabile, atunci funcțiile* $\sup(g_1, g_2)$ *și* $\inf(g_1, g_2)$ *sînt local μ-integrabile și*

$$\sup(g_1, g_2)\mu = \sup(g_1\mu, g_2\mu),$$
$$\inf(g_1, g_2)\mu = \inf(g_1\mu, g_2\mu).$$

Să notăm $f = \sup(g_1, g_2)$ și $g = \inf(g_1, g_2)$. Deoarece g_1 și g_2 sînt μ-măsurabile, funcțiile f și g sînt μ-măsurabile.

Fie $K \subset T$ o mulțime compactă. Din inegalitatea $|f| \leqslant |g_1| + |g_2|$ rezultă

$$\int_K^* |f|\,d\mu \leqslant \int_K^* |g_1|\,d\mu + \int_K^* |g_2|\,d\mu < \infty$$

deci f este local μ -integrabilă.

Din inegalitatea $|g| \leqslant |g_1| + |g_2|$ rezultă că g este local μ-integrabilă

Din egalitatea

$$\sup(x, y) = \frac{1}{2}(x + y + |x - y|)$$

valabilă în orice spațiu vectorial ordonat, deducem

$$\sup(g_1, g_2)\mu = \frac{1}{2}(g_1+g_2+|g_1-g_2|)\mu =$$

$$= \frac{1}{2}(g_1\mu + g_2\mu + |g_1 - g_2|\mu) = \frac{1}{2}(g_1\mu + g_2\mu + |g_1\mu - g_2\mu|) = \sup(g_1\mu, g_2\mu).$$

Din egalitatea

$$\inf(x, y) = -\sup(-x, -y)$$

deducem

$$\inf(g_1 g_2)\mu = -\sup(-g_1, -g_2)\mu = -\sup(-g_1\mu, -g_2\mu) = \inf(g_1\mu, g_2\mu).$$

Propoziția 9. *Fie μ o măsură pozitivă și (g_n) un șir crescător (μ -aproape peste tot) de funcții reale local μ -integrabile. Pentru ca șirul de măsuri $(g_n\mu)$ să fie majorat, este necesar și suficient ca funcția* $\sup_n g_n$ *să fie local μ -integrabilă. În acest caz avem*

$$\sup_n (g_n\mu) = (\sup_n g_n)\mu.$$

Modificînd funcțiile g_n pe o mulțime μ -neglijabilă, putem presupune că șirul (g_n) este crescător peste tot pe T. Să presupunem că șirul de măsuri $(g_n\mu)$ este majorat de o măsură λ. Pentru orice funcție $f \geqslant 0$ din $\mathcal{K}_+(T)$ avem atunci

$$\sup_n \int f g_n\,d\mu \leqslant \lambda(f) < +\infty.$$

Rezultă că funcția $\sup_n fg_n = f \sup_n g_n$ este μ -integrabilă și că

$$\int f \sup_n g_n \, d\mu = \int \sup_n fg_n \, d\mu = \sup_n \int fg_n \, d\mu.$$

Aceasta înseamnă că funcția $\sup_n g_n$ este local μ -integrabilă și că $(\sup_n g_n)\,\mu = \sup_n (g_n \mu)$.

Reciproc, dacă funcția $\sup_n g_n$ este local μ -integrabilă, atunci măsurile $g_n \mu$ sînt majorate de măsura $(\sup_n g_n)\mu$.

Măsurile definite prin *densități pozitive* în raport cu *măsuri reale* au următoarele proprietăți :

Propoziția 10. *Fie* μ *și* ν *două măsuri reale. Dacă* $\mu \leqslant \nu$ *și dacă* $g \geqslant 0$ *este o funcție local integrabilă în raport cu* μ *și cu* ν, *atunci*

$$g\mu \leqslant g\nu.$$

Demonstrația este imediată.

Observație. Din egalitatea $|g\mu| = |g|\,|\mu|$ care va fi demonstrată mai departe (teorema 4, § 18) va rezulta că dacă μ este o măsură *reală* iar $g \geqslant 0$ este o funcție local μ -integrabilă, atunci avem

$$(g\mu)^+ = g\mu^+ \text{ și } (g\mu)^- = g\mu^-.$$

Propoziția 11. *Fie* μ *și* ν *două măsuri reale pe* T. *Dacă funcția* $\mathbf{g} : T \to E$ *este local integrabilă pentru măsurile* μ *și* ν, *atunci* $\mathbf{g}$ *este local integrabilă pentru măsurile* $\sup(\mu, \nu)$ *și* $\inf(\mu, \nu)$. *Dacă* g *este pozitivă avem*

$$g(\sup(\mu, \nu)) = \sup(g\mu, g\nu),$$

$$g(\inf(\mu, \nu)) = \inf(g\mu, g\nu).$$

Din egalitățile

$$\sup(\mu, \nu) = \frac{1}{2}(\mu + \nu + |\mu - \nu|), \quad \inf(\mu, \nu) = -\sup(-\mu, -\nu),$$

valabile în orice spațiu vectorial ordonat, deducem

$$|\sup(\mu, \nu)| \leqslant |\mu| + |\nu|, \quad |\inf(\mu, \nu)| \leqslant |\mu| + |\nu|$$

deci, dacă $\mathbf{g}$ este local integrabilă petru μ și ν, atunci $\mathbf{g}$ este local integrabilă și pentru $\sup(\mu, \nu)$ și $\inf(\mu, \nu)$.

Dacă g este pozitivă, avem apoi

$$g(\sup(\mu, \nu)) = g\left(\frac{1}{2}(\mu + \nu + |\mu - \nu|)\right) = \frac{1}{2}(g\mu + g\nu + g|\mu - \nu|) =$$

$$= \frac{1}{2}(g\mu + g\nu + |g\mu - g\nu|) = \sup(g\mu, g\nu))$$

și

$$g(\inf(\mu, \nu)) = g(-\sup(-\mu, -\nu)) = -\sup(-g\mu, -g\nu) = \inf(g\mu, g\nu).$$

3. Măsuri cu densități operatoriale

Fie E și F două spații Banach îșI $Z \subset F'$ un subspațiu normant pentru F.

Fie μ o măsură *pozitivă* pe T.

Fie $\mathbf{u}, \mathbf{v} : T \to \mathcal{L}^*(E, F)$ două funcții. Reamintim că am folosit notația $\mathbf{u} \equiv \mathbf{v}$ dacă pentru orice $x \in E$ și orice $z \in Z$ avem

$$< \mathbf{u}(t)x,\ z > = < \mathbf{v}(t)x,\ z >,\ \mu\text{-aproape peste tot.}$$

Din propoziția 4 rezultă

Propoziția 12. *Fie* $\mathbf{u}, \mathbf{v} : T \to \mathcal{L}^*(E, F)$ *două funcții* Z *-slab local* μ *-integrabile. Avem* $\mathbf{u}\mu = \mathbf{v}\mu$ *dacă și numai dacă* $\mathbf{u} \equiv \mathbf{v}$.

Într-adevăr, dacă $\mathbf{u}\mu = \mathbf{v}\mu$, atunci, pentru orice funcție $\varphi \in \mathcal{X}(T)$, avem

$$\int \varphi \mathrm{d}(\mathbf{u}\mu) = \int \varphi \mathrm{d}(\mathbf{v}\mu),$$

deci pentru orice $x \in E$ și orice $z \in Z$ avem

$$< \int \varphi \mathrm{d}(\mathbf{u}\mu)\, x,\ z > = < \int \varphi \mathrm{d}(\mathbf{v}\mu)\, x,\ z >$$

adică

$$\int < \mathbf{u}x,\ z > \varphi \mathrm{d}\mu = \int < \mathbf{v}x,\ z > \varphi \mathrm{d}\mu, \text{ pentru } \varphi \in \mathcal{X}(T)$$

de unde, în baza propoziției 4,

$$< \mathbf{u}(t)x,\ z > = < \mathbf{v}(t)x,\ z >,\ \mu\text{-aproape peste tot adică } \mathbf{u} \equiv \mathbf{v}.$$

Reciproc, dacă $\mathbf{u} \equiv \mathbf{v}$, atunci urmînd raționamentul invers, deducem că $\mathbf{u}\mu = \mathbf{v}\mu$.

Observație. Putem avea $\mathbf{u}\mu = \mathbf{v}\mu$ și totuși $\mathbf{u}(t) \neq \mathbf{v}(t)$ pentru orice $t \in T$.

Exemple. 1) Să luăm $T = [0, 1]$, μ măsura Lebesgue pe T, $E = \mathcal{C}(T)$ spațiul funcțiilor reale continue pe T cu topologia definită de norma $\|f\| = \sup_{t \in T} |f(t)|$, Z spațiul funcțiilor reale z definite pe T astfel încît

$$\|z\| = \sum_{t \in T} |z(t)| < \infty$$

și $F = Z'$. Spațiul F este spațiul funcțiilor reale măsurabile y definite pe T astfel încît

$$\|y\| = \sup_{t \in T} |y(t)| < \infty$$

Spațiul E este de tip numărabil dar Z nu este de tip numărabil. Orice funcție $z \in Z$ este nulă în afara unei mulțimi numărabile deci este μ -neglijabilă.

Pentru orice $t \in T$ să considerăm aplicația $\mathbf{u}(t) : E \to F$ definită prin $\mathbf{u}(t)f = \varphi_{\{t\}} f$ pentru $f \in E$. Avem $\|\mathbf{u}(t)\| = 1$ oricare ar fi $t \in T$ și

$$< z, \mathbf{u}(t) f > = < z, \varphi_{\{t\}} f > = \sum_{r \in T} z(r)\, \varphi_{\{t\}}(r) f(r) = z(t) f(t)$$

oricare ar fi $z \in Z$ și $f \in E$.

Pentru orice funcție $x : T \to E$ și orice $t \in T$ să punem $x(t) = f_t$. Atunci pentru $z \in Z$ avem

$$\int < z, \mathbf{u}(t)\, x(t) > \mathrm{d}\mu(t) = \int < z, \mathbf{u}(t) f_t > \mathrm{d}\mu(t) = \int z(t) f_t(t)\, \mathrm{d}\mu(t) = 0.$$

Pe de altă parte, pentru $\mathbf{v}(t) \equiv 0$ avem de asemenea

$$\int < z, \mathbf{v}(t)\, x(t) > \mathrm{d}\mu(t) = 0$$

deci

$$\int < z, \mathbf{u}(t)\, x(t) > \mathrm{d}\mu(t) = \int < z, \mathbf{v}(t)\, x(t) > \mathrm{d}\mu(t)$$

pentru orice $z \in Z$ și orice $x : T \to Z$, dar $\mathbf{u}(t) \neq \mathbf{v}(t)$ pentru orice $t \in T$.

2) Să luăm $T = [0, 1]$, μ măsura Lebesgue pe T, E spațiul funcțiilor $f : T \to R$ cu $\|f\| = \sum_{t \in T} |f(t)| < \infty$, $Z = \mathcal{C}(T)$, deci $F = Z'$ este spațiul măsurilor reale pe T. Spațiul Z este de tip numărabil, dar E nu este de tip numărabil.

Pentru orice $t \in T$ să considerăm aplicația $\mathbf{u}(t) : E \to F$ definită prin $\mathbf{u}(t) = f(t)\varepsilon_t$ pentru $f \in E$, unde ε_t este măsura definită de masa unitate plasată în punctul t. Avem $\|\mathbf{u}(t)\| \equiv 1$ și $< z, \mathbf{u}(t) f > = < z, f(t)\varepsilon_t > = z(t) f(t)$ oricare ar fi $z \in Z$ și $f \in E$. Se verifică la fel ca în exemplul 1 că luînd $\mathbf{v}(t) \equiv 0$ avem

$$\int < z, \mathbf{u}(t)\, x(t) > \mathrm{d}\mu(t) = \int < z, \mathbf{v}(t)\, x(t) > \mathrm{d}\mu(t)$$

pentru orice $z \in Z$ și $x : T \to E$, dar $\mathbf{u}(t) \neq \mathbf{v}(t)$ pentru orice $t \in T$.

Dăm acum condiții suficiente pentru ca $\mathbf{u}\mu = \mathbf{v}\mu$ să implice $\mathbf{u}(t) = \mathbf{v}(t)$, μ-aproape peste tot.

Propoziția 13. *Fie* $\mathbf{u}, \mathbf{v} : T \to \mathcal{L}^*(E, F)$ *două funcții Z-slab local* μ*-integrabile. Dacă există o ridicare* ρ *a lui* $\mathcal{L}^\infty(\mu)$ *astfel încît să avem* $\rho[\mathbf{u}] = \mathbf{u}$ *și* $\rho[\mathbf{v}] = \mathbf{v}$ *și dacă* $\mathbf{u}\mu = \mathbf{v}\mu$, *atunci* $\mathbf{u}(t) = \mathbf{v}(t)$, μ*-aproape peste tot.*

Să presupunem că $\mathbf{u}\mu = \mathbf{v}\mu$. Din propoziția 12 rezultă că $\mathbf{u} \equiv \mathbf{v}$. Pentru orice mulțime compactă $K \subset T$, orice $x \in E$ și orice $z \in Z$ avem atunci

$$\varphi_K(t) < \mathbf{u}(t)\, x,\ z > = \varphi_K(t) < \mathbf{v}(t)\, x,\ z >,\ \mu\text{-aproape peste tot}$$

deci

$$\varphi_{\rho(K)} < \mathbf{u}\ x,\ z > = \varphi_{\rho(K)} < \mathbf{v}\ x,\ z >.$$

Deoarece $\rho[\mathbf{u}] = \mathbf{u}$ și $\rho[\mathbf{v}] = \mathbf{v}$, există o familie local numărabilă $(K_j)_{j\in J}$ de mulțimi compacte nevide disjuncte astfel ca mulțimea $T - \bigcup K_j$ să fie μ -neglijabilă, și astfel încît să avem

$$\rho(\varphi_{K_j} < \mathbf{u}x,\ z >) = \varphi_{\rho(K_j)} < \mathbf{u}x,\ z >$$

și

$$\rho(\varphi_{K_j} < \mathbf{v}x,\ z >) = \varphi_{\rho(K_j)} < \mathbf{v}x,\ z >$$

pentru orice $j \in J$, $x \in E$ și $z \in Z$, deci

$$\varphi_{\rho(K_j)} < \mathbf{u}x,\ z > = \varphi_{\rho(K_j)} < \mathbf{v}x,\ z >, \text{ pentru } j \in J,\ x \in E \text{ și } z \in Z.$$

Mulțimea $T' = \bigcup \rho(K_j)$ diferă de T printr-o mulțime μ -neglijabilă și pentru $t \in T'$ avem

$$< \mathbf{u}(t)x,\ z > = < \mathbf{v}(t)x,\ z >, \text{ pentru orice } x \in E \text{ și } z \in Z.$$

Rezultă atunci că pentru $t \in T'$ avem

$$\mathbf{u}(t)x = \mathbf{v}(t)x, \text{ pentru orice } x \in E$$

și deci $\mathbf{u}(t) = \mathbf{v}(t)$ pentru $t \in T'$, adică μ -aproape peste tot.

Observație. Propoziția 13 este valabilă în particular dacă $\mathbf{u}$ și $\mathbf{v}$ sînt simplu local μ -integrabile.

Propoziția 14. *Fie* $\mathbf{u}, \mathbf{v} : T \to \mathcal{L}^*(E, F)$ *două funcții* Z *-slab local* μ *-integrabile. Dacă* E *este de tip numărabil, dacă există o mulțime numărabilă* $S \subset Z$ *normantă pentru* F *și dacă* $\mathbf{u}\mu = \mathbf{v}\mu$, *atunci* $\mathbf{u}(t) = \mathbf{v}(t)$, μ*-aproape peste tot.*

Deoarece $\mathbf{u}\mu = \mathbf{v}\mu$, avem $\mathbf{u} \equiv \mathbf{v}$.

Fie $x \in E$ și $s \in S$ și fie $N(x, s)$ o mulțime μ -neglijabilă astfel încît pentru $t \notin N(x, s)$ să avem

$$< \mathbf{u}(t)x,\ s > < = \mathbf{v}(t)x,\ s >$$

Mulțimea $N(x) = \bigcup_{s\in S} N(x, s)$ este μ-neglijabilă și pentru $t \notin N(x)$ avem

$$\mathbf{u}(t)x = \mathbf{v}(t)x.$$

Fie (x_n) un șir dens în E. Mulțimea $N = \bigcup_n N(x_n)$ este μ -neglijabilă și pentru $t \notin N$ avem $\mathbf{u}(t) = \mathbf{v}(t)$.

În particular, condițiile din propoziția 14 sînt îndeplinite în următoarele cazuri:

1) Z este un spațiu Banach de tip numărabil și $F = Z'$;

2) F' este de tip numărabil și $Z = F'$;

3) F este de tip numărabil și $Z = F'$.

În ultimul caz $\mathbf{u}$ și $\mathbf{v}$ sînt simplu local μ -integrabile.

Pentru funcții simplu local integrabile se deduc următoarele proprietăți:

Propoziția 15. *Fie* $\mathbf{f}, \mathbf{g} : T \to \mathcal{L}^*(E, F)$ *două funcții simplu local* μ *-integrabile. Avem* $\mathbf{f}\mu = \mathbf{g}\mu$ *dacă și numai dacă pentru orice* $x \in E$ *avem* $\mathbf{f}(t)x = \mathbf{g}(t)x$, μ *-aproape peste tot.*

Demonstrația este aceeași ca a propoziției 12, fără a mai utiliza z.

Propoziția 16. *Fie* $\mathbf{f}, \mathbf{g} : T \to \mathcal{L}^*(E, F)$ *două funcții simplu local* μ *-integrabile. Dacă* E *este de tip numărabil și dacă* $\mathbf{f}\mu = \mathbf{g}\mu$, *atunci* $\mathbf{f}(t) = \mathbf{g}(t)$ μ *-aproape peste tot.*

Fie (x_n) un șir dens în E. Pentru fiecare n există o mulțime μ -neglijabilă $N(x_n)$ astfel încît

$$\mathbf{f}(t)\, x_n = \mathbf{g}(t)\, x_n, \text{ pentru } t \in N(x_n).$$

Mulțimea $N = \bigcup_n N(x_n)$ este μ -neglijabilă și avem

$$\mathbf{g}(t)\, x_n = \mathbf{g}(t)\, x_n, \text{ pentru } t \in N \text{ și orice } x_n$$

Deoarece (x_n) este dens în E, deducem

$$\mathbf{f}(t) = \mathbf{g}(t), \text{ pentru } t \in N.$$

§ 18. MĂSURI ABSOLUT CONTINUE

1. Măsuri pozitive absolut continue

Fie μ și ν două măsuri pozitive pe T.

Definiția 1. *Spunem că măsura* ν *este absolut continuă în raport cu măsura* μ, *dacă orice mulțime* μ *-neglijabilă este* ν *-neglijabilă.*

A spune că ν este absolut continuă în raport cu μ înseamnă că $\mu^*(A) = 0$ implică $\nu^*(A) = 0$.

Propoziția 1. *Măsura* ν *este absolut continuă în raport cu* μ *dacă și numai dacă orice funcție* μ *-neglijabilă* $\mathbf{f} : T \to E$ *este* ν *-neglijabilă.*

Într-adevăr, a spune că $\mathbf{f}$ este μ -neglijabilă (respectiv ν -neglijabilă), înseamnă că mulțimea $A = \{t;\ \mathbf{f}(t) = 0\}$ este μ -neglijabilă (respectiv ν-neglijabilă).

Propoziția 2. *Măsura* ν *este absolut continuă în raport cu* μ *dacă și numai dacă, pentru orice mulțime compactă* $K \subset T$ *și orice* $\varepsilon > 0$, *există un număr* $\delta > 0$ *astfel încît pentru orice mulțime* $A \subset K$ *cu* $\mu^*(A) < \delta$ *să avem* $\nu^*(A) < \varepsilon$.

Să presupunem mai întîi că ν este absolut continuă în raport cu μ și să arătăm că este verificată condiția din enunț. Dacă, prin absurd, această condiție n-ar fi verificată, ar exista o mulțime compactă $K_0 \subset T$ și un număr $\varepsilon_0 > 0$, astfel încît, pentru orice număr natural n, să existe o mulțime $A_n \subset K_0$ cu $\mu(A_n) < \frac{1}{2^n}$ și $\nu^*(A_n) \geqslant \varepsilon_0$. Deoarece măsura exterioară a unei mulțimi relativ compacte este egală cu marginea inferioară a măsurilor mulțimilor deschise ce o conțin, pentru fiecare n există o mulțime deschisă $G_n \supset A_n$ astfel încît

$$\mu^*(G_n) \leqslant \mu^*(A_n) + \frac{1}{2^n} \leqslant \frac{2}{2^n}.$$

Să notăm

$$V_n = \bigcup_{p \geqslant 0} G_{n+p} \text{ şi } V = \bigcap_{n=1}^{\infty} V_n.$$

Avem

$$\mu^*(V_n) \leqslant \sum_{p=0}^{\infty} \mu^*(G_{n+p}) \leqslant \sum_{p=0}^{\infty} \frac{2}{2^{n+p}} \leqslant \frac{4}{2^{n+p}}$$

şi $\mu^*(V) \leqslant \mu^*(V_n) \leqslant \frac{4}{2^{n+p}}$, deci $\mu^*(V) = 0$.

Pe de altă parte, pentru fiecare n avem $V_n \supset G_n \supset A_n$ deci $\nu^*(V_n) \geqslant \geqslant \nu^*(A_n) \geqslant \varepsilon_0$. Deoarece şirul (V_n) este descrescător, avem

$$\nu^*(V) = \inf_n \nu^*(V_n) \geqslant \varepsilon_0.$$

Aşadar, V este μ -neglijabilă dar nu este ν -neglijabilă, ceea ce contrazice presupunerea că ν este absolut continuă în raport cu μ.

Urmează că dacă ν este absolut continuă în raport cu μ, condiţia din enunţ este îndeplinită.

Reciproc, să presupunem această condiţie îndeplinită şi să arătăm că ν este absolut continuă în raport cu μ.

Fie A o mulţime μ -neglijabilă şi $K \subset T$ o mulţime compactă. Pentru orice $\varepsilon > 0$ avem $\mu^*(A \cap K) = 0 < \delta$ deci $\nu^*(A \cap K) < \varepsilon$. Rezultă că $\nu^*(A \cap K) = 0$, deci $\nu^*(A) = 0$, adică A este ν -neglijabilă. Aşadar, ν este absolut continuă în raport cu μ.

Cu aceasta propoziţia este demonstrată.

Propoziţia 3. *Măsura ν este absolut continuă în raport cu μ, dacă şi numai dacă, pentru orice funcţie $f \geqslant 0$ cu suport compact μ -integrabilă şi ν -integrabilă şi pentru orice număr $\varepsilon > 0$, există un număr $\delta > 0$, astfel încît, oricare ar fi funcţia h cu $0 \leqslant h \leqslant f$ şi $\int^* h \, d\mu < \delta$ să avem $\int^* h \, d\nu < \varepsilon$.*

Să presupunem că ν este absolut continuă în raport cu μ. Dacă, prin absurd, condiţia din enunţ n-ar fi verificată, ar exista o funcţie $f_0 \geqslant 0$ cu suport compact, integrabilă în raport cu μ şi cu ν, şi nu număr $\varepsilon_0 > 0$ astfel încît, pentru orice număr natural n, să existe o funcţie g_n cu $0 \leqslant g_n \leqslant f_0$,

$$\int^* g_n \, d\mu < \frac{1}{2^n} \text{ şi } \int^* g_n \, d\nu \geqslant \varepsilon_0.$$

Deoarece funcţiile g_n au suportul compact, pentru fiecare n există o funcţie inferior semicontinuă $g_n' \geqslant g_n$ cu $\mu^*(g_n') \leqslant \mu^*(g_n) + \frac{1}{2^n} \leqslant \frac{2}{2^n}$. Atunci funcţiile $g_n'' = \inf(f_0, g_n')$ sînt integrabile în raport cu μ şi ν deoarece sînt măsurabile în raport cu μ şi ν şi

$$\mu^*(g_n'') \leqslant \mu^*(g_n') \leqslant \frac{2}{2^n} \text{ şi } \nu^*(g_n'') \leqslant \nu^*(f_0) < +\infty.$$

Pentru fiecare n să punem $h_n = \sup_{p \geqslant 0} g''_{n+p}$ și $h = \inf_n h_n$. Avem

$$\mu^*(h_n) \leqslant \sum_{p=0}^{\infty} \mu^*(g''_{n+p}) \leqslant \sum_{p=0}^{\infty} \frac{2}{2^{n+p}} = \frac{4}{2^n}.$$

Atunci

$$\mu^*(h) \leqslant \mu^*(h_n) \leqslant \sum_{p=0}^{\infty} \mu^*(g''_{n+p}) \leqslant \frac{4}{2^n} \text{ pentru orice } n, \text{ deci } \mu^*(h) = 0.$$

Pe de altă parte, $h_n \geqslant g''_n \geqslant g'_n \geqslant g_n$ deci $\nu^*(h_n) \geqslant \varepsilon_0$. Șirul (h_n) este descrescător și este format din funcții ν -integrabile, deci

$$\nu(h) = \inf_n \nu(h_n) \geqslant \varepsilon_0.$$

Așadar, h este μ -neglijabilă dar nu este ν -neglijabilă ceea ce contrazice presupunerea că ν este absolut continuă în raport cu μ.

Așadar, dacă ν este absolut continuă în raport cu μ, condiția din enunțul propoziției este îndeplinită.

Reciproc, să presupunem că această condiție este îndeplinită și să arătăm că ν este absolut continuă în raport cu μ.

Fie A o mulțime μ -neglijabilă și K o mulțime compactă. Luînd $f = \varphi_K$ și $h = \varphi_{A \cap K}$, pentru orice $\varepsilon > 0$ avem $\mu^*(h) \leqslant \mu^*(A \cap K) = 0 < \delta$ deci $\nu^*(A \cap K) = \nu^*(h) < \varepsilon$. Așadar, $\nu^*(A \cap K) = 0$ deci $\nu^*(A) = 0$, adică A este ν -neglijabilă. Rezultă că ν este absolut continuă în raport cu μ și cu aceasta propoziția este demonstrată.

Propoziția 4. *Măsura ν este absolut continuă în raport cu μ dacă și numai dacă orice mulțime compactă μ -neglijabilă este ν -neglijabilă.*

Dacă ν este absolut continuă în raport cu μ, orice mulțime μ -neglijabilă este ν -neglijabilă, în particular orice mulțime compactă μ -neglijabilă este ν -neglijabilă.

Reciproc, să presupunem că orice mulțime compactă μ -neglijabilă este ν -neglijabilă. Fie A o mulțime μ -neglijabilă și K o mulțime compactă. Deoarece

$$\mu^*(A \cap K) = \inf_{G \supset A} \mu^*(G) = 0, \ G \text{ deschisă},$$

există un șir (G_n) de mulțimi deschise, astfel încît notînd $B = (\bigcap_{n=1}^{\infty} G_n) \cap K$ avem $B \supset A \cap K$ și $\mu^*(B) = 0$.

Mulțimea B este boreliană relativ compactă, deci este integrabilă în raport cu orice măsură, în particular pentru măsura ν. Există deci o mulțime ν -neglijabilă $N \subset B$ și o partiție a lui $B - N$ formată dintr-un șir (K_n) de mulțimi compacte. Deoarece $K_n \subset B$ și $\mu^*(B) = 0$ avem $\mu^*(K_n) = 0$ deci $\nu^*(K_n) = 0$. Rezultă atunci că $\nu^*(B) = 0$, deci $\nu^*(A \cap K) = 0$ și deci $\nu^*(A) = 0$.

2. Teorema lui Lebesgue-Nikodym

Teorema 1. (Lebesgue-Nikodym). *Fie* μ *o măsură pozitivă şi* ν *o măsură scalară. Măsura* ν *este absolut continuă în raport cu* μ *dacă şi numai dacă* ν *este de bază* μ.

Dacă ν este de bază μ, $\nu = g\mu$, şi dacă A este o mulţime μ-neglijabilă, atunci $|g|\varphi_A$ este μ-neglijabilă, deci φ_A este $|g|\,\mu$-neglijabilă. Din egalitatea $|\nu| = |g\mu| = |g|\mu$ rezultă că φ_A este ν-neglijabilă, deci ν este absolut continuă în raport cu μ.

Reciproc, să presupunem că ν este absolut continuă în raport cu μ şi să arătăm că ν este de bază μ. Vom considera succesiv mai multe cazuri.

a) Să presupunem mai întîi că μ şi ν sînt *pozitive* şi *mărginite*. Atunci măsura $\lambda = \mu + \nu$ este pozitivă şi mărginită, deci

$$\varphi_T \in \mathcal{L}^2(\lambda) \subset \mathcal{L}^1(\lambda) = \mathcal{L}^1(\mu) \cap \mathcal{L}^1(\nu).$$

Deoarece $\nu \leqslant \lambda$, pentru orice funcţie $f \in \mathcal{L}^2(\lambda)$ avem $f \in \mathcal{L}^2(\nu)$ şi

$$|\nu(f)| \leqslant \nu(|f|) \leqslant \lambda(|f|) = \int |f|\,\varphi_T\,d\lambda = N_2(f,\ \lambda)\,N_2(\varphi_T,\ \lambda).$$

Rezultă că aplicaţia liniară $f \to \nu(f)$ este continuă în spaţiul $\mathcal{L}^2(\lambda)$. Aplicaţia $f \to \nu(\tilde{f})$ este atunci o funcţională liniară continuă în spaţiul Hilbert $L^2(\lambda)$. Există deci un element $\tilde{g} \in L^2(\lambda)$ astfel încît pentru orice $\tilde{f} \in L^2(\lambda)$ să avem $\nu(\tilde{f}) = (\tilde{f} \mid \tilde{g})$.

Alegînd un reprezentant oarecare $g \in \tilde{g}$, avem

$$\nu(f) = (\tilde{f} \mid \tilde{g}) = \int fg\,d\lambda, \text{ pentru } f \in \mathcal{L}^2(\lambda), \tag{1}$$

adică

$$\nu(f) = \mu(fg) + \nu(fg),$$

de unde

$$\nu(f(1-g)) = \mu(fg) \text{ pentru } f \in \mathcal{L}^2(\lambda). \tag{2}$$

Vom arăta că avem $\nu(h) = \mu\left(h\dfrac{g}{1-g}\right)$ pentru $h \in \mathcal{K}(T)$, de unde va rezulta că ν este de bază μ, şi anume că $\nu = \dfrac{g}{1-g}\,\mu$.

Pentru aceasta vom arăta mai întîi că putem alege funcţia $g \in \tilde{g}$ astfel încît să avem $g(t) \geqslant 0$ şi $g(t) < 1$ pentru orice $t \in T$. În primul rînd, $g(t) \geqslant 0$, λ-aproape peste tot, deoarece măsura $\nu = g\lambda$ este pozitivă; modificînd funcţia g pe o mulţime λ-neglijabilă (deci μ-neglijabilă şi ν-neglijabilă) putem realiza $g \geqslant 0$. Să notăm apoi $A = \{t \mid g(t) \geqslant 1\}$. Mulţimea A este λ-măsurabilă. Deoarece λ este mărginită, A este integrabilă, deci $\varphi_A \in \mathcal{L}^2(\lambda)$. Scriind egalitatea (2) pentru funcţia $f = \varphi_A$, obţinem

$$\lambda(\varphi_A(1-g)) = \mu(\varphi_A g).$$

În această egalitate, membrul stîng este $\leqslant 0$, iar membrul drept este $\geqslant 0$, deci

$$\nu(\varphi_A(1-g)) = \mu(\varphi_A g) = 0.$$

Aşadar, $\varphi_A g$ este μ-neglijabilă, deci ν-neglijabilă (deoarece ν este continuă în raport cu μ) şi deci şi λ-neglijabilă. Punînd $g(t) = 0$ pentru $t \in A$, obţinem $0 \leqslant g(t) < 1$ pentru orice $t \in T$ şi egalitatea (2) rămîne adevărată şi pentru funcţia g astfel modificată.

Pentru orice n, funcţia g^n este λ-măsurabilă şi mărginită. Pentru orice funcţie $h \geqslant 0$ din $\mathcal{K}(T)$, funcţia $f = h(1 + g + \ldots + g^{n-1})$ este λ-măsurabilă şi mărginită, deci aparţine spaţiului $\mathcal{L}^2(\lambda)$. Scriind egalitatea (2) pentru această funcţie, obţinem

$$\int h(1+g+\ldots+g^{n-1})(1-g)\,\mathrm{d}\nu = \int h(1+g+\ldots+g^{n-1})\,g\,\mathrm{d}\mu,$$

adică

$$\int h(1-g^n)\,\mathrm{d}\nu = \int h(g+g^2+\ldots+g^n)\,\mathrm{d}\mu =$$

$$= \int hg\,\mathrm{d}\mu + \int hg^2\,\mathrm{d}\mu + \ldots + \int hg^n\,\mathrm{d}\mu.$$

Dar

$$\int h(1-g^n)\,\mathrm{d}\nu \leqslant \int h\,\mathrm{d}\nu < +\infty,$$

deci

$$\sum_{k=1}^{n} \int hg^k\,\mathrm{d}\mu \leqslant \int h\,\mathrm{d}\nu < +\infty.$$

Urmează că funcţia $\sum_{n=1}^{\infty} h\,g^n = h\,\dfrac{g}{1-g}$ este μ-integrabilă şi

$$\int h\frac{g}{1-g}\,\mathrm{d}\mu = \lim_{n\to\infty} \int \sum_{k=1}^{n} hg^k\,\mathrm{d}\mu = \lim_{n\to\infty} \int h(1-g^n)\,\mathrm{d}\nu.$$

Pe de altă parte, şirul $(1-g^n)\,h$ este crescător şi

$$\sup_n (1-g^n)\,h = \lim_{n-\infty} (1-g^n)\,h = h,$$

deci

$$\int h\,\mathrm{d}\nu = \sup_n \int (1-g^n)\,h\,\mathrm{d}\nu = \lim_{n\to\infty} \int (1-g^n)\,h\,\mathrm{d}\nu.$$

Urmează că

$$\int h\,\mathrm{d}\nu = \int h\frac{g}{1-g}\,\mathrm{d}\mu.$$

Această egalitate se menține pentru orice funcție $h \in \mathcal{K}(T)$ (nu neapărat $\geqslant 0$).

Punînd $g_0 = \dfrac{g}{1-g}$ avem $g_0 \geqslant 0$, funcția g_0 este μ-integrabilă și $\nu = g_0 \mu$.

b) Fie acum μ și ν două măsuri *pozitive* oarecare, ν absolut continuă în raport cu μ.

Fie $(K_\alpha)_{\alpha \in A}$ o familie local numărabilă de părți compacte, disjuncte două cîte două, astfel încît mulțimea $N = T - \bigcup_{\alpha \in A} K_\alpha$ este μ-neglijabilă. Atunci N este de asemenea ν-neglijabilă, deci notînd $M = \bigcup_{\alpha \in A} K_\alpha$ avem $\mu = \varphi_M \mu$ și $\nu = \varphi_M \nu$. Pentru fiecare $\alpha \in A$ măsurile $\mu_\alpha = \varphi_{K_\alpha} \mu$ și $\nu_\alpha = \varphi_{K_\alpha} \nu$ sînt mărginite iar ν_α este absolut continuă în raport cu μ_α. Din prima parte rezultă că există o funcție μ_α-integrabilă $g'_\alpha \geqslant 0$ astfel încît să avem $\nu_\alpha = g'_\alpha \mu_\alpha$. Din proprietatea de asociativitate deducem că funcția $g_\alpha = g'_\alpha \varphi_{K_\alpha}$ este μ-integrabilă și $g'_\alpha \mu_\alpha = g' (\varphi_{K_\alpha} \mu) = g_\alpha \mu$ dec $\nu_\alpha = g_\alpha \mu$.

Să definim funcția g pe T prin egalitățile

$$g(t) = \begin{cases} g_\alpha(t) & \text{dacă } t \in K_\alpha, \\ 0 & \text{dacă } t \in M. \end{cases}$$

Funcția g este $\geqslant 0$, local μ-integrabilă și pentru fiecare $\alpha \in A$ avem $g \varphi_{K_\alpha} = g_\alpha \varphi_{K_\alpha}$. Dacă punem $\nu' = g\mu$, pentru orice $\alpha \in A$ avem

$$\varphi_{K_\alpha} \nu' = (\varphi_{K_\alpha} g) \mu = g_\alpha \mu = \nu_\alpha = \varphi_{K_\alpha} \nu.$$

Rezultă că $\varphi_M \nu' = \varphi_M \nu$. Deoarece $N = T - M$ este μ-neglijabilă, rezultă că N este ν-neglijabilă și ν'-neglijabilă, deci $\nu' = \nu$ și deci $\nu = g\mu$.

c) Să presupunem acum că ν este o măsură reală absolut continuă în raport cu μ. Atunci ν^+ și ν^- sînt măsuri pozitive absolut continue în raport cu μ. Există deci două funcții $g_1 \geqslant 0$ și $g_2 \geqslant 0$ local μ-integrabile astfel încît să avem

$$\nu^+ = g_1 \mu \text{ și } \nu^- = g_2 \mu.$$

Atunci funcția $g = g_1 - g_2$ este local μ-integrabilă, și

$$\nu = \nu^+ - \nu^- = g_1 \mu - g_2 \mu = (g_1 - g_2) \mu = g\mu.$$

d) Dacă ν este o măsură complexă absolut continuă în raport cu μ, și dacă $\nu = \nu_1 + i\nu_2$, atunci ν_1 și ν_2 sînt măuri reale absolut continue în raport cu μ. Există deci două funcții local μ-integrabile g_1 și g_2 astfel încît

$$\nu_1 = g_1 \mu \text{ și } \nu_2 = g_2 \mu.$$

Atunci funcția $g = g_1 + ig_2$ este local μ-integrabilă și

$$\nu = \nu_1 + i\nu_2 = g_1\mu + ig_2\mu = (g_1 + ig_2)\mu = g\mu.$$

Cu aceasta teorema este complet demonstrată.

Propoziția 5. *Dacă μ este o măsură scalară, atunci există o funcție scalară local μ-integrabilă φ cu $|\varphi(t)| \equiv 1$ și $\mu = \varphi|\mu|$. Funcția $\frac{1}{\varphi}$ este de asemenea local μ-integrabilă și avem $|\mu| = \frac{1}{\varphi}\mu$.*

Într-adevăr, μ este absolut continuă în raport cu $|\mu|$ deci există o funcție scalară local μ-integrabilă φ cu $\mu = \varphi|\mu|$. Conform teoremei 1, § 17, avem

$$|\mu| = |\varphi|\mu|| = |\varphi|\,|\mu|.$$

deci conform propoziției 4, § 17, avem $|\varphi(t)| = 1$ μ-aproape peste tot. Modificînd funcția φ pe o mulțime μ-neglijabilă, putem realiza $|\varphi(t)| \equiv 1$. Funcția $\frac{1}{\varphi}$ este μ-măsurabilă și $\left|\frac{1}{\varphi(t)}\right| \equiv 1$, deci $\frac{1}{\varphi}$ este local μ-integrabilă. Din propoziția 11, § 16, deducem atunci

$$\frac{1}{\varphi}\mu = \frac{1}{\varphi}(\varphi|\mu|) = \left(\frac{1}{\varphi}\varphi\right)|\mu| = |\mu|.$$

Corolar. *Dacă μ este o funcție reală, există două mulțimi μ-măsurabile disjuncte A și B cu $A \cup B = T$ astfel încît să avem*

$$\mu^+ = \varphi_A|\mu| = \varphi_A\mu \quad \text{și} \quad \mu^- = \varphi_B|\mu| = -\varphi_B\mu.$$

Conform propoziției 5, există o funcție reală local μ-integrabilă φ cu $\mu = \varphi|\mu|$, $|\mu| = \frac{1}{\varphi}\mu$ și $|\varphi(t)| \equiv 1$. Funcția φ ia numai valorile 1 și -1. Să notăm $A = \{t;\ \varphi(t) = 1\}$ și $B = \{t;\ \varphi(t) = -1\}$. Mulțimile A și B sînt μ-măsurabile, disjuncte, $A \cup B = T$ și $\varphi = \varphi_A - \varphi_B$, deci $\mu = \varphi_A|\mu| - \varphi_B|\mu|$ și $|\mu| = \varphi_A|\mu| + \varphi_B|\mu|$. Urmează că $\mu^+ = \varphi_A|\mu|$ și $\mu^- = \varphi_B|\mu|$.

În acest caz avem $\frac{1}{\varphi} = \varphi = \varphi_A - \varphi_B$ deci $|\mu| = \varphi\mu$, de unde $\mu^+ = \varphi_A|\mu| = \varphi_A\varphi\mu = \varphi_A\mu$ și $\mu^- = \varphi_B|\mu| = \varphi_B\varphi\mu = -\varphi_B\mu$.

3. Măsuri echivalente

Definiția 2. *Spunem că două măsuri majorate* $\mathbf{m}, \mathbf{n} : \mathcal{K}(T) \to E$ *sînt echivalente dacă mulțimile neglijabile sînt aceleași pentru* $\mathbf{m}$ *și* $\mathbf{n}$.

A spune că $\mathbf{m}$ și $\mathbf{n}$ sînt echivalente, înseamnă că măsurile pozitive $|\mathbf{m}|$ și $|\mathbf{n}|$ sînt echivalente. Rezultă că dacă $\mathbf{m}$ și $\mathbf{n}$ sînt echivalente, funcțiile măsurabile sînt aceleași pentru $\mathbf{m}$ și $\mathbf{n}$.

A spune că două măsuri pozitive μ şi ν sînt echivalente, înseamnă că fiecare din ele este absolut continuă în raport cu cealaltă.

Propoziţia 6. *Două măsuri pozitive μ şi ν sînt echivalente, dacă şi numai dacă există o funcţie local μ-integrabilă g astfel încît să avem $\nu = g\mu$ şi $g(t) > 0$, μ-aproape peste tot. Avem atunci* $\frac{1}{g}\nu = \mu$.

Să presupunem că μ şi ν sînt echivalente. Atunci ν este absolut continuă în raport cu μ şi μ este absolut continuă în raport cu ν. Există deci o funcţie local μ-integrabilă $g \geqslant 0$ astfel încît $\nu = g\mu$ şi o funcţie local μ-integrabilă $h \geqslant 0$ astfel încît $\mu = h\nu$. Funcţia hg este local μ-integrabilă şi $\mu = h(g\mu) = (hg)\mu$. Rezultă că $h(t)g(t) = 1$, μ-aproape peste tot, deci $g(t) > 0$ şi $h(t) = \dfrac{1}{g(t)}$, μ-aproape peste tot.

Reciproc, să presupunem că $\nu = g\mu$, unde g este local μ-integrabilă şi $g(t) > 0$, μ-aproape peste tot. Funcţia $\frac{1}{g}g$ este definită μ-aproape peste tot şi este local μ-integrabilă; atunci $\frac{1}{g}$ este local $g\mu = \nu$-integrabilă şi $\frac{1}{g}\nu = \frac{1}{g}(g\mu) = \mu$. Aşadar, ν este absolut continuă în raport cu μ şi μ este absolut continuă în raport cu ν, deci μ şi ν sînt echivalente.

Propoziţia 7. *Dacă T este numărabil la infinit, pentru orice măsură pozitivă μ pe T există o funcţie continuă g pe T astfel încît $g(t) > 0$ pentru orice $t \in T$ şi măsura $\nu = g\mu$ este mărginită.*

Fie (K_n) un şir de mulţimi compacte a căror reuniune este T. Pentru fiecare n, fie $f_n : T \to [0,1]$ o funcţie din $\mathcal{K}(T)$ astfel încît $f_n(t) = 1$ pentru $t \in K_n$. Pentru fiecare n să notăm

$$a_n = \begin{cases} \dfrac{1}{2^n \mu(f_n)} & \text{dacă } \mu(f_n) > 1, \\ \dfrac{1}{2^n} & \text{dacă } \mu(f_n) \leqslant 1. \end{cases}$$

Rezultă că

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} < \infty$$

şi

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \, \mu(f) \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} < \infty.$$

Seria $\sum_{n=1}^{\infty} a_n f_n$ este uniform convergentă pe T, deci suma sa $g = \sum_{n=1}^{\infty} a_n f_n$ este o funcţie continuă şi $g(t) > 0$ pentru fiecare $t \in T$.

Pentru măsura $\nu = g\mu$ avem

$$\nu^*(\varphi_T) = \mu^*(f\varphi_T) = \mu^*(g) = \mu^*\left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n f_n\right) \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} a_n \mu(f_n) < \infty,$$

deci măsura $g\mu$ este mărginită.

Propoziția 8. *Pentru orice șir (μ_n) de măsuri pozitive și mărginite pe T, există o măsură pozitivă și mărginită μ pe T, având următoarele proprietăți:*

1) *orice măsură μ_n este absolut continuă în raport cu μ;*

2) $\mu(A) = 0$ *dacă și numai dacă* $\mu_n(A) = 0$ *oricare ar fi* n;

3) *orice măsură pozitivă μ' pe T cu proprietățile* 1) *și* 2) *este echivalentă cu μ.*

Putem presupune $\mu_n \neq 0$ pentru orice n, înlăturînd din șir, la nevoie, măsurile nule. Pentru orice funcție φ din $\mathcal{X}(T)$ avem $|\mu_n(\varphi)| \leqslant \leqslant \mu_n(|\varphi|) \leqslant \|\mu_n\| \, \|\varphi\|$, deci

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n \|\mu_n\|} |\mu_n(\varphi)| \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \|\varphi\| < \infty.$$

Să punem

$$\mu(\varphi) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n \|\mu_n\|} \mu_n(\varphi).$$

Se verifică ușor că μ este o funcțională liniară pozitivă pe $\mathcal{X}(T)$, deci este o măsură pozitivă pe T.

Pentru orice n avem $\dfrac{1}{2^n \|\mu_n\|} \mu_n \leqslant \mu$, deci μ_n este absolut continuă în raport cu μ.

Pentru orice funcție $\varphi \in \mathcal{X}(T)$ cu $\|\varphi\| \leqslant 1$ avem

$$|\mu(\varphi)| = \left| \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n \|\mu_n\|} \mu_n(\varphi) \right| \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n \|\mu_n\|} |\mu_n(\varphi)| \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n \|\mu_n\|} \|\mu_n\| \, \|\varphi\| \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n},$$

de unde

$$\|\mu\| \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} < \infty$$

deci μ este mărginită.

Avem apoi $\mu^*(A) = 0$ dacă și numai dacă $\mu_n^*(A) = 0$ pentru orice n (a se vedea prop. 5, § 19*)). În sfîrșit, dacă μ' îndeplinește condiția 2), atunci mulțimile neglijabile sînt aceleași pentru μ și μ', deci μ și μ' sînt echivalente.

*) Paragraful 19 poate fi citit independent de paragraful 18.

4. Măsuri vectoriale absolut continue

Din propoziția 4 deducem că o măsură pozitivă ν este absolut continuă în raport cu o măsură pozitivă μ dacă și numai dacă orice mulțime boreliană relativ compactă μ-neglijabilă este ν-neglijabilă.

Pentru măsuri vectoriale, această proprietate se ia ca definiție.

Definiția 3. *Spunem că o măsură vectorială* $\mathbf{m}$ *este absolut continuă în raport cu o măsură pozitivă* μ, *dacă pentru orice mulțime boreliană relativ compactă* A *cu* $\mu(A) = 0$ *avem* $\mathbf{m}(A) = 0$.

Pentru măsurile majorate, studiul continuității absolute se reduce la acela al măsurilor pozitive.

Propoziția 9. *O măsură majorată* $\mathbf{m}$ *este absolut continuă în raport cu o măsură pozitivă* μ *dacă și numai dacă măsura pozitivă* $|\mathbf{m}|$ *este absolut continuă în raport cu* μ.

Dacă $|\mathbf{m}|$ este absolut continuă în raport cu μ, atunci pentru orice mulțime boreliană relativ compactă A cu $\mu(A) = 0$ avem $|\mathbf{m}|(A) = 0$ și deci $\mathbf{m}(A) = 0$ deoarece $|\mathbf{m}(A)| \leqslant |\mathbf{m}|(A)$; rezultă că $\mathbf{m}$ este absolut continuă în raport cu μ.

Reciproc, să presupunem că $\mathbf{m}$ este absolut continuă în raport cu μ și fie A o mulțime boreliană relativ compactă cu $\mu(A) = 0$. Pentru orice mulțime boreliană $B \subset A$ avem $\mu(B) = 0$ deci $\mathbf{m}(B) = 0$. Atunci (propoziția 24, § 8)

$$|\mathbf{m}|(A) = \sup \sum |\mathbf{m}(A_i)| = 0,$$

unde marginea superioară se ia pentru toate partițiile finite (A_i) ale lui A în mulțimi boreliene. Așadar $|\mathbf{m}|$ este absolut continuă în raport cu μ și propoziția este demonstrată.

Dacă o măsură $\mathbf{m}$ este de forma $\mathbf{m} = \mathbf{u}\mu$, unde μ este o măsură pozitivă, atunci, evident, $\mathbf{m}$ este absolut continuă în raport cu μ.

Reciproc, vom demonstra că dacă $\mathbf{m}$ este absolut continuă în raport cu μ, atunci $\mathbf{m}$ este de bază μ.

Vom demonstra mai întîi că orice măsură majorată este de bază modulul său.

Teorema 2. *Fie* X *un spațiu Banach,* $\mathbf{m} : \mathcal{K}(T) \to X$ *o măsură majorată și* μ *modulul său. Fie* E *și* F *două spații Banach cu* $X \subset \mathcal{L}(E, F)$ *și fie* Z *un subspațiu al lui* F' *normant pentru* F. *Există atunci o funcție* $U_{\mathbf{m}} : T \to \mathcal{L}(E, Z')$ *cu următoarele proprietăți :*

1) $|U_{\mathbf{m}}(t)| = 1$, μ-*aproape peste tot*;

2) $U_{\mathbf{m}}$ *este* Z-*slab local* μ-*integrabilă și avem* $\mathbf{m} = U_{\mathbf{m}}\,\mu$ *deci*

$$< \int \mathbf{f}\,d\mathbf{m}, z > = \int < U_{\mathbf{m}}(t)\,\mathbf{f}(t), z > d\mu, \quad \textit{pentru } \mathbf{f} \in \mathcal{L}^1_E(\mu) \textit{ și } z \in Z;$$

3) *dacă* ρ *este o ridicare a lui* $\mathcal{L}^\infty(\mu)$, *se poate alege* $U_{\mathbf{m}}$ *în mod unic astfel încît să avem* $\rho(U_{\mathbf{m}}) = U_{\mathbf{m}}$ *adică*

$$\rho(< U_{\mathbf{m}} x, z >) = < U_{\mathbf{m}} x, z >, \textit{ pentru orice } x \in E \textit{ și } z \in Z;$$

4) *se poate alege* $U_{\mathbf{m}}(t) \in \mathcal{L}(E, F)$ *pentru orice* $t \in T$ *în fiecare din următoarele cazuri:*

a) $F = Z'$;

b) pentru fiecare $x \in E$, *acoperirea convexă și echilibrată a mulțimii* $A_x = \{\mathbf{m}(\varphi x);\ \varphi \in \mathcal{K}(T),\ \mu(|\varphi|) \leqslant 1\}$ *este relativ compactă în* F *pentru topologia* $\sigma(F, Z)$.

Demonstrație. Fie ρ o ridicare a lui $\mathcal{L}^\infty(\mu)$. Pentru orice $x \in E$ și orice $z \in Z$ să definim măsura scalară $\mathbf{m}_{x,z}$ prin egalitatea

$$\mathbf{m}_{x,z}(\varphi) = <\mathbf{m}(\varphi x),\ z>, \text{ pentru } \varphi \in \mathcal{K}(T).$$

Avem

$$|\mathbf{m}_{x,z}| \leqslant |x|\ |z|\ \mu.$$

Există deci o funcție scalară $g_{x,z}$ definită pe T, mărginită și μ-măsurabilă, astfel încît să avem

$$\mathbf{m}_{x,z} = g_{x,z}\ \mu.$$

Modificînd funcția $g_{x,z}$ pe o mulțime μ-neglijabilă, putem considera că

$$\rho(g_{x,z}) = g_{x,z}.$$

Din această egalitate și din relațiile $|\mathbf{m}_{x,z}| = |g_{x,z}|\,\mu \leqslant |x|\ |z|\ \mu$ deducem că

$$|g_{xvz}(t)| \leqslant |x|\ |z|, \text{ pentru } \textit{orice } t \in T.$$

Aplicația $(x, z) \to \mathbf{m}_{x,z}$ a lui $E \times Z$ în spațiul măsurilor scalare este biliniară. Deoarece $\rho(g_{x,z}) = g_{x,z}$, deducem că aplicația $(x, z) \to g_{x,z}$ a lui $E \times Z$ în spațiul funcțiilor scalare mărginite și μ-măsurabile este biliniară, deci pentru fiecare $t \in T$ aplicația $(x, z) \to g_{x,z}(t)$ este o *funcțională biliniară* pe $E \times Z$.

Pentru $t \in T$ și $x \in E$ fixați, aplicația $g_x(t) : z \to g_{x,z}(t)$ este o funcțională liniară continuă pe Z, deci $g_x(t) \in E'$ și avem

$$|g_x(t)| \leqslant |x|.$$

Pentru $t \in T$ fixat, aplicația $U_{\mathbf{m}}(t) : x \to g_x(t)$ a lui E în Z' este liniară și continuă, deci $U_{\mathbf{m}}(t) \in \mathcal{L}(E, Z')$ și avem

$$|U_{\mathbf{m}}(t)| \leqslant 1.$$

Atunci

$$< U_{\mathbf{m}}(t)\, x, z > = g_{x,z}(t), \text{ pentru } t \in T,\ x \in E \text{ și } z \in Z.$$

Folosind egalitatea $\rho(g_{x,z}) = g_{x,z}$, deducem că

$$\rho(U_{\mathbf{m}}) = U_{\mathbf{m}}.$$

Unicitatea lui $U_{\mathbf{m}}$ rezultă acum din proprietatea 3 de la punctul 3, § 12.

Din propoziţia 7, § 13, deducem că funcţia $t \to |U_{\mathbf{m}}(t)|$ este μ-măsurabilă; fiind şi mărginită, această funcţie este local μ-integrabilă, deci $U_{\mathbf{m}}$ este Z-slab local μ-integrabilă. Pentru $\varphi \in \mathcal{K}(T)$, $x \in E$ şi $z \in Z$ avem

$$< \int \varphi x \, \mathrm{dm}, \, z > = \int \varphi \, \mathrm{dm}_{x,z} = \int \varphi g_{x,z} \, \mathrm{d}\mu = \int < U_{\mathbf{m}}(t) \, \varphi(t) x, \, z > \mathrm{d}\mu,$$

deci $\mathbf{m} = U_{\mathbf{m}} \mu$.

Dacă $\mathbf{f} \in \mathcal{L}^1_E(\mu)$, atunci $\mathbf{f} \in \mathcal{L}^1_E(|U_{\mathbf{m}}|\mu)$, deoarece $|U_{\mathbf{m}}|\mu \leqslant \mu$. Din teorema 2, § 16, rezultă atunci că

$$< \int \mathbf{f} \, \mathrm{dm}, \, z > = \int < U_{\mathbf{m}}(t) \mathbf{f}(t), \, z > \mathrm{d}\mu, \text{ pentru } \mathbf{f} \in \mathcal{L}^1_E(\mu) \text{ şi } z \in Z.$$

Luînd $\mathbf{f} = \varphi x$ cu $\varphi \in \mathcal{K}(T)$ şi $x \in E$, deducem

$$|\mathbf{m}(\varphi)| \leqslant \int |U_{\mathbf{m}}| \, |\varphi| \, \mathrm{d}\mu = \int |\varphi| \, \mathrm{d}(|U_{\mathbf{m}}|\mu),$$

adică $|\mathbf{m}| \leqslant |U_{\mathbf{m}}|\mu$. Deoarece $|\mathbf{m}| = \mu$, deducem că $|U_{\mathbf{m}}(t)| \geqslant 1$, μ-aproape peste tot, deci

$$|U_{\mathbf{m}}(t)| = 1, \ \mu\text{-aproape peste tot.}$$

În acest fel, primele trei puncte ale teoremei sînt demonstrate. Să demonstrăm punctul 4). Cazul $F = Z'$ este banal. Să presupunem acum îndeplinită condiţia b) de la punctul 4) şi fie $x \in E$. Să notăm cu A închiderea în topologia $\sigma(F, Z)$ a acoperirii echilibrate şi convexe a mulţimii $\{\mathbf{m}(\varphi x); \varphi \in \mathcal{K}(T), \mu(\varphi) \leqslant 1\}$; conform ipotezei b), mulţimea A este compactă pentru topologia $\sigma(F, Z)$. Mulţimea A este de asemenea compactă în dualul algebric Z^* pentru topologia $\sigma(Z^*, Z)$: există deci o familie $(z_i)_{i \in I}$ de elemente din Z astfel încît

$$A = \bigcap_{i \in I} \{y; \, y \in Z^*, \ | < y, \, z_i > | \leqslant 1\}.$$

Atunci, pentru orice $i \in I$ şi orice $\varphi \in \mathcal{K}(T)$ cu $\mu(\varphi) \leqslant 1$, avem

$$\left| \int < \varphi x \ \mathrm{dm}, \, z_i > \right| \leqslant 1.$$

Urmează că

$$\left| \int < U_{\mathbf{m}}(t) x, \, z_i > \varphi(t) \, \mathrm{d}\mu \right| \leqslant 1$$

pentru orice $i \in I$ şi $\varphi \in \mathcal{K}(T)$ cu $\int |\varphi| \, \mathrm{d}\mu \leqslant 1$, deci

$$| < U_{\mathbf{m}}(t) \, x, \, z_i > | \leqslant 1, \ \nu - \text{aproape peste tot}$$

pentru fiecare $i \in I$. Deoarece

$$\rho(| < U_{\mathbf{m}} x, \, z_i > |) = |\rho(< U_{\mathbf{m}} x, \, z_i >)| = | < U_{\mathbf{m}} x, \, z_i > |$$

deducem că

$$| < U_{\mathbf{m}}(t)\, x,\ z_i > | \leqslant 1, \text{ pentru orice } i \in I \text{ și orice } t \in T,$$

deci

$$U_{\mathbf{m}}(t)\, x \in A \subset F, \text{ pentru orice } t \in T.$$

Cum $x \in E$ a fost ales arbitrar, rezultă că $U_{\mathbf{m}}(t) \in \mathcal{L}(E, F)$, pentru orice $t \in T$.

Observație. Funcția $U_{\mathbf{m}}$ depinde atît de spațiile E și F cît și de spațiul Z. Dacă se ia $Z = F'$, atunci $U_{\mathbf{m}}(t) \in \mathcal{L}(E, F'')$ pentru fiecare $t \in T$. În acest caz dacă $Z_1 \subset F'$ este un subspațiu oarecare normant pentru F și dacă $U_1 : T \to \mathcal{L}(E, Z_1')$ este funcția corespunzătoare, atunci pentru orice $t \in T$ și orice $x \in E$, funcționala $U_1(t)\, x \in Z_1'$ este restricția la Z_1 a funcționalei $U_{\mathbf{m}}(t)\, x \in F''$. Prin abuz de notație, vom însemna funcția U_1 tot cu $U_{\mathbf{m}}$.

Putem da acum o generalizare a teoremei lui Lebesgue-Nikodym.

Teorema 3. *Fie ν o măsură scalară, X un spațiu Banach, $\mathbf{m} : \mathcal{K}(T) \to X$ o măsură majorată, absolut continuă în raport cu ν. Fie E și F două spații Banach cu $X \subset \mathcal{L}(E, F)$ și fie Z un subspațiu al lui F' normant pentru F. Există atunci o funcție $V_{\mathbf{m}} : T \to \mathcal{L}(E, Z')$ cu următoarele proprietăți:*

1) *Funcția $|V_{\mathbf{m}}|$ este local μ-integrabilă și avem $|\mathbf{m}| = |V_{\mathbf{m}}|\, |\nu|$ adică*

$$\int \varphi\, d|\mathbf{m}| = \int |V_{\mathbf{m}}|\, \varphi\, d|\nu|, \text{ pentru } \varphi \in \mathcal{L}^1(\mathbf{m}).$$

2) *Funcția $V_{\mathbf{m}}$ este Z-slab local μ-integrabilă și avem $\mathbf{m} = V_{\mathbf{m}}\, \nu$, deci*

$$< \int \mathbf{f} d\mathbf{m},\ z > = \int < V_{\mathbf{m}}(t)\, \mathbf{f}(t), z > d\nu, \text{ pentru } \mathbf{f} \in \mathcal{L}_E^1(\mathbf{m}) \text{ și } z \in Z.$$

3) *Dacă ρ este o ridicare a lui $\mathcal{L}^\infty(\nu)$, se poate alege $V_{\mathbf{m}}$ unic ν-aproape peste tot astfel încît să avem $\rho[V_{\mathbf{m}}] = V_{\mathbf{m}}$.*

Dacă, în plus, există $\alpha > 0$ cu $|\mathbf{m}| \leqslant \alpha\, |\nu|$, atunci se poate alege $V_{\mathbf{m}}$ în mod unic astfel ca $\rho(V_{\mathbf{m}}) = V_{\mathbf{m}}$, adică

$$\rho(< V_{\mathbf{m}}\, x, z >) = < V_{\mathbf{m}}\, x,\ z >, \text{ pentru } x \in E \text{ și } z \in Z.$$

4) *Se poate alege $V_{\mathbf{m}}(t) \in \mathcal{L}(E, F)$ pentru orice $t \in T$ în fiecare din următoarele cazuri:*

a) $F = Z'$;

b) *pentru fiecare $x \in E$, acoperirea convexă și echilibrată a mulțimii $A_x = \left\{ \mathbf{m}(\varphi x);\ \varphi \in \mathcal{K}(T), \int |\varphi|\, d|\mathbf{m}| \leqslant 1 \right\}$ este relativ compactă penrtu topologia $\sigma(F, Z)$;*

c) *pentru fiecare $x \in E$, acoperirea convexă și echilibrată a mulțimii $B_x = \left\{ \mathbf{m}(\varphi x);\ \varphi \in (\mathcal{K}T), \int |\varphi|\, d|\nu| \leqslant 1 \right\}$ este relativ compactă în F pentru topologia $\sigma(F, Z)$.*

Să notăm $\mu = |\mathbf{m}|$. Deoarece μ este absolut continuă în raport cu $|\nu|$, există o funcţie local ν-integrabilă $g \geqslant 0$ cu $\mu = g|\nu|$ (teorema 1).

Din propoziţia 5 deducem că există o funcţie scalară local ν-integrabilă φ cu $|\varphi(t)| \equiv 1$, $\nu = \varphi|\nu|$ şi $|\nu| = \frac{1}{\varphi}\nu$. Funcţia $g\frac{1}{\varphi}$ este atunci local ν-integrabilă şi $\mu = g\frac{1}{\varphi}\nu$.

Fie $U_{\mathbf{m}} : T \to \mathcal{L}(E, Z')$ funcţia care corespunde măsurii $\mathbf{m}$ prin teorema 2 şi să punem $V = U_{\mathbf{m}}\, g\frac{1}{\varphi}$. Deoarece $|U_{\mathbf{m}}(t)| = 1$ μ-aproape peste tot, funcţia $|U_{\mathbf{m}}| - 1$ este μ-neglijabilă, deci funcţia $(|U_{\mathbf{m}}| - 1)g$ este ν-neglijabilă, deci $|U_{\mathbf{m}}(t)|\, g(t) = g(t)$ ν-aproape peste tot. Urmează atunci că $|V(t)| = g(t)$ ν-aproape peste tot, deci $|V|$ este local ν-integrabilă şi avem $\mu = |V|\,|\nu|$.

Luînd $V_{\mathbf{m}} = V$, punctul 1 este demonstrat.

Deoarece $U_{\mathbf{m}}$ este Z-slab local μ-măsurabilă, urmează că pentru orice $x \in E$ şi orice $z \in Z$ funcţia $< U_{\mathbf{m}} x, z >$ este μ-măsurabilă; atunci funcţia $< U_{\mathbf{m}} x, z > g$ este ν-măsurabilă, deci funcţia $< Vx, z > = < U_{\mathbf{m}} x, z > g\frac{1}{\varphi}$ este ν-măsurabilă. Aceasta înseamnă că V este Z-slab ν-măsurabilă. Deoarece $|V|$ este local ν-integrabilă, rezultă că V este Z-slab local ν-integrabilă.

Pentru orice $\mathbf{f} \in \mathcal{L}^1_E(\mu)$ şi orice $z \in Z$ avem

$$< \int \mathbf{f}\, d\mathbf{m}, z > = \int < U_{\mathbf{m}} \mathbf{f}, z > d\mu = \int < U_{\mathbf{m}}\, g\frac{1}{\varphi}\mathbf{f}, z > d\nu = \int < V\mathbf{f}, z > d\nu.$$

Luînd $V_{\mathbf{m}} = V$, punctul 2) este de asemenea demonstrat. Fie acum ρ o ridicare a lui $\mathcal{L}^\infty(\nu)$. Din propoziţia 9, § 13, deducem că există o funcţie $V_{\mathbf{m}} : T \to \mathcal{L}^*(E, Z')$ cu $\rho[V_{\mathbf{m}}] = V_{\mathbf{m}}$, $< V_{\mathbf{m}} x, z > = < Vx, z >$ pentru orice $x \in E$ şi $z \in Z$ (adică $V_{\mathbf{m}} \equiv V$) şi $|V_{\mathbf{m}}(t)| \leqslant |V(t)|$ pentru orice $t \in T$. Funcţia $|V_{\mathbf{m}}|$ este ν-măsurabilă, şi deci din inegalitatea $|V_{\mathbf{m}}| \leqslant |V|$ rezultă că $|V_{\mathbf{m}}|$ este Z-local ν-integrabilă.

Din relaţia $V_{\mathbf{m}} \equiv V$ deducem că $V_{\mathbf{m}}$ este Z-local ν-integrabilă şi

$$< \int \mathbf{f}\, d\mathbf{m}, z > = \int < V_{\mathbf{m}} \mathbf{f}, z > d\nu, \text{ pentru } \mathbf{f} \in \mathcal{L}^1_E(\mathbf{m}) \text{ şi } z \in Z.$$

Luînd $\varphi \in \mathcal{X}(T)$, $x \in E$ şi $z \in Z$ deducem

$$|< \mathbf{m}(\varphi)\, x, z >| \leqslant \int |V_{\mathbf{m}}|\,|\varphi|\,|x|\,|z|\, d|\nu|$$

deci, luînd marginea superioară pentru $x \in E$ cu $|x| \leqslant 1$ şi $z \in Z$ cu $|z| \leqslant 1$,

$$|\mathbf{m}(\varphi)| \leqslant \int |V_{\mathbf{m}}|\,|\varphi|\, d|\nu| = \int |\varphi|\, d(|V_{\mathbf{m}}|\,|\nu|).$$

Urmează că $|\mathbf{m}| \leqslant |V_{\mathbf{m}}|\,|\nu| \leqslant |V|\,|\nu| = \mu$, deci $\mu = |V_{\mathbf{m}}|\,|\nu|$.

Să presupunem în sfîrșit, că există $\alpha > 0$ cu $\mu \leqslant \alpha |\nu|$. Atunci. funcția g aparține spațiului $\mathcal{L}^\infty(\mu)$ și deci $|V| \in \mathcal{L}^\infty(\nu)$. Din corolarul propoziției 8, § 13, rezultă că există o funcție $V_{\mathbf{m}} : T \to \mathcal{L}^*(E, Z')$ cu $\rho(V_{\mathbf{m}}) = V_{\mathbf{m}}$, $V_{\mathbf{m}} \equiv V$ și $|V_{\mathbf{m}}(t)| \leqslant |V(t)|$, ν-aproape peste tot. Se demonstrază apoi că $V_{\mathbf{m}}$ are toate proprietățile de la punctele 1) și 2), ca și în cazul $\rho[V_{\mathbf{m}}] = V_{\mathbf{m}}$. În acest fel punctul 3) a fost de asemenea demonstrat.

Dacă sînt îndeplinite condițiile a) sau b) de la punctul 4), atunci $U_{\mathbf{m}}$ are valori în $\mathcal{L}(E, F)$ deci și $V_{\mathbf{m}}$ are valori în $\mathcal{L}(E, F)$. Dacă este îndeplinită condiția c), se demonstrează că $V_{\mathbf{m}}$ are valori în $\mathcal{L}(E, F)$ la fel ca în teorema 2.

Cu aceasta teorema 3 este complet demonstrată.

Observație. Funcția $V_{\mathbf{m}}$ depinde atît de spațiile E și F cît și de spațiul Z ales.

5. Cazul $|\mathbf{gm}| = |\mathbf{g}||\mathbf{m}|$

Fiind dată o măsură de forma $\mathbf{gm}$, în general avem numai inegalitatea $|\mathbf{gm}| \leqslant |\mathbf{g}|\,|\mathbf{m}|$.

Dacă însă măsura $\mathbf{m}$ este scalară sau dacă funcția $\mathbf{g}$ este scalară, avem egalitatea $|\mathbf{gm}| = |\mathbf{g}|\,|\mathbf{m}|$.

Vom considera întîi cazul măsurilor cu baze scalare.

Fie E și F două spații Banach și $Z \subset F'$ un subspațiu normant pentru F.

Teorema 4. *Fie μ o măsură scalară și $\mathbf{g} : T \to \mathcal{L}^*(E, F)$ o funcție Z-slab local μ-integrabilă. Avem*

$$|\mathbf{g}\mu| = |\mathbf{g}|\,|\mu|$$

în fiecare din următoarele cazuri:

1) *există o ridicare ρ a lui $\mathcal{L}^\infty(\mu)$ astfel încît $\rho[\mathbf{g}] = \mathbf{g}$;*

2) *E este de tip numărabil și există o mulțime numărabilă $S \subset Z$ normantă pentru F;*

3) *E este un tip numărabil și $\mathbf{g}$ este simplu local μ-integrabilă;*

4) *$\mathbf{g}$ este local μ-integrabilă.*

Să notăm $\mathbf{m} = \mathbf{g}\mu$. Măsura $\mathbf{m}$ are valori în $\mathcal{L}(E, Z')$ și este absolut continuă în raport cu μ. Conform teoremei 3 există o funcție Z-slab local μ-integrabilă $V : T \to \mathcal{L}(E, Z')$ astfel încît $\mathbf{m} = V\mu$ și $|\mathbf{m}| = |V|\,|\mu|$. În plus, pentru orice ridicare ρ a lui $\mathcal{L}^\infty(\mu)$ putem alege V astfel încît să avem $\rho[V] = V$. Atunci avem de asemenea $\rho[Vx] = Vx$ pentru orice $x \in E$.

Să presupunem mai întîi că există o ridicare ρ a alui $\mathcal{L}^\infty(\mu)$ astfel încît $\rho[\mathbf{g}] = \mathbf{g}$ (condiția 1). Atunci alegem V astfel încît $\rho[V] = V$. Din egalitatea $\mathbf{m} = V\mu = \mathbf{g}\mu$ deducem atunci (prop. 13, § 17) că $V(t) = \mathbf{g}(t)$ μ-aproape peste tot, deci $|V(t)| = |\mathbf{g}(t)|$ μ-aproape peste tot și deci

$$|\mathbf{g}\mu| = |\mathbf{m}| = |V|\,|\mu| = |\mathbf{g}|\,|\mu|.$$

Să presupunem apoi că este îndeplinită condiția 2) din enunț. Din egalitatea $\mathbf{m} = V\mu = \mathbf{g}\mu$ deducem atunci că $V(t) = \mathbf{g}(t)$ μ-aproape peste tot (prop. 14, § 17) și deci

$$|\mathbf{g}\mu| = |\mathbf{m}| = |V|\,|\mu| = |\mathbf{g}|\,|\mu|.$$

Să presupunem că $\mathbf{g}$ este local μ-integrabilă (condiția 4)).

Fie φ o funcție scalară local $|\mu|$-integrabilă astfel încît $|\varphi(t)| \equiv 1$ și $\mu = \varphi|\mu|$ (prop. 5). Funcția $\mathbf{g}\varphi$ este local $|\mu|$-integrabilă și avem (prop. 13, § 16).

$$\mathbf{g}\mu = \mathbf{g}(\varphi|\mu|) = (\mathbf{g}\varphi)|\mu|.$$

Pentru funcția $\mathbf{g}\varphi$ avem $|\mathbf{g}\varphi| = |\mathbf{g}|\,|\varphi| = |\mathbf{g}|$ iar pentru măsura $(\mathbf{g}\varphi)\,|\mu|$ avem (teorema 1, § 17)

$$|(\mathbf{g}\varphi)\,|\mu|| = |\mathbf{g}\varphi|\,|\mu| = |\mathbf{g}|\,|\mu|,$$

de unde

$$|\mathbf{g}\mu| = |(\mathbf{g}\varphi)\,|\mu|| = |\mathbf{g}|\,|\mu|.$$

Să presupunem, în sfîrșit, condiția 3). Fie $x \in E$. Funcția $\mathbf{g}x$ este local μ-integrabilă, deci conform cazului 4) deja demonstrat, avem

$$|(\mathbf{g}x)\,\mu| = |\mathbf{g}x|\,|\mu|.$$

Fie ρ o ridicare a lui $\mathcal{L}^\infty(\mu)$ și să alegem V astfel încît $\rho[V] = V$. Atunci avem de asemenea $\rho[V\,x] = Vx$.

Funcția Vx este Z-slab local μ-integrabilă, deci conform cazului 1) deja demonstrat avem

$$|(Vx)\,\mu| = |Vx|\,|\mu|.$$

Avem însă $(\mathbf{g}x)\mu = (Vx)\,\mu$, deoarece pentru orice $\varphi \in \mathcal{K}(T)$ și orice $z \in Z$ avem

$$<\int \varphi\, \mathrm{d}\,(\mathbf{g}x)\,\mu, z> = \int <\varphi\,\mathbf{g}x, z>\mathrm{d}\mu = <\int \varphi \mathrm{d}\,(\mathbf{g}\mu)\,x, z> =$$

$$= <\int \varphi\,\mathrm{d}\mathbf{m}\,x, z> = \int <V\,x\,\varphi, z>\mathrm{d}\mu = <\int \varphi \mathrm{d}\,(Vx)\,\mu, z>,$$

de unde $\int \varphi \mathrm{d}\,(\mathbf{g}\,x)\,\mu = \int \varphi \mathrm{d}\,(Vx)\,\mu$, pentru orice $\varphi \in \mathcal{K}(T)$ și deci $(\mathbf{g}\,x)\mu = (Vx)\,\mu$. Atunci

$$|\mathbf{g}x|\,|\mu| = |(gx)\mu| = |(Vx)\,\mu| = |Vx|\,|\mu\,|$$

deci $|\mathbf{g}(t)\,x| = |V(t)x|$, μ-aproape peste tot. Făcînd x să parcurgă o mulțime numărabilă densă în E, deducem că $|\mathbf{g}(t)| = |V(t)|$, μ-aproape peste tot și deci

$$|\mathbf{g}\mu| = |V\,\mu| = |V|\,|\mu| = |\mathbf{g}|\,|\mu|$$

și teorema este complet demonstrată.

Observație. În cazul 4) nu este necesar ca funcția $\mathbf{g}$ să aibă valori operatori. Cazul 4) se poate enunța astfel : Fie X un spațiu Banach oarecare

Dacă μ este o măsură scalară și dacă $\mathbf{g} : T \to X$ este o funcție local μ-integrabilă, atunci $|\mathbf{g}\mu| = |\mathbf{g}|\,|\mu|$.

Corolar. *Fie μ o măsură reală și $g \geqslant 0$ o funcție local μ-integrabilă. Atunci*

$$(g\mu)^+ = g\mu^+ \quad \text{și} \quad (g\mu)^- = g\mu^-.$$

Într-adevăr,

$$(g\mu)^+ = \frac{1}{2}(|g\mu| + g\mu) = \frac{1}{2}(g|\mu| + g\mu) = g\frac{1}{2}(|\mu| + \mu) = g\mu^+$$

și

$$(g\mu)^- = \frac{1}{2}(|g\mu| - g\mu) = \frac{1}{2}(g|\mu| - g\mu) = g\frac{1}{2}(|\mu| - \mu) = g\mu^-.$$

Propoziția 10. *Fie μ o măsură scalară și $\mathbf{g}_1$, $\mathbf{g}_2 : T \to \mathcal{L}^*(E, F)$ două funcții Z-slab local μ-integrabile. Avem $\mathbf{g}_1\mu = \mathbf{g}_2\mu$ dacă și numai dacă $\mathbf{g}_1(t) = \mathbf{g}_2(t)$ μ-aproape peste tot, în fiecare din următoarele cazuri:*

1) *există o ridicare ρ a lui $\mathcal{L}^\infty(\mu)$ astfel încît să avem $\rho[\mathbf{g}_1] = \mathbf{g}_1$ și $\rho[\mathbf{g}_2] = \mathbf{g}_2$;*

2) *E este de tip numărabil și există o mulțime numărabilă $S \subset Z$ normantă pentru F;*

3) *E este de tip numărabil iar $\mathbf{g}_1$ și $\mathbf{g}_2$ sînt simplu local μ-integrabile;*

4) *$\mathbf{g}_1$ și $\mathbf{g}_2$ sînt local μ-integrabile.*

Să presupunem că $\mathbf{g}_1\mu = \mathbf{g}_2\mu$.

Să notăm $\mathbf{g} = \mathbf{g}_1 - \mathbf{g}_2$. Atunci $\mathbf{g}$ este Z-slab local μ-integrabilă și avem

$$\mathbf{g}\mu = \mathbf{g}_1\mu - \mathbf{g}_2\mu = 0.$$

În fiecare din aceste cazuri $\mathbf{g}$ are aceleași proprietăți ca și $\mathbf{g}_1$ și $\mathbf{g}_2$. Într-adevăr, în cazul 1) avem $\rho[\mathbf{g}] = \mathbf{g}$ în cazul 2) funcția $|\mathbf{g}|$ este μ-măsurabilă (prop. 22, § 15) deci $\mathbf{g}$ este Z-slab local μ-integrabilă; în cazul 3) funcția $|\mathbf{g}|$ este μ-măsurabilă (corolarul propoziției 13) deci $\mathbf{g}$ este simplu local μ-integrabilă; în cazul 4) $\mathbf{g}$ este local μ-integrabilă.

În fiecare din aceste cazuri avem deci

$$|\mathbf{g}\mu| = |\mathbf{g}|\,|\mu|,$$

de unde $|\mathbf{g}|\,|\mu| = 0$. Conform propoziției 3, § 17, avem $|\mathbf{g}(t)| = 0$ μ-aproape peste tot, deci $\mathbf{g}(t) = 0$ μ-aproape peste tot și deci $\mathbf{g}_1(t) = \mathbf{g}_2(t)$ μ-aproape peste tot.

Implicația reciprocă este evidentă.

Să considerăm acum cazul măsurilor cu baze vectoriale.

Teorema 5. *Dacă $\mathbf{m} : \mathcal{X}(T) \to E$ este o măsură majorată și g este o funcție scalară local $\mathbf{m}$-integrabilă, atunci*

$$|g\mathbf{m}| = |g|\,|\mathbf{m}|.$$

Fie ρ o ridicare a lui $\mathcal{L}^\infty(|\mathbf{m}|)$. Există o funcție E'-slab local $|\mathbf{m}|$-integrabilă $U : T \to E'' = \mathcal{L}(R, E'')$ astfel încît $\mathbf{m} = U|\mathbf{m}|$, $|U(t)| = 1$, $|\mathbf{m}|$-aproape peste tot și $\rho(U) = U$ (teorema 2).

Există de asemenea (prop. 9, § 13) o funcție scalară local $\mathbf{m}$-integrabilă g' egală cu g, $|\mathbf{m}|$-aproape peste tot și cu $\rho[g'] = g'$. Urmează că

funcţia g' este de asemenea local $|\mathbf{m}|$-integrabilă, deci funcţia Ug' este E'-slab local $|\mathbf{m}|$-integrabilă şi avem $\rho[Ug'] = Ug'$ şi (prop. 9, § 16)

$$g\mathbf{m} = g'\mathbf{m} \text{ şi } g'(U|\mathbf{m}|) = (g'U)\,|\mathbf{m}|.$$

Pe de altă parte, deoarece $g\mathbf{m}$ este absolut continuă în raport cu $|\mathbf{m}|$, există o funcţie E'-slab local $|\mathbf{m}|$-integrabilă $V : T \to E''$ cu $g\mathbf{m} = V|\mathbf{m}|$, $|g\mathbf{m}| = |V|\,|\mathbf{m}|$ şi $\rho[V] = V$ (teorema 3).

Deducem că $(g'U)\,|\mathbf{m}| = V|\mathbf{m}|$, deci $gU = g'U = V$, $|\mathbf{m}|$-aproape peste tot. Rezultă că $|g| = |gU| = |V|$, $|\mathbf{m}|$-aproape peste tot şi deci

$$|g\mathbf{m}| = |V|\,|\mathbf{m}| = |g|\,|\mathbf{m}|.$$

Propoziţia 11. *Fie* $\mathbf{m} : \mathcal{K}(T) \to E$ *o măsură majorată,* g_1 *şi* g_2 *două funcţii scalare local* $\mathbf{m}$*-integrabile. Atunci* $g_1\mathbf{m} = g_2\mathbf{m}$ *dacă şi numai dacă* $g_1(t) = g_2(t)$, $\mathbf{m}$*-aproape peste tot.*

Să presupunem că $g_1\mathbf{m} = g_2\mathbf{m}$, şi să notăm $g = g_1 - g_2$. Atunci g este local $\mathbf{m}$-integrabilă şi avem

$$g\mathbf{m} = g_1\mathbf{m} - g_2\mathbf{m} = 0$$

şi

$$|g\mathbf{m}| = |g|\,|\mathbf{m}|,$$

deci $|g|\,|\mathbf{m}| = 0$. Conform propoziţiei 3, § 17, avem $|g(t)| = 0$, $\mathbf{m}$-aproape peste tot.

6. Măsuri singulare*)

Definiţia 4. *Spunem că două măsuri majorate* $\mathbf{m}$, $\mathbf{n} : \mathcal{K}(T) \to F$ *sînt singulare* (*una în raprt cu cealaltă*) *dacă* $\inf(|\mathbf{m}|, |\mathbf{n}|) = 0$.

A spune că $\mathbf{m}$ şi $\mathbf{n}$ sînt singulare, înseamnă că pentru orice măsură $\lambda \geqslant 0$ pentru care $\lambda \leqslant |\mathbf{m}|$ şi $\lambda \leqslant |\mathbf{n}|$, avem $\lambda = 0$.

Definiţia 5. *Spunem că o măsură majorată* $\mathbf{m}$ *este concentrată pe o mulţime* M *sau că mulţimea* M *poartă măsura* $\mathbf{m}$, *dacă* $T - M$ *este* $\mathbf{m}$*-neglijabilă.*

A spune că $\mathbf{m}$ este concentrată pe M înseamnă că M este $\mathbf{m}$-măsurabilă şi că $\mathbf{m} = \varphi_M\mathbf{m}$.

Dacă μ este o măsură pozitivă concentrată pe M, orice măsură absolut continuă în raport cu μ este de asemenea concentrată pe M.

Observaţie. Printre mulţimile care poartă o măsură majorată $\mathbf{m}$, se află suportul său S. Suportul lui $\mathbf{m}$ este cea mai mică mulţime închisă, pe care este concentrată $\mathbf{m}$. Pot exista însă submulţimi stricte ale suportului S, pe care $\mathbf{m}$ să fie concentrată. În general, nu există cea mai mică mulţime care să poarte pe $\mathbf{m}$.

De exemplu, suportul măsurii Lebesgue este dreapta întreagă. Măsura Lebesgue μ este concentrată pe orice mulţime care este complementara unei părţi finite a dreptei, deoarece $\mu(\{t\}) = 0$ pentru orice punct $t \in R$.

*) Măsurile singulare sînt numite de N. Bourbaki măsuri străine.

Propoziția 12. *Pentru ca două măsuri* **m** *și* **n** *să fie singulare, este necesar și suficient să existe două mulțimi disjuncte* M *și* N *care să poarte respectiv pe* **m** *și* **n**.

Să notăm $\lambda = |\mathbf{m}| + |\mathbf{n}|$. Avem $|\mathbf{m}| = g\lambda$ și $|\mathbf{n}| = h\lambda$, g și h fiind funcții *pozitive* local λ-integrabile și

$$\inf(|\mathbf{m}|, |\mathbf{n}|) = \inf(g, h)\,\lambda.$$

Măsurile $|\mathbf{m}|$ și $|\mathbf{n}|$ sînt singulare, dacă și numai dacă $\inf(g, h) = 0$, λ-aproape peste tot, adică dacă și numai dacă există două mulțimi disjuncte M și N, λ-măsurabile, astfel încît $g = \varphi_M g$ și $h = \varphi_N$, h, λ-aproape peste tot.

Dar $g = \varphi_M g$, λ-aproape peste tot, dacă și numai dacă $g\lambda = (\varphi_M g)\lambda = \varphi_M(g\lambda)$, adică $|\mathbf{m}| = \varphi_M|\mathbf{m}|$, ceea ce înseamnă că mulțimea M poartă măsura $|\mathbf{m}|$, deci și măsura **m**.

De asemenea, $h = \varphi_N h$, λ-aproape peste tot, dacă și numai dacă mulțimea N poartă măsura **n**.

Cu aceasta propoziția este demonstrată.

Corolarul 1. *Fie* **m** *și* **n** *două măsuri singulare* (*una în raport cu cealaltă*). *Dacă* **m**′ *este o măsură absolut continuă în raport cu* **m** *iar* **n**′ *este o măsură absolut continuă în raport cu* **n**, *atunci* **m**′ *și* **n**′ *sînt singulare* (*una în raport cu cealaltă*).

În adevăr, există două mulțimi disjuncte M și N care poartă respectiv pe **m** și **n**. Așadar $T - M$ este **m**-neglijabilă iar $T - N$ este **n**-neglijabilă. Urmează că $T - M$ este **m**′-neglijabilă iar $T - N$ este **n**′-neglijabilă, deci **M** poartă pe **m**′ iar N poartă pe **n**′. Conform propoziției precedente **m**′ și **n**′ sînt singulare.

Corolarul 2. *Dacă* **m** *este în același timp absolut continuă în raport* **n** *și singulară în raport cu* **n**, *atunci* $\mathbf{m} = 0$.

Deoarece **m** și **n** sînt singulare, există două mulțimi disjuncte M și N astfel că $T - M$ să fie **m**-neglijabilă iar $T - N$ să fie **n**-neglijabilă. Deoarece **m** este absolut continuă în raport cu **n**, mulțimea $T - N$ este de asemenea **m**-neglijabilă. Urmează că $T = (T - M) \cup (T - N)$ este **m**-neglijabilă, deci $\mathbf{m} = 0$.

Corolarul 3. *Dacă* μ *este o măsură reală, atunci* μ^+ *și* μ^- *sînt singulare.*

În adevăr, există două mulțimi disjuncte μ-măsurabile A și B astfel că $\mu^+ = \varphi_A|\mu|$ și $\mu = \varphi_B|\mu|$. Urmează că μ^+ este concentrată pe A iar μ^- este concentrată pe B, deci μ^+ și μ^- sînt singulare.

Teorema 6 (Lebesgue). *Fie* μ *o măsură pozitivă. Orice măsură pozitivă* ν *se scrie în mod unic sub forma*

$$\nu = \mu' + \nu',$$

unde μ' *este o măsură pozitivă absolut continuă în raport cu* μ *iar* ν' *este o măsură pozitivă singulară în raport cu* μ.

Să considerăm măsura pozitivă $\lambda = \mu + \nu$.

Deoarece măsura ν este absolut continuă în raport cu λ, există o funcție local λ-integrabilă h, astfel încît

$$\nu = h\lambda.$$

Deoarece $0 \leqslant \nu \leqslant \lambda$, avem $0 \leqslant g(t) \leqslant 1$, λ-aproape peste tot, şi deci $0 \leqslant h(t) \leqslant 1$, ν-aproape peste tot (şi de asemenea μ-aproape peste tot, deoarece $\mu \leqslant \lambda$).

Funcţia h este de asemenea local ν-integrabilă şi local μ-integrabilă. Din egalitatea $\lambda = \mu + \nu$, rezultă $\nu = h\lambda = h\mu + h\nu$.

Să notăm

$$A = \{t;\ 0 \leqslant h(t) < 1\} \text{ şi } B = \{t;\ h(t) = 1\}.$$

Mulţimile A şi B sînt măsurabile în raport cu fiecare din măsurile μ, ν şi λ. Din egalitatea $\nu = h\mu + h\nu$, rezultă $(1 - h)\nu = h\mu$ deci

$$\int^* (1 - h)\, \varphi_B \, d\nu = \int^* h\varphi_B \, d\mu,$$

de unde $\mu^*(B) = 0$. Deducem că măsura $\nu' = \varphi_B \nu$ este singulară în raport cu μ.

Într-adevăr, fie ρ o măsură pozitivă astfel încît $\rho \leqslant \nu'$ şi $\rho \leqslant \mu$. Pentru orice mulţime $E \subset T$ avem

$$\rho^*(E) \leqslant \nu'^*(E) = \nu^*(E \cap B), \text{ şi } \rho^*(E) \leqslant \mu^*(E).$$

Rezultă că dacă $E \cap B = \varnothing$ avem $\rho^*(E) = 0$. Aşadar $\rho^*(E) = \rho^*(E \cap B) \leqslant \mu^*(E \cap B) = 0$, deci $\rho = 0$. Aceasta înseamnă că ν' şi μ sînt singulare.

Măsura $\mu' = \varphi_A \nu$ este absolut continuă în raport cu μ. Într-adevăr, fie $E \subset T$ o mulţime pentru care $\mu^*(E) = 0$.

Din egalitatea $\nu = h\mu + h\nu$ deducem $(1 - h)\nu = h\mu$ deci

$$\int^* (1 - h)\ \varphi_{A \cap E} \, d\nu = \int^* h\varphi_{A \cap E} \, d\mu = 0.$$

Dar $1 - h(t) > 0$ pentru orice $t \in A \cap E$. Rezultă atunci că $\nu^*(A \cap E) = 0$, adică $\mu'^*(E) = 0$. Aşadar μ' este absolut continuă în raport cu μ. Măsura ν se scrie acum

$$\nu = (\varphi_A + \varphi_B)\nu = \varphi_A \nu + \varphi_A \nu = \mu' + \nu'.$$

Dacă μ'' este o măsură pozitivă absolut continuă în raport cu μ iar ν'' este o măsură pozitivă singulară în raport cu μ, astfel încît să avem

$$\nu = \mu'' + \nu'',$$

atunci $\mu'' = \mu'$ şi $\nu'' = \nu'$.

Într-adevăr, din egalitatea $\mu' + \nu' = \mu'' + \nu'$ deducem

$$\mu' - \mu'' = \nu'' - \nu'.$$

Deoarece ν' şi ν'' sînt singulare în raport cu μ, există o mulţime M care poartă pe μ şi două mulţimi N' şi N'' care poartă respectiv pe ν' şi ν'' astfel încît $M \cap N' = \varnothing$ şi $M \cap N'' = \varnothing$. Măsura $\mu' - \mu''$ este absolut continuă în raport cu μ deci este concentrată pe M. Măsura $\nu'' - \nu'$ este concentrată pe $T - M$. Rezultă atunci că $\mu' - \mu'' = \nu'' - \nu' = 0$, deci $\mu' = \mu''$ şi $\nu' = \nu''$, adică scrierea $\nu = \mu' + \mu'$ este unică.

Cu aceasta teorema este demonstrată.

Teorema 7. *Fie* μ *o măsură pozitivă și* $\mathbf{m} : \mathcal{K}(T) \to E'$ *o măsură majorată. Atunci* $\mathbf{m}$ *se poate scrie în mod unic sub forma*

$$\mathbf{m} = \mathbf{m}' + \mathbf{n}'$$

astfel încît $\mathbf{m}' : \mathcal{K}(T) \to E'$ *este o măsură majorată absolut continuă în raport cu* μ *iar* $\mathbf{n}' : \mathcal{K}(T) \to E'$ *este o măsură singulară în raport cu* μ.

Conform teoremei 6, măsura pozitivă $|\mathbf{m}|$ se poate scrie sub forma

$$|\mathbf{m}| = \mu' + \nu',$$

unde μ' este o măsură pozitivă absolut continuă în raport cu μ iar ν' este o măsură pozitivă singulară în raport cu μ. Avem $\mu' \leqslant |\mathbf{m}|$ și $\nu' \leqslant |\mathbf{m}|$.

Conform teoremei 2, există o funcție E-slab local $|\mathbf{m}|$-integrabilă $U : T \to E'$ cu $|U(t)| = 1$, $|\mathbf{m}|$-aproape peste tot astfel încît $\mathbf{m} = U|\mathbf{m}|$.

Deoarece $\mu' \leqslant |\mathbf{m}|$ și $\nu' \leqslant |\mathbf{m}|$, funcția U este E-slab local integrabilă în raport cu μ' și ν'. Se pot deci defini măsurile $\mathbf{m}' = U\mu'$ și $\mathbf{n}' = U\nu'$ și avem

$$\mathbf{m} = \mathbf{m}' + \mathbf{n}'.$$

Din inegalitățile $|\mathbf{m}'| \leqslant |U|\ \mu' = \mu'$ și $|\mathbf{n}'| = |U|\nu' = \nu'$ deducem că $\mathbf{m}'$ este absolut continuă în raport cu μ' deci și în raport cu μ iar $\mathbf{n}'$ este singulară în raport μ.

Avem apoi

$$\mu' + \nu' = |\mathbf{m}| = |\mathbf{m}' + \mathbf{n}'| \leqslant |\mathbf{m}'| + |\mathbf{n}'| \leqslant \mu' + \nu'$$

deci $|\mathbf{m}| = |\mathbf{m}'| + |\mathbf{n}'|$. Urmează că $|\mathbf{m}'| = \mu'$ și $|\mathbf{n}'| = \nu'$.

Rămîne de arătat că descompunerea este unică.

Să presupunem că avem de asemenea $\mathbf{m} = \mathbf{m}'' + \mathbf{n}''$, unde $\mathbf{m}'' : \mathcal{K}(T) \to E'$ este o măsură majorată absolut continuă în raport cu μ iar $\mathbf{n}'' : \mathcal{K}(T) \to E'$ este o măsură majorată singulară în raport cu μ. Atunci $\mathbf{m}' - \mathbf{m}'' = \mathbf{n}'' - \mathbf{n}'$, deci $|\mathbf{m}' - \mathbf{m}''| = |\mathbf{n}' - \mathbf{n}'|$. Avem de asemenea $\lambda = |\mathbf{m}' - \mathbf{m}''| \leqslant |\mathbf{m}'| + |\mathbf{m}''|$ și $\lambda = |\mathbf{n}'' - \mathbf{n}'| \leqslant |\mathbf{n}''| + |\mathbf{n}'|$. Deducem de aici că măsura λ este în același timp absolut continuă în raport cu μ și singulară în raport cu μ. Urmează că $\lambda = 0$ adică $|\mathbf{m}' - \mathbf{m}''| = |\mathbf{n}'' - \mathbf{n}'| = 0$, deci $\mathbf{m}' = \mathbf{m}''$ și $\mathbf{n}' = \mathbf{n}''$.

Cu aceasta teorema este demonstrată.

7. Măsuri difuze. Măsuri atomice

Definiția 6. *Spunem că o măsură majorată* $\mathbf{m}$ *pe* T *este difuză dacă pentru orice* $t \in T$ *avem* $|\mathbf{m}|(\{t\}) = 0$.

A spune că o măsură $\mathbf{m}$ este difuză înseamnă că orice mulțime a cărei complementară este numărabilă, poartă pe $\mathbf{m}$.

Dacă n este absolut continuă în raport cu o măsură difuză m, atunci şi n este difuză.

Definiţia 7. *Spunem că o măsură majorată* m *pe* T *este atomică, dacă există o familie* $(\mu_\alpha)_{\alpha\in A}$ *de măsuri pozitive punctuale de forma* ε_t *astfel încît*

$$|\mathbf{m}|(\varphi) = \sum_{t\in A} \mu_\alpha(\varphi) \quad \textit{pentru } \varphi \in \mathcal{K}(T).$$

A spune că m este atomică, înseamnă că există o funcţie pozitivă α definită pe T, astfel încît să avem

$$|\mathbf{m}|(\varphi) = \sum_{t\in T} \alpha(t)\ \varphi(t), \text{ pentru } \varphi \in \mathcal{K}(T).$$

Urmează că pentru orice mulţime compactă $K \subset T$ avem

$$\sum_{t\in K} \alpha(t) < \infty$$

deci dacă notăm $N = \{t;\ \alpha(t) \neq 0\}$, mulţimea $N \cap K$ este cel mult numărabilă oricare ar fi mulţimea compactă $K \subset T$. Deducem de asemenea că măsura m este concentrată pe N.

Propoziţia 13. *Orice măsură atomică* m *este singulară în raport cu orice măsură difuză* n.

Să scriem

$$|\mathbf{m}|(\varphi) = \sum_{t\in T} \alpha(t)\ \varphi(t), \text{ pentru } t \in T.$$

Măsura m este concentrată pe mulţimea $N = \{t;\ \alpha(t) \neq 0\}$ care are proprietatea că $N \cap K$ este cel mult numărabilă oricare ar fi mulţimea compactă K (a se vedea exemplul de la punctul 4, § 5).

Urmează că mulţimea $N \cap K$ este n-neglijabilă oricare ar fi mulţimea compactă $K \subset T$, deci N este n-neglijabilă, adică n este concentrată pe $T - N$. Aşadar m şi n sînt singulare.

Corolar. *Dacă* m *este în acelaşi timp atomică şi difuză, atunci* $\mathbf{m} = 0$.

Propoziţia 14. *Orice măsură pozitivă* μ *se poate scrie în mod unic sub forma* $\mu = \mu_1 + \mu_2$, *unde* μ_1 *este o măsură pozitivă atomică iar* μ_2 *este o măsură pozitivă difuză.*

Pentru orice $t \in T$ să punem $\alpha(t) = \mu(\{t\})$.

Fie $K \subset T$ o mulţime compactă. Pentru orice parte finită $I \subset K$ avem

$$\sum_{t\in K} \varphi(t) = \mu(I) \leqslant \mu(K)$$

deci

$$\sum_{t\in T} \varphi(t) < \infty.$$

Pentru orice funcție $\varphi \in \mathcal{K}(T)$ avem

$$\sum_{t \in T} \alpha(t) \, |\varphi(t)| \leqslant \sum_{t \in K} \alpha(t) \, \|\varphi\| < \infty,$$

unde K este suportul lui φ.

Să punem

$$\mu_1(\varphi) = \sum_{t \in T} \alpha(t) \, \varphi(t).$$

Se verifică ușor că μ_1 este liniară și pozitivă pe $\mathcal{K}(T)$ deci este o măsură pozitivă; μ_1 este o măsură atomică, deoarece

$$\mu_1(\varphi) = \sum_{t \in T} \alpha(t) \, \varepsilon_t(\varphi).$$

Avem, evident, $\mu_1 \leqslant \mu$. Atunci măsura $\mu_2 = \mu - \mu_1$ este pozitivă și difuză, deoarece pentru orice $t \in T$ avem $\mu_2(\{t\}) = \mu(\{t\}) - \mu_1(\{t\}) = 0$.

Unicitatea descompunerii rezultă din faptul că măsurile atomice sînt singulare în raport cu măsurile difuze.

Propoziția 15. *Fie E un spațiu Banach. Orice măsură majorată $\mathbf{m} : \mathcal{K}(T) \to E'$ se poate scrie în mod unic sub forma*

$$\mathbf{m} = \mathbf{m}_1 + \mathbf{m}_2$$

unde $\mathbf{m}_1 : \mathcal{K}(T) \to E'$ este o măsură majorată atomică iar $\mathbf{m}_2 : \mathcal{K}(T) \to E'$ este o măsură majorată difuză.

Conform propoziției 14, măsura pozitivă $|\mathbf{m}|$ se poate scrie

$$|\mathbf{m}| = \mu_1 + \mu_2,$$

unde μ_1 este o măsură pozitivă atomică iar μ_2 este o măsură pozitivă difuză.

Măsura $\mathbf{m}$ se poate scrie $\mathbf{m} = U|\mathbf{m}|$, unde $U : T \to E'$ este o funcție E-slab local $\mathbf{m}$-integrabilă cu $|U(t)| = 1$.

Din inegalitățile $\mu_1 \leqslant |\mathbf{m}|$ și $\mu_2 \leqslant |\mathbf{m}|$ deducem că U este E-slab local integrabilă în raport cu μ_1 și μ_2, deci se pot defini măsurile $\mathbf{m}_1 = U\mu_1$ și $\mathbf{m}_2 = U\mu_2$. Avem

$$\mathbf{m} = \mathbf{m}_1 + \mathbf{m}_2.$$

Pe de altă parte $|\mathbf{m}| \leqslant |U| \, \mu_1 = \mu_1$ și $|\mathbf{m}_2| \leqslant |U| \mu_2 = \mu_2$ deci

$$\mu_1 + \mu_2 = |\mathbf{m}| = |\mathbf{m}_1 + \mathbf{m}_2| \leqslant |\mathbf{m}_1| + |\mathbf{m}_2| \leqslant \mu_1 + \mu_2.$$

Urmează că $|\mathbf{m}| + |\mathbf{m}_2| = \mu_1 + \mu_2$ de unde $|\mathbf{m}_1| = \mu_1$ și $|\mathbf{m}_2| = \mu_2$. Deducem de aici că $\mathbf{m}_1$ este atomică iar $\mathbf{m}_2$ este difuză.

Să presupunem că $\mathbf{m}$ se scrie de asemenea sub forma

$$\mathbf{m} = \mathbf{m}_1' + \mathbf{m}_2',$$

unde $\mathbf{m}_1'$ este atomică iar $\mathbf{m}_2'$ este difuză. Atunci $\mathbf{m}_1 - \mathbf{m}_1' = \mathbf{m}_2' - \mathbf{m}_2$, deci $|\mathbf{m}_1 - \mathbf{m}_1'| = |\mathbf{m}_2' - \mathbf{m}_2|$. Din inegalitățile $\mu = |\mathbf{m}_1 - \mathbf{m}_1'| \leqslant |\mathbf{m}_1| + |\mathbf{m}_1'|$

şi $\mu = |\mathbf{m}_2' - \mathbf{m}_2| \leqslant |\mathbf{m}_2'| + |\mathbf{m}_2|$ deducem că μ este atomică şi difuză, deci $\mu = 0$, adică $|\mathbf{m}_1' - \mathbf{m}_1| = |\mathbf{m}_2' - \mathbf{m}_2| = 0$, de unde $\mathbf{m}_1' = \mathbf{m}_1$ şi $\mathbf{m}_2' = \mathbf{m}_2$.

8. Operaţii liniare pe spaţiul $\mathcal{L}_E^p$

Fie E şi F două spaţii Banach şi μ o măsură pozitivă pe T. Să considerăm spaţiul $\mathcal{L}_E^p(\mu)$ cu $1 \leqslant p < \infty$. Fie U o aplicaţie liniară a spaţiului $\mathcal{L}_E^p(\mu)$ în F. Să punem

$$|||U||| = \sup \sum |U(\varphi_{A_i}\, x_i)|,$$

marginea superioară fiind considerată pentru toate funcţiile etajate boreliene $\mathbf{f} = \sum \varphi_{A_i}\, x_i$ cu A_i disjuncte două cîte două şi $x_i \in E$, astfel încît $N_p(\mathbf{f}, \mu) \leqslant 1$.

Avem

$$\|U\| \leqslant |||U||| \leqslant \infty.$$

Într-adevăr,

$$\|U\| = \sup |U(\sum \varphi_{A_i}\, x_i)| = \sup |\sum U(\varphi_{A_i}\, x_i)| \leqslant$$
$$\leqslant \sup \sum |U(\varphi_{A_i}\, x_i)| = |||U|||.$$

Rezultă că dacă $|||U||| < \infty$, atunci U este continuă.

Inegalitatea $\|U\| \leqslant |||U|||$ poate fi strictă.

Exemplu: Să considerăm $T = R$, μ măsura Lebesgue, $E = R$, $1 < p < \infty$, $F = L^p(\mu)$; şi aplicaţia canonică $U: \mathcal{L}^p(\mu) \to L^p(\mu)$ care face să corespundă fiecărei funcţii $\mathbf{f} \in \mathcal{L}^p(\mu)$ clasa sa de echivalenţă $\tilde{f}$ din $L^p(\mu)$. Evident, avem $\|U\| = 1$. Să arătăm că $|||U||| = \infty$. Pentru fiecare număr natural n să alegem n intervale disjuncte $(A_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ şi n numere $(x_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ astfel încît $\mu(A_i) = \frac{1}{n}$ şi $|x_i| = 1$ pentru $1 \leqslant i \leqslant n$.

Pentru funcţia etajată $\mathbf{f} = \sum_{i=1}^{n} \varphi_{A_i}\, x_i$ avem $N_p(\mathbf{f}, \mu) = 1$ şi $\sum_{i=1}^{n} |U(\varphi_{A_i}\, x_i)| =$
$= \sum_{i=1}^{n} N_p(\varphi_{A_i}\, x_i, \mu) = \sum_{i=1}^{n} [\mu(A_i)]^{\frac{1}{p}} |x_i| = n \left(\frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{p}} = n^{1-\frac{1}{p}}$ deci $|||U||| \geqslant$
$\geqslant n^{1-\frac{1}{p}}$. Deoarece $1 - \frac{1}{p} > 0$, avem $\lim_{n \to \infty} n^{1-\frac{1}{p}} = \infty$ şi deci $|||U||| = \infty$.

În unele cazuri însă avem egalitate între $\|U\|$ şi $|||U|||$.

Propoziţia 16. *În fiecare din următoarele două cazuri:*

1) $p = 1$;

2) $1 \leqslant p < \infty$ *şi* $F = C$,

avem egalitatea $\|U\| = |||U|||$, *oricare ar fi aplicaţia liniară* $U: \mathcal{L}_E^p(\mu) \to F$.

Dacă $\|U\| = \infty$ avem totdeauna $|||U||| = \infty$, deci $\|U\| = |||U|||$, fără nici o condiție asupra lui p și F. Să presupunem deci că $\|U\| < \infty$.

1) Dacă $p = 1$, pentru fiecare funcție etajată boreliană $\mathbf{f} = \sum \varphi_{A_i} x_i$ cu $N_1(\mathbf{f}, \mu) \leqslant 1$, astfel încît mulțimile A_i să fie disjuncte, avem

$$\sum |U(\varphi_{A_i} x_i)| \leqslant \sum \|U\| N_1(\varphi_{A_i} x_i, \mu) = \|U\| N_1(\mathbf{f}, \mu) \leqslant \|U\|,$$

de unde $|||U||| \leqslant \|U\|$ și deci $\|U\| = |||U|||$.

2) Să presupunem că $1 \leqslant p < \infty$ și $F = C$. Fie $\mathbf{f} = \sum \varphi_{A_i} x_i$ o funcție boreliană etajată astfel încît mulțimile A_i să fie disjuncte două cîte două și $N_p(\mathbf{f}, \mu) \leqslant 1$.

Pentru fiecare i există un număr complex θ_i cu $|\theta_i| = 1$ astfel încît

$$|U(\varphi_{A_i} x_i)| = \theta_i U(\varphi_{A_i} x_i) = U(\varphi_{A_i} \theta_i x_i);$$

atunci

$$\sum |U(\varphi_{A_i} x_i)| = U(\sum \varphi_{A_i} \theta_i x_i) \leqslant \|U\| N_p(\sum \varphi_{A_i} \theta_i x_i, \mu) = \|U\| N_p(\sum \varphi_{A_i} x_i, \mu) \leqslant \|U\|$$

de unde $|||U||| \leqslant \|U\|$ și deci $\|U\| = |||U|||$.

Observație. Mulțimea aplicațiilor liniare $U : \mathcal{L}_E^p(\mu) \to F$ cu $|||U||| < \infty$ este un spațiu vectorial și $|||U|||$ este o normă pe acest spațiu.

Teorema 8. *Există un izomorfism $U \longleftrightarrow U'$ între mulțimea aplicațiilor liniare $U : \mathcal{L}_E^p(\mu) \to F$ cu $|||U||| < \infty$ și mulțimea aplicațiilor liniare $U' : \mathcal{L}^p(\mu) \to \mathcal{L}(E, F)$ cu $|||U'||| < \infty$, dat de egalitatea*

$$U(\varphi x) = U'(\varphi)x, \text{ pentru } \varphi \in \mathcal{L}^p(\mu) \text{ și } x \in E,$$

și avem $|||U||| = |||U'|||$.

Fie $U : \mathcal{L}_E^p(\mu) \to F$ o aplicație liniară cu $|||U||| < \infty$. Pentru orice $\varphi \in \mathcal{L}^p(\mu)$ și orice $x \in E$ avem $\varphi x \in \mathcal{L}_E^p(\mu)$. Pentru fiecare $\varphi \in \mathcal{L}^p(\mu)$, aplicația $U'(\varphi) : x \to U(\varphi x)$ a lui E în F este liniară și continuă:

$$|U'(\varphi)x| = |U(\varphi x)| \leqslant \|U\| N_p(\varphi x) \leqslant |x| \, \|U\| N_p(\varphi) < \infty$$

deci $U'(\varphi) \in \mathcal{L}(E, F)$ și

$$|U'(\varphi)| \leqslant \|U\| N_p(\varphi).$$

Aplicația $U' : \varphi \to U'(\varphi)$ a lui $\mathcal{L}^p(\mu)$ în $\mathcal{L}(E, F)$ este liniară și continuă și avem $\|U'\| \leqslant \|U\|$. Avem de asemenea $|||U'||| \leqslant |||U|||$. Într-adevăr, fie $\varphi = \sum_{i=1}^{n} \varphi_{A_i} \alpha_i$ o funcție etajată din $\mathcal{L}^p(\mu)$ cu A_i disjuncte și $N_p(\varphi, \mu) \leqslant 1$ și fie $\varepsilon > 0$. Pentru fiecare i există $x_i \in E$ cu $|x_i| = 1$ și

$$|U'(\varphi_{A_i})| < |U'(\varphi_{A_i})x_i| + \frac{\varepsilon}{n}.$$

Atunci

$$N_p(\sum \varphi_{A_i} \alpha_i x_i) = N_p(\sum \varphi_{A_i} \alpha_i) \leqslant 1$$

şi

$$\sum_{i=1}^{n} |U'(\varphi_{A_i}\alpha_i)| - \varepsilon < \sum_{i=1}^{n} |U'(\varphi_{A_i})\alpha_i x_i| = \sum_{i=1}^{n} |U(\varphi_{A_i}\alpha_i x_i)| \leqslant$$

$$\leqslant |||U||| N_p\left(\sum_{i=1}^{n} \varphi_{A_i}\alpha_i x_i\right) \leqslant |||U|||$$

deci $|||U'||| \leqslant |||U|||$.

Aplicaţia $U \to U'$ astfel definită este, evident, liniară. Ea este şi biunivocă. În adevăr, dacă pentru două aplicaţii U_1, U_2: $\mathcal{L}_E^p \to F$ avem

$$U_1(\varphi x) = U_2(\varphi x), \qquad \text{pentru } \varphi \in \mathcal{L}^p \text{ şi } x \in E,$$

atunci

$$U_1(\Sigma\varphi_i x_i) = U_2(\Sigma\varphi_i x_i)$$

pentru orice funcţie de forma $\mathbf{f} = \Sigma\varphi_i x_i$ cu $\varphi_i \in \mathcal{L}^p(\mu)$ şi $x_i \in E$. Cum funcţiile de forma precedentă formează o mulţime densă în $\mathcal{L}_E^p$ (deoarece conţine funcţiile etajate) deducem că $U_1 = U_2$. Urmează că aplicaţia $U \to U'$ este biunivocă.

Reciproc, fie $U' : \mathcal{L}^p(\mu) \to \mathcal{L}(E, F)$ o aplicaţie liniară cu $|||U'||| < \infty$.

Pentru fiecare funcţie de forma $\mathbf{f} = \sum_{i=1}^{n} \varphi_i x_i$ cu $\varphi_i \in \mathcal{L}^p(\mu)$ şi $x_i \in E$ să punem

$$U(\mathbf{f}) = \sum_{i=1}^{n} U'(\varphi_i) x_i.$$

Definiţia lui $U(\mathbf{f})$ este independentă de scrierea lui $\mathbf{f}$ sub forma de mai sus. Este suficient să demonstrăm acest fapt doar pentru $\mathbf{f} = \mathbf{0}$ Să presupunem că $\sum_{i=1}^{n} \varphi_i(t) x_i \equiv 0$.

Fie E_n un subspaţiu n -dimensional al lui E, care conţine toţi vectorii $x_1, x_2, \ldots, x_n$ şi fie $y_1, \ldots, y_n$ o bază a lui E_n. Fiecare x_i se scrie $x_i = \sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij} y_j$ deci

$$0 = \sum_{i=1}^{n} \varphi_i x_i = \sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{i=1}^{n} \varphi_i \alpha_{ij}\right) y_j.$$

Deoarece $y_1, \ldots, y_n$ sînt liniar independenţi, deducem $\sum_{i=1}^{n} \varphi_i(t)\alpha_{ij} = 0$ pentru fiecare j, deci $U'\left(\sum_{i=1}^{n} \varphi_i \alpha_{ij}\right) = 0$. Atunci

$$\sum_{i=1}^{n} U'(\varphi_i) x_i = \sum_{i,j} U'(\varphi_i)\alpha_{ij} y_j = \sum_{j} U'\left(\sum_{i} \varphi_i \alpha_{ij}\right) y_j = 0.$$

Fie acum $\mathbf{f} = \sum \varphi_{A_i} x_i$ o funcție etajată din $\mathcal{L}_E^p$ cu A_i disjuncte. Avem

$$|U(\mathbf{f})| = |\sum U'(\varphi_{A_i})x_i| \leqslant \sum |U'(\varphi_{A_i}|x_i|)| \leqslant |||U'||| N_p(\mathbf{f}).$$

Urmează că U este continuă pentru seminorma N_p, pe mulțimea funcțiilor de forma $\sum \varphi_{A_i} x_i$ din $\mathcal{L}_E^p(\mu)$. Cum această mulțime este densă în $\mathcal{L}_E^p(\mu)$, deducem că U se poate prelungi la o aplicație liniară și continuă a lui $\mathcal{L}_E^p(\mu)$ în F, notată tot U.

Pentru fiecare funcție etajată $\mathbf{f} = \sum \varphi_{A_i} x_i$ din $\mathcal{L}_E^p(\mu)$ cu A_i disjuncte și $N_p(\mathbf{f}, \mu) \leqslant 1$, avem $|\mathbf{f}| = \sum \varphi_{A_i} |x_i|$, deci $N_p(\sum \varphi_{A_i}|x_i|, \mu) \leqslant 1$ și

$$\sum |U(\varphi_{A_i} x_i)| = \sum |U'(\varphi_{A_i})x_i| \leqslant \sum |U'(\varphi_{A_i}|x_i|)| \leqslant |||U'|||,$$

de unde $|||U||| \leqslant |||U'|||$. Din egalitatea

$$U(\varphi x) = U'(\varphi)x, \qquad \text{pentru} \qquad \varphi \in \mathcal{L}^p(\mu) \quad \text{și} \quad x \in E,$$

și din prima parte a demonstrației, deducem $|||U'||| \leqslant |||U|||$ și deci

$$|||U||| = |||U'|||.$$

Corolarul 1. *Există un izomorfism $U \longleftrightarrow U'$ între mulțimea aplicațiilor liniare și continue $U : \mathcal{L}_E^1(\mu) \to F$ și mulțimea aplicațiilor liniară și continue $U' : \mathcal{L}^1(\mu) \to \mathcal{L}(E, F)$, dat de egalitatea*

$$U(\varphi x) = U'(\varphi)x, \qquad \textit{pentru } \varphi \in \mathcal{L}^1(\mu) \textit{ și } x \in E,$$

și avem $\|U\| = \|U'\|$.

Se folosește propoziția 16.

Corolarul 2. *Există un izomorfism $U \to U'$ între mulțimea funcționalelor liniare și continue $U : \mathcal{L}_E^p(\mu) \to C$ și mulțimea aplicațiilor liniare $U'' : \mathcal{L}^p(\mu) \to E' = \mathcal{L}(E, C)$ cu $|||U'||| < \infty$, dat de egalitatea*

$$U(\varphi x) = U'(\varphi)x, \textit{ pentru } \varphi \in \mathcal{L}^p(\mu) \textit{ și } x \in E,$$

și avem $\|U\| = |||U'|||$.

Se folosește propoziția 16.

Observație. În continuare vom identifica aplicațiile U și U' care se corespund prin egalitatea $U(\varphi x) = U'(\varphi)x$ și vom scrie U în loc de U'. Cu această notație avem

$$U(\varphi x) = U(\varphi)x, \text{ pentru } \varphi \in \mathcal{L}^p(\mu) \quad \text{și} \quad x \in E.$$

Teorema 9. *Fie X un spațiu Banach. Pentru orice aplicație liniară $U : \mathcal{L}^p(\mu) \to X$, $1 \leqslant p < \infty$ cu $|||U||| < \infty$ restricția sa $\mathbf{m}$ la spațiul $\mathcal{K}(T)$ este o măsură majorată absolut continuă în raport cu μ astfel încît*

$$\int |\varphi| \, d|\mathbf{m}| \leqslant |||U||| N_p(\varphi, \mu), \textit{ pentru } \varphi \in \mathcal{K}(T).$$

Reciproc, orice măsură majorată $\mathbf{m} : \mathcal{K}(T) \to X$ absolut continuă în raport cu μ pentru care există $\alpha > 0$ astfel încît

$$\int |\varphi| \, d|\mathbf{m}| \leqslant \alpha N_p(\varphi, \mu), \textit{ pentru orice } \varphi \in \mathcal{K}(T)$$

poate fi prelungită în mod unic la o operație liniară $U : \mathcal{L}^p(\mu) \to X$ *cu* $|||U||| < \infty$. *Avem atunci* $|\mathbf{m}| = g\mu$ *cu* $N_1(g, \mu) = |||U|||$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ *și pentru orice pereche de spații Banach* E *și* F *cu* $X \subset \mathcal{L}(E,F)$ *avem* $\mathcal{L}_E^p(\mu) \subset \mathcal{L}_E^1(\mathbf{m})$,

$$U(\mathbf{f}) = \int \mathbf{f} d\mathbf{m}, \quad \textit{pentru} \quad \mathbf{f} \in \mathcal{L}_E^p(\mu),$$

și

$$\int |\mathbf{f}| d|\mathbf{m}| \leqslant |||U||| N_p(\mathbf{f}, \mu), \quad \textit{pentru} \quad \mathbf{f} \in \mathcal{L}_E^p(\mu).$$

a) Fie $U : \mathcal{L}^p(\mu) \to X$ o operație liniară cu $|||U||| < \infty$ și fie $\mathbf{m}$ restricția lui U la spațiul $\mathcal{K}(T)$. Să arătăm că $\mathbf{m}$ este majorată.

Fie A o mulțime μ-integrabilă și (A_i) o partiție finită a lui A în mulțimi μ-integrabile. Avem $\varphi_A = \sum \varphi_{A_i}$ deci

$$\sum |U(\varphi_A)| \leqslant |||U||| N_p(\varphi_A, \mu).$$

Luînd marginea superioară pentru toate partițiile lui A în mulțimi μ-integrabile obținem

$$\nu(A) = \sup \sum |U(\varphi_{A_i})| \leqslant |||U||| N_p(\varphi_A, \mu).$$

Se verifică fără dificultate că funcția de mulțime ν este aditivă pentru mulțimile μ-integrabile și că dacă $\sum_i \varphi_{A_i} c_i = \sum_j \varphi_{B_j} d_j$, unde A_i sînt mulțimi μ-integrabile disjuncte două cîte două și B_j sînt mulțimi μ-integrabile de asemenea disjuncte două cîte două, atunci

$$\sum \nu(A_i) c_i = \sum \nu(B_j) d_j.$$

Pentru orice funcție μ-integrabilă etajată de forma $\varphi = \sum \varphi_{A_i} c_i$, se definește fără ambiguitate

$$v(\varphi) = \sum \nu(A_i) c_i.$$

Se deduce ușor că v este o funcțională liniară pe mulțimea funcțiilor etajate din $\mathcal{L}^p(\mu)$. Vom arăta că v este continuă pentru seminorma $N_p(\varphi, \mu)$.

Fie $\varphi = \sum_{i=1}^{n} \varphi_{A_i} c_i$ o funcție etajată din $\mathcal{L}^p(\mu)$ cu A_i disjuncte și fie $\varepsilon > 0$.

Pentru fiecare i există o partiție (B_{ij}) a lui A_i, formată din mulțimi μ-integrabile, astfel încît

$$\nu(A_i) \leqslant \sum_j |U(\varphi_{B_{ij}})| + \frac{\varepsilon}{|c_i| n}, \quad \text{dacă } c_i \neq 0,$$

$$\nu(A_i) \leqslant \sum_j |U(\varphi_{B_{ij}})| + \frac{\varepsilon}{n}, \quad \text{dacă } c_i = 0.$$

Atunci, pentru orice i avem

$$\nu(A_i)|c_i| \leqslant \sum_j |U(\varphi_{B_{ij}})||c_i| + \frac{\varepsilon}{n} = \sum_j |U(\varphi_{B_{ij}} c_i)| + \frac{\varepsilon}{n}$$

deci

$$|v(\varphi)| = |\sum_i \nu(A_i)c_i| \leqslant \sum_i \nu(A_i)|c_i| \leqslant \sum_{i,j} |U(\varphi_{B_{ij}} c_i)| + \varepsilon \leqslant$$

$$\leqslant |||U|||N_p(\sum_{i,j} \varphi_{B_{ij}} c_i, \mu) + \varepsilon = |||U|||N_p(\sum \varphi_{A_i} c_i, \mu) + \varepsilon.$$

ε fiind arbitrar, rezultă

$$|v(\varphi)| \leqslant |||U|||N_p(\varphi, \mu)$$

Rezultă că v se poate prelungi la o funcțională liniară continuă pe $\mathcal{L}^p(\mu)$, notată tot v, care verifică în continuare inegalitatea

$$|v(\varphi)| \leqslant |||U|||N_p(\varphi, \mu), \quad \text{pentru} \quad \varphi \in \mathcal{L}^p(\mu).$$

Dacă $p = 1$, pentru $\varphi \geqslant 0$ din $\mathcal{L}^1(\mu)$ avem $v(\varphi) \leqslant |||U|||\mu(\varphi)$, adică $v \leqslant |||U|||\mu$.

Pentru orice funcție etajată $\varphi = \sum \varphi_{A_i} \alpha_i$ din $\mathcal{L}^p(\mu)$ cu A_i disjuncte avem

$$|U(\varphi)| \leqslant \sum |U(\varphi_{A_i} \alpha_i)| \leqslant \sum |U(\varphi_{A_i})||\alpha_i| \leqslant \sum \nu(A_i)|\alpha_i| = v(\sum \varphi_{A_i}|\alpha|) = v(|\varphi|).$$

Deoarece aplicațiile U și v sînt continue pe $\mathcal{L}^p(\mu)$, inegalitatea

$$|U(\varphi)| \leqslant v(|\varphi|)$$

rămîne adevărată pentru orice $\varphi \in \mathcal{L}^p(\mu)$.

Cum restricția lui v la $\mathcal{K}(T)$ este o măsură pozitivă, rezultă că restricția $\mathbf{m}$ a lui U la $\mathcal{K}(T)$ este o măsură majorată și avem $|\mathbf{m}| \leqslant v$.

Din inegalitatea

$$\int |\varphi| \mathrm{d}|\mathbf{m}| \leqslant v(|\varphi|) \leqslant |||U|||N_p(\varphi, \mu)$$

rezultă că $\mathbf{m}$ este absolut continuă în raport cu μ.

b) Reciproc, fie $\mathbf{m} : \mathcal{K}(T) \to X$ o măsură majorată astfel încît există $\alpha > 0$ cu

$$\int |\varphi| \mathrm{d}|\mathbf{m}| \leqslant \alpha N_p(\varphi, \mu), \quad \text{pentru} \quad \varphi \in \mathcal{K}(T).$$

Deoarece $|\mathbf{m}|$ este absolut continuă în raport cu μ, există o funcție local μ -integrabilă $g \geqslant 0$ cu $|\mathbf{m}| = g\mu$. Pentru orice funcție $\varphi \in \mathcal{K}(T)$ avem

$$\int |\varphi| g \mathrm{d}\mu = \int |\varphi| \mathrm{d}|\mathbf{m}| \leqslant \alpha N_p(\varphi, \mu)$$

deci

$$N_q(g, \mu) \leqslant \alpha < \infty, \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

Urmează că dacă $\varphi \in \mathcal{L}^p(\mu)$, atunci $\varphi g \in \mathcal{L}^1(\mu)$, deci $\varphi \in \mathcal{L}^1(|\mathbf{m}|)$ și deci $\mathcal{L}^p(\mu) \subset \mathcal{L}^1(|\mathbf{m}|)$. Avem atunci

$$\int |\varphi| \mathrm{d}|\mathbf{m}| \leqslant \alpha N_p(\varphi, \mu), \text{ pentru orice } \varphi \in \mathcal{L}^p(\mu).$$

Să punem $U(\varphi) = \int \varphi \mathrm{dm}$, pentru $\varphi \in \mathcal{L}^p(\mu)$.

Aplicația $U : \mathcal{L}^p(\mu) \to X$ este liniară și vom arăta că $|||U||| < \infty$. Fie $\varphi = \sum \varphi_{A_i} \alpha_i$ o funcție etajată cu A_i mulțimi disjuncte din $\mathcal{B}$. Atunci

$$\sum |U(\varphi_{A_i} \alpha_i)| = \sum \left| \int \varphi_{A_i} \alpha_i \, \mathrm{dm} \right| \leqslant \sum \int \varphi_{A_i} |\alpha_i| \, \mathrm{d}|\mathbf{m}| =$$

$$= \int \sum \varphi_{A_i} |\alpha_i \, \mathrm{d}|\mathbf{m}| = \int |\varphi| \, \mathrm{d}|\mathbf{m}| \leqslant \alpha N_p(\varphi, \mu)$$

deci $|||U||| \leqslant \alpha < \infty$.

c) Fie acum $U : \mathcal{L}^p(\mu) \to X$ o aplicație liniară cu $|||U||| < \infty$ și fie $\mathbf{m} : \mathcal{K}(T) \to X$ măsura majorată corespunzătoare. Fie E și F două spații Banach cu $X \subset \mathcal{L}(E, F)$.

Din prima parte a demonstrației deducem

$$\int |\varphi| \, \mathrm{d}|\mathbf{m}| \leqslant |||U||| N_p(\varphi, \mu), \text{ pentru } \varphi \in \mathcal{L}^p(\mu).$$

Din partea a doua a demonstrației, cu $\alpha = |||U|||$, deducem că există o funcție local μ -integrabilă $g \geqslant 0$ cu $|\mathbf{m}| = g\mu$ și $N_q(g, \mu) \leqslant |||U||| < \infty$. Fie $\varphi = \sum \varphi_{A_i} \alpha_i$ o funcție etajată cu A_i disjuncte din $\mathcal{B}$ și $N_p(\varphi, \mu) \leqslant 1$. Atunci, ca mai sus,

$$\sum |U(\varphi_{A_i} \alpha_i)| \leqslant \int |\varphi| \, \mathrm{d}|\mathbf{m}| = \int |\varphi| g \mathrm{d}\mu \leqslant N_q(g, \mu),$$

de unde $|||U||| \leqslant N_q(g, \mu)$ și deci

$$|||U||| = N_q(g, \mu).$$

Dacă $\mathbf{f} \in \mathcal{L}^p_E(\mu)$, atunci $\mathbf{f}g \in \mathcal{L}^1_E(\mu)$, deci $\mathbf{f} \in \mathcal{L}^1_E(\mathbf{m})$, de unde $\mathcal{L}^p_E(\mu) \subset \mathcal{L}^1_E(\mathbf{m})$ și avem

$$\int |\mathbf{f}| \, \mathrm{d}|\mathbf{m}| = \int |\mathbf{f}| g \mathrm{d}\mu \leqslant N_p(\mathbf{f}, \mu) N_q(g, \mu) \leqslant |||U||| \, N_p(f, \mu).$$

Urmează că

$$\left| \int \mathbf{f} \mathrm{dm} \right| \leqslant \int |\mathbf{f}| \, \mathrm{d}|\mathbf{m}| \leqslant |||U||| N_p(\mathbf{f}, \mu), \text{ pentru } \mathbf{f} \in \mathcal{L}^p_E(\mu),$$

deci aplicația $\mathbf{f} \to \int \mathbf{f} \mathrm{dm}$ este continuă pe $\mathcal{L}^p_E(\mu)$. Deoarece avem

$$U(\mathbf{f}) = \int \mathbf{f} \mathrm{dm}, \quad \text{pentru } \mathbf{f} \in \mathcal{K}_E(T).$$

iar cele două operații U și $\int \mathbf{f} \mathrm{dm}$ sînt continue pe $\mathcal{L}^p_E(\mu)$ rezultă că avem

$$U(\mathbf{f}) = \int \mathbf{f} \mathrm{dm}, \quad \text{pentru orice } \mathbf{f} \in \mathcal{L}^p_E(\mu),$$

și teorema este demonstrată.

Corolar. *Fie X un spațiu Banach. Dacă $U : \mathcal{L}^1(\mu) \to X$ este o aplicație liniară și continuă, atunci restricția sa $\mathbf{m}$ la $\mathcal{K}(T)$ este o măsură majorată, absolut continuă în raport cu μ și astfel încît $|\mathbf{m}| \leqslant \|U\|\mu$.*

Reciproc, dacă $\mathbf{m} : \mathcal{K}(T) \to X$ este o măsura majorată astfel încît $|\mathbf{m}| \leqslant \alpha\mu$ pentru un $\alpha > 0$, atunci $\mathbf{m}$ se poate prelungi în mod unic la o aplicație liniară și continuă $U : \mathcal{L}^1(\mu) \to X$. Avem atunci $|\mathbf{m}| = g\mu$ cu $N_\infty(g, \mu) = \|U\|$ și pentru orice pereche de spații Banach E și F cu $X \subset \mathcal{L}(E, F)$ avem $\mathcal{L}^1_E(\mu) \subset \mathcal{L}^1_E(\mathbf{m})$ și

$$U(\mathbf{f}) = \int \mathbf{f}\,d\mathbf{m}, \quad \text{pentru } \mathbf{f} \in \mathcal{L}^1_E(\mu).$$

Teorema 10. *Fie μ o măsură scalară, E și F două spații Banach, Z un subspațiu al lui F' normant pentru F, și $U : \mathcal{L}^p_E(\mu) \to F$, $1 \leqslant p < \infty$, o aplicație liniară cu $|||U||| < \infty$. Există atunci o funcție $\mathbf{u} : T \to \mathcal{L}(E, Z')$ cu următoarele proprietăți :*

1) *funcția $|\mathbf{u}|$ aparține lui $\mathcal{L}^1(\mu)$ și avem*

$$N_q(\mathbf{u}, \mu) = |||U|||, \quad \text{unde } \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1;$$

2) *funcția $\mathbf{u}$ este Z -slab local μ -integrabilă și avem*

$$< U(\mathbf{f}), z > = \int < \mathbf{u}(t)\mathbf{f}(t), z > d\mu, \quad \text{pentru } \mathbf{f} \in \mathcal{L}^p_E(\mu) \text{ și } z \in Z;$$

3) *dacă ρ este o ridicare a lui $\mathcal{L}^\infty(\mu)$, se poate alege $\mathbf{u}$ în mod unic μ -aproape peste tot, astfel că $\rho[\mathbf{u}] = \mathbf{u}$.*

Dacă $p = 1$, se poate alege $\mathbf{u}$ astfel ca $\rho(\mathbf{u}) = \mathbf{u}$;

4) *funcția $\mathbf{u}$ are valori în $\mathcal{L}(E, F)$ în fiecare din următoarele cazuri :*

a) $F = Z'$;

b) *pentru fiecare $x \in E$, acoperirea convexă și echilibrată a mulțimii $\{U(\varphi x);\ \varphi \in \mathcal{K}(T), \{\ |\varphi| d|\mu| \leqslant 1\}$ este relativ compactă în F pentru topologia $\sigma(E, Z)$.*

Fie $\mathbf{m}$ restricția lui U la $\mathcal{K}(T)$. Conform teoremei 9, $\mathbf{m}$ este o măsură majorată și avem $|\mathbf{m}| = g|\mu|$ cu $N_q(g, \mu) = |||U|||$.

Dacă $p = 1$, atunci $|\mathbf{m}| \leqslant |||U|||\,|\mu|$. Avem apoi $\mathcal{L}^p_E(\mu) \subset \mathcal{L}^1_E(\mathbf{m})$ și

$$U(\mathbf{f}) = \int \mathbf{f}\,d\mathbf{m}, \text{ pentru } \mathbf{f} \in \mathcal{L}^p_E(\mu).$$

Fie $V_\mathbf{m} : T \to \mathcal{L}(E, Z')$ funcția corespunzătoare lui $\mathbf{m}$ și μ prin teorema 3. Avem $|\mathbf{m}| = |V_\mathbf{m}|\,|\mu|$ deci $|V_\mathbf{m}(t)| = g(t)$ μ -aproape peste tot și deci

$$N_q(V_\mathbf{m}, \mu) = N_q(g, \mu) = |||U|||.$$

Dacă luăm $\mathbf{u} = V_\mathbf{m}$, din teorema 3 deducem că $\mathbf{u}$ are toate proprietățile dorite.

Corolar. *Pentru orice aplicație liniară și continuă $U : \mathcal{L}^1_E(\mu) \to F$ există o funcție $\mathbf{u} : T \to \mathcal{L}(E, Z')$ cu următoarele proprietăți :*

1) $|\mathbf{u}| \in \mathcal{L}^\infty(\mu)$ *și*

$$N_\infty(\mathbf{u}, \mu) = \|U\| ;$$

2) *funcția* $\mathbf{u}$ *este* Z *-slab local* μ *-integrabilă și*

$$< U(\mathbf{f}),\ z > = \int < \mathbf{u}(t)\mathbf{f}(t),\ z > \mathrm{d}\mu,\ \textit{pentru}\ \mathbf{f} \in \mathcal{L}^1_E(\mu)\ \textit{și}\ z \in Z;$$

3) *dacă* ρ *este o ridicare a lui* $\mathcal{L}^\infty(\mu)$, *se poate alege* $\mathbf{u}$ *în mod unic astfel ca* $\rho(\mathbf{u}) = \mathbf{u}$;

4) *funcția* $\mathbf{u}$ *are valori în* $\mathcal{L}(E, F)$ *în fiecare din cazurile următoare*:

a) $F = Z'$;

b) *pentru fiecare* $x \in E$, *acoperirea convexă și echilibrată a mulțimii* $\left\{ U(\varphi x);\ \varphi \in \mathcal{K}(T),\ \int |\varphi|\,\mathrm{d}|\mu| \leqslant 1 \right\}$ *este relativ compactă în* F *pentru topologia* $\sigma(F, Z)$.

Teorema următoare este reciprocă teoremei 10.

Teorema 11. *Fie* E *și* F *două spații Banach,* Z *un subspațiu al lui* F' *normant pentru* F, $\mathbf{u} : T \to \mathcal{L}^*(E, F)$ *o funcție* Z *-slab local* μ *-integrabilă și spațiul* $\mathcal{L}^p_E(\mu)$ *cu* $1 \leqslant p < \infty$. *Dacă*

(i) $N_q(\mathbf{u}, \mu) < \infty$,

atunci există o aplicație liniară $U : \mathcal{L}^p_E(\mu) \to Z'$ *astfel încît să avem*

$$< U(\mathbf{f}), z > = \int < \mathbf{u}(t)\,\mathbf{f}(t), z > \mathrm{d}\mu,\ \textit{pentru}\ \mathbf{f} \in \mathcal{L}^p_E(\mu)\ \textit{și}\ z \in Z.$$

În acest caz avem

$$|||\, U \,||| \leqslant N_q(\mathbf{u}, \mu).$$

(ii) *Avem* $U(\mathbf{f}) \in F$ *pentru orice* $\mathbf{f} \in \mathcal{L}^p_E(\mu)$ *în fiecare din următoarele cazuri*:

1) $F = Z'$;

2) $\mathbf{u}$ *este simplu* μ*-măsurabilă*; *în particular* F *este de tip numărabil*;

3) *pentru fiecare* $x \in E$ *există o familie local numărabilă* $\mathcal{K} = (K_j)_{j \in J}$ *de mulțimi compacte disjuncte cu* $T - \bigcup K_j$ μ *-neglijabilă, astfel încît, pentru fiecare* $j \in J$, *acoperirea echilibrată și convexă a mulțimii* $\{\mathbf{u}(t)x;\ t \in K_j\}$ *să fie relativ compactă în* F *pentru topologia* $\sigma(F, Z)$.

(iii) *În fiecare din următoarele cazuri* $|\mathbf{u}|$ *este* μ*-măsurabilă și avem*

$$|||\, U \,||| = N_q(\mathbf{u}, \mu):$$

1) *există o ridicare* ρ *a lui* $\mathcal{L}^\infty(\mu)$ *astfel încît să avem* $\rho[\mathbf{u}] = \mathbf{u}$;

2) E *este de tip numărabil și există un șir* (z_n) *în* Z *normant pentru* F;

3) E *este de tip numărabil și* $\mathbf{u}$ *este simplu local* μ *-măsurabilă. În acest caz avem*

$$U(\mathbf{f}) = \int \mathbf{u}(t)\,\mathbf{f}(t)\,\mathrm{d}\mu,\ \textit{pentru}\ \mathbf{f} \in \mathcal{L}^p_E(\mu);$$

4) $\mathbf{u}$ *este local* μ *-integrabilă. În acest caz avem*

$$U(\varphi) = \int \mathbf{u}(t)\,\varphi(t)\,\mathrm{d}\mu,\ \textit{pentru}\ \varphi \in \mathcal{L}^p_E(\mu).$$

Să remarcăm mai întîi că pentru orice $\mathbf{f} \in \mathcal{L}_E^p(\mu)$ și orice $z \in Z$ funcția $t \to \langle \mathbf{u}(t)\mathbf{f}(t), z \rangle$ este μ-integrabilă. Într-adevăr, această funcție este μ-măsurabilă și

$$\int^* |\langle \mathbf{u}\,\mathbf{f}, z \rangle| \mathbf{d}|\mu| \leqslant \int^* |\mathbf{u}||\mathbf{f}||z|\mathbf{d}|\mu| \leqslant |z| N_q(\mathbf{u}, \mu) N_p(\mathbf{f}, \mu) < \infty.$$

Să punem

$$M(\mathbf{f}, z) = \int \langle \mathbf{u}\ \mathbf{f}, z \rangle \mathrm{d}\mu.$$

Aplicația $U(\mathbf{f}) : z \to M(\mathbf{f}, z)$ este o funcțională liniară pe Z. Ea este continuă deoarece

$$|M(\mathbf{f}, z)| \leqslant \int |\langle \mathbf{uf}, z \rangle| \mathbf{d}|\mu| \leqslant |z| N_q(\mathbf{u}, \mu) N_p(\mathbf{f}, \mu)$$

deci $U(\mathbf{f}) \in Z'$ și

$$|U(\mathbf{f})| \leqslant N_q(\mathbf{u}, \mu) N_p(\mathbf{f}, \mu).$$

Aplicația liniară $U : \mathbf{f} \to U(\mathbf{f})$ a lui $\mathcal{L}_E^p(\mu)$ în Z' este liniară și continuă și avem

$$\langle U(\mathbf{f}), z \rangle = \int \langle \mathbf{u}\,\mathbf{f}, z \rangle \mathrm{d}\mu, \text{ pentru } \mathbf{f} \in \mathcal{L}_E^p(\mu) \text{ și } z \in Z.$$

Să arătăm că $|||U||| \leqslant N_p(\mathbf{u}, \mu)$. Fie $\mathbf{f} = \sum \varphi_{A_i} x_i$ o funcție boreliană etajată cu A_i disjuncte și $N_p(\mathbf{f}, \mu) \leqslant 1$. Atunci (prop. 2, § 11)

$$\sum |U(\varphi_{A_i} x_i)| \leqslant \sum \int^* |\mathbf{u}|\, \varphi_{A_i} |x_i|\, \mathbf{d}|\mu| = \int |\mathbf{u}| \sum \varphi_{A_i} |x_i|\, \mathbf{d}|\mu| =$$

$$= \int^* |\mathbf{u}|\, |\sum \varphi_{A_i} x_i|\, \mathbf{d}|\mu| = \int^* |\mathbf{u}||\mathbf{f}|\ \mathbf{d}|\mu| \leqslant N_q(\mathbf{u}, \mu)$$

deci $|||U||| \leqslant N_p(\mathbf{u}, \mu)$.

Să considerăm cazurile în care U are valori în F. Cazul $F = Z'$ este banal. Să presupunem că $\mathbf{u}$ este simplu μ -măsurabilă. În acest caz, pentru orice $\mathbf{f} \in \mathcal{L}_E^p(\mu)$, funcția $\mathbf{uf}$ este μ -integrabilă și avem

$$\langle U(\mathbf{f}), z \rangle = \int \langle \mathbf{uf}, z \rangle \mathrm{d}\mu = \left\langle \int^* \mathbf{uf}\ \mathrm{d}\mu, z \right\rangle$$

pentru orice $\mathbf{f} \in \mathcal{L}_E^p(\mu)$ și $z \in Z$, deci

$$U(\mathbf{f}) = \int \mathbf{u}(t)\mathbf{f}(t)\,\mathrm{d}\mu \in F, \text{ pentru orice } \mathbf{f} \in \mathcal{L}_E^p(\mu).$$

Să presupunem acum îndeplinită condiția 3 de la punctul (ii). Fie $x \in E$ și fie $\mathcal{K} = (K_j)_{j \in J}$ o familie de mulțimi compacte disjuncte cu $T - \bigcup K_j$ μ -neglijabilă, astfel încît închiderea A_j a acoperirii convexe și echilibrate a mulțimii $\{\mathbf{u}(t)x;\ t \in K_j\}$ să fie compactă în F pentru topologia $\sigma(F, Z)$.

Fie $\varphi \in \mathcal{K}(T)$ cu $\|\varphi\| \leqslant 1$. Atunci $\mathbf{u}(t)\,\varphi(t)\,x \in A_j$ pentru orice $t \in K_j$. Fie (K_n) şirul de mulţimi din familia $\mathcal{K}$ ce intersectează suportul lui φ.

Pentru fiecare K_n, mulţimea A_n este compactă şi convexă în dualul algebric Z^* al lui Z pentru topologia $\sigma(Z, Z^*)$. Există deci o familie $(z_i)_{i\in I}$ de elemente din Z astfel încît să avem

$$A_n = \bigcap_{i\in I} \{y\,;\ y \in Z^*,\ |< y,\ z_i >| \leqslant 1\}.$$

Atunci

$$|< \mathbf{u}(t)\,\varphi(t)\,x,\ z_i >| \leqslant 1, \text{ pentru } i \in I \text{ şi } t \in K_n.$$

Urmează că pentru orice n avem

$$|< U(\varphi\varphi_{K_n}\,x),\ z_i >| \leqslant \int_{K_n} |< \mathbf{u}(t)\,\varphi(t)\,x,\ z_i >|\,\mathbf{d}\,|\mu| \leqslant |\mu|(K_n)$$

deci

$$U(\varphi\ \varphi_{K_n}\,x) \in |\mu|(K_n)\cdot A_n \subset F.$$

Urmează apoi că

$$U(\varphi x) = \sum_n U(\varphi\ \varphi_{K_n}\,x) \in F.$$

Relaţia $U(\varphi x) \in F$ se deduce apoi pentru orice $\varphi \in \mathcal{K}(T)$ şi orice $x \in E$. De aici rezultă că avem $U(\mathbf{f}) \in F$ pentru orice combinaţie liniară $\mathbf{f} = \sum \varphi_i\,x_i$ cu $\varphi_i \in \mathcal{K}(T)$ şi $x_i \in E$ şi apoi, prin trecere la limită, pentru orice $\mathbf{f} \in \mathcal{L}^p_E(\mu)$.

Să demonstrăm acum egalitatea $|||\,U\,||| = N_q(\mathbf{u},\ \mu)$. Deoarece inegalitatea $|||\,U\,||| \leqslant N_p(\mathbf{u},\ \mu)$ a fost deja demonstrată, rămîne de demonstrat inegalitatea contrară, în cazurile de la punctul (iii).

Din teorema 10 deducem că există o funcţie Z -slab local μ -integrabilă $\mathbf{v} : T \to \mathcal{L}(E, Z')$ astfel încît $|||\,U\,||| = N_q(\mathbf{v},\ \mu)$ şi

$$< U(\mathbf{f}),\ z > = \int < \mathbf{v}\mathbf{f},\ z > \mathrm{d}\mu, \text{ pentru } \mathbf{f} \in \mathcal{L}^p_E(\mu) \text{ şi } z \in Z.$$

În plus ,pentru fiecare ridicare ρ a lui $\mathcal{L}^\infty(\mu)$ putem alege $\mathbf{v}$ astfel încît $\rho[\mathbf{v}] = \mathbf{v}$. Avem atunci

$$\int < \mathbf{u}\,\varphi x,\ z > \mathrm{d}\mu = \int < \mathbf{v}\,\varphi x, z > \mathrm{d}\mu, \text{ pentru } \varphi \in \mathcal{K}(T),\ x \in E \text{ şi } z \in Z,$$

deci $< \mathbf{u}(t)x,\ z > = < \mathbf{v}(t)x,\ z >$ μ -aproape peste tot, pentru fiecare $x \in E$ şi fiecare $z \in Z$, adică $\mathbf{u} \equiv \mathbf{v}$.

Vom arăta că în fiecare din cazurile de la punctul (iii) avem $|\mathbf{u}(t)| = |\mathbf{v}(t)|$ μ -aproape peste tot, de unde va rezulta că $N_q(\mathbf{u},\ \mu) = |||\,U\,|||$.

Dacă există o ridicare ρ a lui $\mathcal{L}^\infty(\mu)$ astfel încît $\rho[\mathbf{u}] = \mathbf{u}$, atunci luînd $\mathbf{v}$ astfel încît să avem de asemenea $\rho[\mathbf{v}] = \mathbf{u}$, deducem $\mathbf{u}(t) = \mathbf{v}(t)$ μ -aproape peste tot, deci $|\mathbf{u}(t)| = |\mathbf{v}(t)|$ μ-aproape peste tot (a se vedea proprietatea 4 a funcţiilor cu proprietatea de ridicare, § 14, sau demonstraţia propoziţiei 13, § 17).

Dacă este îndeplinită condiția 2) de la punctul (iii), atunci de asemenea rezultă $\mathbf{u}(t) = \mathbf{v}(t)$ μ-aproape peste tot (a se vedea demonstrația propoziției 14, § 17).

Să presupunem acum îndeplinită condiția 3) de la punctul (iii). Deoarece $\mathbf{u}$ este simplu μ -măsurabilă, pentru fiecare $x \in E$ funcția $t \to \mathbf{u}(t)x$ este μ -măsurabilă. Pentru orice $x \in E$ și orice mulțime compactă $K \subset T$ avem $\varphi_K x \in \mathcal{L}_E^p(\mu)$ deci, conform condiției (i),

$$\int_K^* |\mathbf{u}(t)x| \, \mathrm{d}|\mu| < \infty.$$

Rezultă că pentru orice $x \in E$, funcția $\mathbf{u}(t)x$ este local μ-integrabilă (dar $\mathbf{u}$ nu este neapărat simplu local μ -integrabilă, deoarece putem avea $\int_K^* |\mathbf{u}| \, \mathrm{d}|\mu| = +\infty$). Să alegem $\mathbf{v}$ astfel încît să avem $\rho[\mathbf{v}] = \mathbf{u}$ pentru o anumită ridicare ρ a lui $\mathcal{L}^\infty(\mu)$. Atunci funcția $t \to \mathbf{v}(t)x$ este de asemenea Z -slab μ -măsurabilă și $\rho[\mathbf{v}x] = \mathbf{v}x$ pentru fiecare $x \in E$. Urmează că funcția $t \to |\mathbf{v}(t)x|$ este μ -măsurabilă. Deoarece $|\mathbf{v}|$ este local μ -integrabilă, avem

$$\int_K^* |\mathbf{v}(t)x| \, \mathrm{d}|\mu| \leqslant |x| \int_K^* |\mathbf{v}(t)| \mathrm{d}|\mu| < \infty,$$

pentru orice mulțime compactă K, deci funcția $t \to \mathbf{v}(t)x$ este Z -slab local μ -integrabilă și avem

$$\int < \mathbf{u}(t)x(t), z > \mathrm{d}\mu = \int < \mathbf{v}(t)x\varphi(t), z > \mathrm{d}\mu.$$

pentru orice $x \in E$, $z \in Z$ și $\varphi \in \mathcal{L}^p(\mu)$, în particular pentru $\varphi \in \mathcal{K}(T)$. Urmează că $(\mathbf{u}x)\mu = (\mathbf{v}x)\mu$ pentru fiecare $x \in E$.

Din teorema 4 deducem că $|(\mathbf{u}x)\mu| = |\mathbf{u}x||\mu|$ și $|(\mathbf{v}x)\mu| = |\mathbf{v}x||\mu|$, deci $|\mathbf{u}x||\mu| = |\mathbf{v}x||\mu|$; din propoziția 4, § 17, deducem că $|\mathbf{u}(t)x| = |\mathbf{v}(t)x|$, μ -aproape peste tot pentru fiecare $x \in E$. Făcînd x să parcurgă o mulțime numărabilă densă în E, deducem că $|\mathbf{u}(t)| = |\mathbf{v}(t)|$ μ -aproape peste tot.

Să presupunem, în sfîrșit, că $\mathbf{u}$ este local μ -integrabilă și să alegem $\mathbf{v}$ de asemenea astfel încît $\rho[\mathbf{v}] = \mathbf{v}$ pentru o anumită ridicare ρ a lui $\mathcal{L}^\infty(\mu)$. Din egalitatea $\mathbf{u} \equiv \mathbf{v}$ deducem că $\mathbf{u}\mu = \mathbf{v}\mu$. Conform teoremei 4 avem $|\mathbf{u}\mu| = |\mathbf{u}||\mu|$ și $|\mathbf{v}\mu| = |\mathbf{v}||\mu|$ deci $|\mathbf{u}||\mu| = |\mathbf{v}||\mu|$, de unde, conform propoziției 4, § 17, $|\mathbf{u}(t)| = |\mathbf{v}(t)|$ μ -aproape peste tot.

Cu aceasta teorema este complet demonstrată

Observații. 1° Dacă se consideră condiția

$$\text{(i')} \quad \int^* |\mathbf{u}(t)\mathbf{f}(t)\mathrm{d}|\mu| < \infty, \text{ pentru orice } \mathbf{f} \in \mathcal{L}_E^p(\mu),$$

în locul condiției (i), se deduce ca în demonstrația teoremei că există o explicație liniară $U : \mathcal{L}_E^p(\mu) \to Z'$ astfel ca

$$< U(\mathbf{f}), z > = \int < \mathbf{u}\mathbf{f}, z > \mathrm{d}\mu, \text{ pentru } \mathbf{f} \in \mathcal{L}_E^p(\mu) \text{ și } z \in Z,$$

şi

$$|||U||| \leqslant N_q(\mathbf{u}, \mu) \leqslant \infty.$$

Observăm că (i) implică (i').

2° Dacă avem îndeplinite condiţia (i') şi una din condiţiile de la punctul (iii), atunci $|||U||| = N_q(\mathbf{u}, \mu)$.

Într-adevăr, dacă $|||U||| = \infty$, atunci avem $N_q(\mathbf{u}, \mu) = \infty$.

Dacă $|||U||| < \infty$, atunci se raţionează ca în demonstraţia teoremei.

Corolar. *Fie* $\mathbf{u} : T \to \mathcal{L}^*(E, F)$ *o funcţie* Z *-slab local* μ *-măsurabilă şi esenţial mărginită. Există atunci o aplicaţie liniară şi continuă* $U : \mathcal{L}^1_E(\mu) \to Z'$ *astfel încît* $\|U\| \leqslant N_\infty(\mathbf{u}, \mu)$ *şi*

$$< U(\mathbf{f}), z > = \int < \mathbf{uf}, z > \mathrm{d}\mu, \text{ pentru } \mathbf{f} \in \mathcal{L}^1_E(\mu) \text{ şi } z \in Z.$$

Avem $\|U\| = N_\infty(\mathbf{u}, \mu)$ *în fiecare din următoarele cazuri :*

1) *există o ridicare* ρ *a lui* $\mathcal{L}^\infty(\mu)$ *cu* $\rho(\mathbf{u}) = \mathbf{u}$;

2) E *este de tip numărabil şi există o mulţime numărabilă* $S \subset Z$ *normantă pentru* F ;

3) E *este de tip numărabil şi* $\mathbf{u}$ *este simplu* μ *-măsurabilă* ;

4) $\mathbf{u}$ *este* μ *-măsurabilă.*

Avem $U(\mathbf{f}) \in F$ *pentru orice* $\mathbf{f} \in \mathcal{L}^1_E(\mu)$ *în fiecare din cazurile următoare :*

1) $F = Z'$;

2) $\mathbf{u}$ *este simplu* μ *-măsurabilă ; în particular* F *este de tip numărabil* ;

3) *pentru fiecare* $x \in E$ *există o familie local numărabilă* (K_j) *de mulţimi compacte disjuncte cu* $T - \bigcup K_j$ μ *-neglijabilă astfel încît pentru fiecare* j, *acoperirea convexă şi echilibrată a mulţimii* $\{\mathbf{u}(t)x ; t \in K_j\}$ *să fie relativ compacte în* F *pentru topologia* $\sigma(F, Z)$.

Sîntem acum în măsură să demonstrăm că nu există nici o ridicare a spaţiului $\mathcal{L}^p(\mu)$ cu $1 \leqslant p < \infty$, dacă μ nu este atomică.

Să demonstrăm întîi propoziţia următoare.

Propoziţia 17. *Fie* μ *o măsură pozitivă şi fie spaţiul* $\mathcal{L}^p(\mu)$ *cu* $1 \leqslant p < \infty$. *Orice funcţională liniară şi pozitivă pe* $\mathcal{L}^p(\mu)$ *este continuă.*

Fie U o funcţională liniară pozitivă pe $\mathcal{L}^p(\mu)$. Să presupunem, prin absurd, că U nu este continuă. Atunci pentru orice $n \in N$ există o funcţie $f_n \in \mathcal{L}^p(\mu)$ cu $N_p(f_n) \leqslant 1$, $f_n \geqslant 0$ şi $U(f_n) > n^3$. Pentru funcţia μ-măsurabilă

$$f = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} f_n$$

avem

$$N_p(f) \leqslant \sum \frac{1}{n^2} N_p(f_n) \leqslant \sum \frac{1}{n^2} < \infty$$

deci $f \in \mathcal{L}^p(\mu)$. Dar

$$U(f) \geqslant \frac{1}{n^2} U(f_n) \geqslant n, \text{ pentru orice } n,$$

adică $U(f) = +\infty$, ceea ce este absurd.

Aşadar U este continuă şi propoziţia este demonstrată.

Reamintim că o ridicare liniară a spațiului $\mathcal{L}^p(\mu)$ este o aplicație $\rho : \mathcal{L}^p(\mu) \to \mathcal{L}^p(\mu)$ care are următoarele proprietăți:

1. $\rho(f) \equiv f$;
2. $f \equiv g$ implică $\rho(f) = \rho(g)$;
3. $f \geqslant 0$ implică $\rho(f) \geqslant 0$;
4. $\rho(\alpha f + \beta g) = \alpha\rho(f) + \beta\rho(g)$.

$f \equiv g$ înseamnă $f(t) = g(t)$, μ -aproape peste tot.

Propoziția 18. *Fie $\mu \neq 0$ o măsură neatomică. Atunci nu există nici o ridicare liniară a spațiului $\mathcal{L}^p(\mu)$ cu $1 \leqslant p < \infty$.*

Să presupunem prin absurd că există o ridicare liniară ρ a lui $\mathcal{L}^p(\mu)$. Pentru fiecare $t_0 \in T$, aplicația $f \to \rho(f)(t_0)$ este o funcțională liniară pozitivă pe $\mathcal{L}^p(\mu)$ deci continuă. Urmează că există o funcție $g(t_0) \in \mathcal{L}^q$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, astfel încît

$$\rho(f)(t_0) = \int fg(t_0)\,d\mu, \text{ pentru } f \in \mathcal{L}^p(\mu).$$

În acest fel definim o aplicație $t \to g(t)$ a lui T în $\mathcal{L}^q(\mu)$ astfel încît

$$\rho(f)(t) = \int fg(t)\,d\mu, \text{ pentru } f \in \mathcal{L}^p(\mu) \text{ și } t \in T.$$

Fie K o mulțime μ -măsurabilă cu $0 < \mu(K) < \infty$ și să notăm $a = \mu(K)$ și $A_n = \{t;\ t \in K,\ \|g(t)\|_q \leqslant n\}$ pentru fiecare $n \in N$. Deoarece $\|g(t)\|_q < \infty$ pentru orice $t \in T$, avem $K = \bigcup_{n \in N} A_n$, deci există un număr $n' \in N$ cu $\mu^*(A_{n'}) \neq 0$. Fie r un număr întreg astfel ca

$$r \geqslant a(n' + 1)^p$$

și fie $B_1, \ldots, B_r$ submulțimi μ-măsurabile disjuncte ale lui K a căror reuniune este K și astfel ca

$$\mu(B_1) = \ldots = \mu(B_r) = \frac{a}{r}.$$

Deoarece mulțimile B_i acoperă pe K, există o mulțime, de exemplu B_1, astfel ca $\mu^*(A_{n'} \cap B_1) \neq 0$. Să considerăm acum mulțimea $B_1^* = \{t;\ \rho(\varphi_{B_1})(t) = 1\}$. Atunci $B_1^* \equiv B_1$ deci

$$\mu^*(A_{n'} \cap B_1^*) \neq 0.$$

Pentru funcția $f = (n' + 1)\varphi_{B_1}$ avem

$$N_p(f) = (n' + 1)\,N_p(\varphi_{B_1}) = (n' + 1)\left(\frac{a}{r}\right)^{\frac{1}{p}} \leqslant 1.$$

Pe de altă parte, deoarece $\mu^*(A_{n'} \cap B_1^*) \neq 0$, deducem $A_{n'} \cap B_1^* \neq \varnothing$ Dar dacă $t_0 \in A_{n'} \cap B_1^*$, atunci

$$n' + 1 = \rho((n' + 1)\varphi_{B_1})(t_0) = \rho(f)(t_0) = \int fg(t_0)\,d\mu \leqslant \|g(t_0)\|_q \leqslant n'$$

și am ajuns la o contradicție.

Propoziția este astfel demonstrată.

SUME DE MĂSURI. IMAGINI DE MĂSURI

§ 19. FAMILII SUMABILE DE MĂSURI

1. Familii sumabile de măsuri pozitive

Fie $(\mu_i)_{i\in I}$ o familia de măsuri pozitive pe T.

Definiția 1. *Spunem că familia de măsuri pozitive* $(\mu_i)_{i\in I}$ *este sumabilă, dacă pentru fiecare funcție* f *din* $\mathcal{K}(T)$, *familia de numere* $(\mu_i(f))_{i\in I}$ *este sumabilă.* *

Dacă familia (μ_i) este sumabilă și dacă pentru fiecare funcție $f\in\mathcal{K}(T)$ scriem

$$\mu(f)=\sum_{i\in I}\mu_i(f),$$

aplicația $f\to\mu(f)$ este o *funcțională liniară pozitivă* pe $\mathcal{K}(T)$, deci μ este o *măsură pozitivă* pe T, pe care o numim *suma familiei* $(\mu_i)_{i\in I}$. Scriem

$$\mu=\sum_{i\in I}\mu_i.$$

Propoziția 1. *Dacă familia* $(\mu_i)_{i\in I}$ *este sumabilă, atunci pentru fiecare funcție* $f\in\mathcal{K}(T)$ *familia de numere* $(\mu_i(f))_{i\in I}$ *este absolut sumabilă. Pentru ca familia* $(\mu_i)_{i\in I}$ *să fie sumabilă, este suficient (și necesar) ca pentru fiecare funcție pozitivă* f *din* $\mathcal{K}(T)$ *să avem*

$$\sum_{i\in I}\mu_i(f)<+\infty.$$

---

*) O familie $(x_i)_{i\in I}$ de elemente dintr-un spațiu Banach X este sumabilă, dacă există $x\in X$ cu proprietatea că pentru fiecare $\varepsilon>0$, există o familie finită $J_\varepsilon\subset I$ astfel încît oricare ar fi familia finită $J\supset J_\varepsilon$ să avem $|\sum_{i\in J}x_i-x|<\varepsilon$. Spunem că x este suma familiei $(x_i)_{i\in I}$ și scriem $x=\sum_{i\in I}x_i$. Familia $(x_i)_{i\in I}$ este *absolut sumabilă* dacă familia de numere pozitive $(|x_i'|)_{i\in I}$ este sumabilă. Orice familie absolut sumabilă este sumabilă. Pentru o familie sumabilă $(\alpha_i)_{i\in I}$ de *numere pozitive* avem $\sum_{i\in I}\alpha_i=\sup_{J\subset I}\sum_{i\in J}\alpha_i<+\infty$. Dacă familia nu este sumabilă, avem $\sum_{i\in I}\alpha_i=\sup_{J\subset I}\sum_{i\in J}\alpha_i=+\infty$.

Să presupunem că familia $(\mu_i)_{i\in I}$ este sumabilă. Dacă $f \in \mathcal{K}(T)$, atunci $|f| \in \mathcal{K}(T)$, deci familia de numere pozitive $(\mu_i(|f|))_{i\in I}$ este sumabilă. Cum pentru fiecare i avem $|\mu_i(f)| \leqslant \mu_i(|f|)$, rezultă că familia de numere pozitive $(|\mu_i(f)|)_{i\in I}$ este sumabilă, adică familia de numere $(\mu_i(f))_{i\in I}$ este absolut sumabilă.

Să presupunem acum că pentru fiecare funcție pozitivă f din $\mathcal{K}(T)$ avem

$$\sum_{i\in I} \mu_i(f) < +\infty.$$

Din prima parte a demonstrației deducem că pentru orice funcție $g \in \mathcal{K}(T)$, familia $(\mu_i(g))$ este absolut sumabilă, deci sumabilă, și deci familia de măsuri $(\mu_i)_{i\in I}$ este sumabilă.

Propoziția 2. *Pentru ca familia de măsuri $(\mu_i)_{i\in I}$ să fie sumabilă, este necesar și suficient ca pentru orice mulțime compactă $K \subset T$ să avem*

$$\sum_{i\in I} \mu_i(K) < +\infty.$$

Să presupunem că familia $(\mu_i)_{i\in I}$ este sumabilă și fie $K \subset T$ o mulțime compactă. Există o funcție continuă cu suport compact $f: T \to [0, 1]$ egală cu 1 pe K. Avem $\varphi_K \leqslant f$, deci $\mu_i(K) \leqslant \mu_i(f)$ pentru orice $i \in I$. Atunci

$$\sum_{i\in I} \mu_i(K) \leqslant \sum_{i\in I} \mu_i(f) < +\infty.$$

Reciproc, să presupunem că pentru fiecare mulțime compactă $K \subset T$ avem

$$\sum_{i\in I} \mu_i(K) < +\infty.$$

Fie f o funcție pozitivă din $\mathcal{K}(T)$ și fie K suportul lui f. Avem $f \leqslant \|f\|\varphi_K$ deci $\mu_i(f) \leqslant \|f\|\mu_i(K)$ pentru orice $i \in I$. Atunci

$$\sum_{i\in I} \mu_i(f) \leqslant \sum_{i\in I} \|f\|\,\mu_i(K) = \|f\| \sum_{i\in I} \mu_i(K) < +\infty.$$

Conform propoziției 1, familia $(\mu_i)_{i\in I}$ este sumabilă.

Exemplu. Orice măsură atomică $\mu \geqslant 0$ este suma unei familii sumabile de măsuri pozitive.

Într-adevăr, fie α o funcție pozitivă definită pe T, astfel încît să avem

$$\mu(f) = \sum_{i\in I} \alpha(t) f(t) < +\infty$$

pentru orice $f \in \mathcal{K}(T)$. Pentru fiecare $t \in T$ să notăm cu μ_t măsura definită prin masa $\alpha(t)$ plasată în punctul t:

$$\mu_t(f) = \alpha(t) f(t), \qquad \text{pentru } f \in \mathcal{K}(T)$$

Atunci

$$\mu(f) = \sum_{t\in T} \mu_t(f), \qquad \text{pentru } f \in \mathcal{K}(T).$$

deci

$$\mu = \sum_{t \in T} \mu_t.$$

2. Integrarea în raport cu suma unei familii de măsuri

Fie $(\mu_i)_{i \in I}$ o familie sumabilă de măsuri pozitive şi

$$\mu = \sum_{i \in I} \mu_i.$$

Propoziţia 3. *Pentru orice funcţie $f \geqslant 0$ semicontinuă inferior pe T avem*

$$\mu^*(f) = \sum_{i \in I} \mu_i^*(f).$$

Într-adevăr, pentru $g \in \mathcal{K}_+$ şi J finită avem

$$\mu^*(f) = \sup_{g \leqslant f} \mu(g) = \sup_{g \leqslant f} \sum_{i \in I} \mu_i(g) = \sup_{g \leqslant f} \sup_{J \subset I} \sum_{i \in J} \mu_i(g) = \sup_{J \subset I} \sup_{g \leqslant f} \sum_{i \in J} \mu_i(g) =$$

$$= \sup_{J \subset I} \lim_{g \leqslant f} \sum_{i \in J} \mu_i(g) = \sup_{J \subset I} \sum_{i \in J} \mu_i^*(f) = \sum_{i \in I} \mu_i^*(f).$$

Propoziţia 4. *Pentru orice funcţie $f \geqslant 0$ definită pe T avem*

$$\mu^*(f) \geqslant \sum_{i \in I} \mu_i^*(f).$$

Într-adevăr, pentru orice mulţime compactă $K \subset T$ şi orice funcţie semicontinuă inferior $g \geqslant f\varphi_K$ avem

$$\mu^*(g) = \sum_{i \in I} \mu_i^*(g) \geqslant \sum_{i \in I} \mu_i^*(f\varphi_K)$$

de unde

$$\mu^*(f\varphi_K) = \inf_{\substack{g \geqslant f\varphi_K \\ g \in \mathcal{J}_+}} \mu^*(g) \geqslant \sum_{i \in I} \mu_i^*(f\varphi_K).$$

Avem apoi

$$\mu^*(f) = \sup_K \mu^*(f\varphi_K) \geqslant \sup_K \sup_{J \subset I_1} \sum_{i \in I} \mu_i^*(f\varphi_K) = \sup_{J \subset I} \sup_K \left(\sum_{i \in J} \mu_i\right)^*(f\varphi_K) =$$

$$= \sup_{J \subset I} \left(\sum_{i \in J} \mu_i\right)^*(f) = \sup_{J \subset I} \sum_{i \in J} \mu_i^*(f) = \sum_{i \in I} \mu_i^*(f),$$

unde K sînt mulţimi compacte în T iar J părţi finite ale lui I.

Observaţii. Pentru o măsură atomică pozitivă definită prin $\mu(f) = \sum_{t \in T} \alpha(t) f(t)$, $f \in \mathcal{K}(T)$, s-au demonstrat anterior aceste propoziţii, sub forma următoare

$$\mu^*(f) = \sum_{t \in T} \alpha(t) f(t) \text{ pentru } f \in \mathcal{J}_+ \text{ şi } \mu^*(f) \geqslant \sum_{t \in T} \alpha(t) f(t) \text{ pentru } f \geqslant 0.$$

Teorema 1. *Dacă* $\mathbf{f}$ *este o funcție* μ*-integrabilă definită pe* T *cu valori într-un spațiu Banach* E *sau în* $\overline{R}$, *atunci, pentru orice* $i \in I$, *funcția* $\mathbf{f}$ *este* μ_i*-integrabilă, familia* $\left(\int \mathbf{f}\, d\mu_i\right)_{i\in I}$ *este absolut sumabilă și*

$$\int \mathbf{f}\, d\mu = \sum_{i\in I} \int \mathbf{f}\, d\mu_i .$$

Integrabilitatea lui $\mathbf{f}$ în raport cu măsurile μ_i rezultă din inegalitățile $\mu_i \leqslant \mu$, pentru orice $i \in I$.

Din inegalitățile (propoziția 4):

$$\sum_{i\in I} \left| \int \mathbf{f}\, d\mu_i \right| \leqslant \sum_{i\in I} \int |\mathbf{f}|\, d\mu_i \leqslant \int |\mathbf{f}|\, d\mu = \int^{*} |\mathbf{f}|\, d\mu < +\infty$$

rezultă că familia $\left(\int \mathbf{f}\, d\mu_i\right)_{i\in I}$ este absolut sumabilă.

Pentru fiecare funcție $\varphi \in \mathcal{K}(T)$ și fiecare $x \in E$ avem

$$\int \varphi x\, d\mu = \left(\int \varphi\, d\mu\right) x = \left(\sum_{i\in I} \int \varphi\, d\mu_i\right) x = \sum_{i\in I} \left(\int \varphi\, d\mu_i\right) x = \sum_{i\in I} \int \varphi x\, d\mu_i .$$

Atunci pentru orice sumă finită de forma $\mathbf{g} = \sum_i \varphi_i x_i$ cu $\varphi_i \in \mathcal{K}(T)$ și $x_i \in E$ avem

$$\int \mathbf{g}\, d\mu = \sum_{i\in I} \int \mathbf{g}\, d\mu_i .$$

Deoarece mulțimea $\mathcal{K}_E(T)$ a acestor sume finite este densă în $\mathcal{L}^1_E(\mu)$, există un șir $(\mathbf{g}_n)$ de funcții din $\mathcal{K}_E(T)$ convergent în medie către $\mathbf{f}$:

$$\lim_{n\to 0} \int |\mathbf{f} - \mathbf{g}_n|\, d\mu = 0$$

Rezultă, pe de o parte, că

$$\lim_{n\to 0} \int \mathbf{g}_n\, d\mu = \int \mathbf{f}_n\, d\mu$$

iar pe de altă parte, din propoziția 4 deducem că

$$\lim_{n\to 0} \sum_{i\in I} \int |\mathbf{f} - g_n|\, d\mu_i = 0.$$

Atunci

$$\left| \sum_{i\in I} \int \mathbf{f}\, d\mu_i - \sum_{i\in I} \int \mathbf{g}_n\, d\mu_i \right| = \left| \sum_{i\in I} \left(\int \mathbf{f}\, d\mu_i - \int \mathbf{g}_n\, d\mu_i \right) \right| =$$

$$= \left| \sum_{i\in I} \int (\mathbf{f} - \mathbf{g}_n)\, d\mu_i \right| \leqslant \sum_{i\in I} \left| \int (\mathbf{f} - \mathbf{g}_n)\, d\mu_i \right| \leqslant \sum_{i\in I} \int |\mathbf{f} - \mathbf{g}_n|\, d\mu_i$$

deci

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i\in I} \int g_n \, d\mu = \sum_{i\in I} \int f \, d\mu_i .$$

Cum pentru fiecare funcție g_n avem

$$\int g_n \, d\mu = \sum_{i\in I} \int g_n \, d\mu_i ,$$

trecînd la limită obținem

$$\int f \, d\mu = \sum_{i\in I} \int f \, d\mu_i$$

și teorema este demonstrată.

Observație. Pentru o măsură atomică, egalitatea din enunț se scrie

$$\int f \, d\mu = \sum_{i\in I} \alpha(t) f(t).$$

Corolar. *Pentru orice mulțime boreliană relativ compactă* $A \subset T$ *avem*

$$\mu(A) = \sum_{i\in I} \mu_i(A).$$

Într-adevăr, A este μ -integrabilă.

Propoziția 5. *O mulțime* $N \subset T$ *este* μ *-neglijabilă, dacă și numai dacă este* μ_i *-neglijabilă oricare ar fi* $i \in I$.

Din inegalitățile $\mu_i \leqslant \mu$ rezultă că dacă N este μ -neglijabilă, atunci N este μ_i-neglijabilă oricare ar fi $i \in I$. Reciproc, să presupunem că $\mu_i^*(N) = 0$ pentru orice $i \in I$. Fie $K \subset T$ o mulțime compactă și U o vecinătate relativ compactă a lui K. Din corolarul precedent rezultă

$$\sum_{i\in I} \mu_i(U) = \mu(U) < +\infty .$$

Fie $\varepsilon > 0$; există o parte finită $J \subset I$ astfel încît

$$\sum_{i\notin J} \mu_i(U) < \frac{\varepsilon}{2} .$$

Fie n numărul de elemente din J. Pentru fiecare $i \in J$, avem $\mu_i^*(K \cap N) = 0$, deci există o vecinătate deschisă $V_i \subset U$ a lui $K \cap N$ astfel încît

$$\mu_i^*(V_i) < \frac{\varepsilon}{2n} .$$

Atunci $V = \bigcap_{i=1}^{n} V_i$ este o vecinătate deschisă a lui $K \cap N$ și pentru orice $i \in J$ avem $\mu_i(V) < \frac{\varepsilon}{2n}$. Atunci

$$\mu(V) = \sum_{i\in I} \mu_i(V) = \sum_{i\in J} \mu_i(V) + \sum_{i\notin J} \mu_i(V) \leqslant n \cdot \frac{\varepsilon}{2n} + \sum_{i\notin J} \mu_i(U) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

deci $\mu^*(K \cap N) = 0$. Rezultă că N este μ -neglijabilă.

Observație. Pentru o măsură atomică definită prin $\mu(f) = \sum_{t\in T} \alpha(t)f(t)$ pentru $f \in \mathcal{K}(T)$, o funcție f este μ -neglijabilă dacă și numai dacă $\alpha(t)f(t) \equiv 0$.

Propoziția 6. *O funcție f definită pe T cu valori într-un spațiu topologic X este μ -măsurabilă dacă și numai dacă f este μ_i -măsurabilă, oricare ar fi $i \in I$.*

Din inegalitățile $\mu_i \leqslant \mu$ rezultă că dacă f este μ -măsurabilă, atunci f este μ_i -măsurabilă, oricare ar fi $i \in I$.

Reciproc, să presupunem că pentru fiecare $i \in I$, funcția f este μ_i -măsurabilă. Fie $K \subset T$ o mulțime compactă și $\varepsilon > 0$. Deoarece

$$\sum_{i\in I} \mu_i(K) = \mu(K) < +\infty$$

există o parte finită $J \subset I$ astfel încît

$$\sum_{i\notin J} \mu_i(K) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Fie n numărul elementelor lui J. Pentru fiecare $i \in J$ există o mulțime compactă $K_i \subset K$ astfel încît $\mu_i(K - K_i) < \frac{\varepsilon}{2n}$ și restricția lui f la K_i este continuă. Mulțimea $K' = \bigcap_{i\in J} K_i$ este compactă, restricția lui f la K' este continuă și $\mu_i(K - K') < \mu_i(K - K_i) < \frac{\varepsilon}{2n}$, pentru fiecare $i \in J$. Atunci

$$\mu(K - K') = \sum_{i\in I} \mu_i(K - K') = \sum_{i\in J} \mu_i(K - K') + \sum_{i\notin J} \mu_i(K - K') \leqslant$$

$$\leqslant n \cdot \frac{\varepsilon}{2n} + \sum_{i\notin J} \mu_i(K) \leqslant \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Urmează că f este μ -măsurabilă.

Observație. Pentru o măsură atomică orice funcție este măsurabilă.

Propoziția 7. *Dacă funcția $f \geqslant 0$ este μ -măsurabilă și nulă pe complementara reuniunii unui șir (A_n) de mulțimi μ -integrabile, atunci*

$$\int^* f \, d\mu = \sum_{i\in I} \int^* f \, d\mu_i.$$

Putem presupune că șirul (A_n) este crescător. Pentru fiecare $n \in N$ funcția $f_n = \inf(n, f\varphi_{A_n})$ este mărginită, μ-măsurabilă și nulă pe complementara mulțimii μ -integrabile A_n. Rezultă că f_n este μ -integrabilă. Din teorema 1 deducem că f_n este μ_i -integrabilă pentru fiecare $i \in I$ și că

$$\int f_n \, d\mu = \sum_{i\in I} \int f_n \, d\mu_i.$$

Dar şirul f_n este crescător şi $\lim_{n\to\infty} f_n(t) = \sup_n f_n(t) = f(t)$. Atunci

$$\int^* f d\mu = \sup_n \int f_n \, d\mu = \sup_n \sum_{i\in I} \int f_n \, d\mu_i = \sup_n \sup_{J\subset I} \sum_{i\in J} \int f_n \, d\mu_i =$$

$$= \sup_{J\subset I} \sup_n \int f_n \, d\left(\sum_{i\in J} \mu_i\right) = \sup_{J\subset I} \int^* f d\left(\sum_{i\in J} \mu_i\right) = \sup_{J\subset I} \sum_{i\in J} \int^* f \, d\mu_i = \sum_{i\in I} \int^* f d\mu_i .$$

Propoziţia 8. *Să presupunem că T este numărabil la infinit. O funcţie $\mathbf{f}$ definită pe T cu valori într-un spaţiu Banach E sau în $\overline{R}$ este μ-integrabilă dacă şi numai dacă pentru fiecare $i \in I$, funcţia $\mathbf{f}$ este μ_i-integrabilă şi* $\sum_{i\in I} \int^* |\mathbf{f}| \, d\mu_i < +\infty$.

Dacă $\mathbf{f}$ este μ-integrabilă, din teorema 1 rezultă că $\mathbf{f}$ este μ_i-integrabilă pentru fiecare $i \in I$. Din propoziţia 4 rezultă că

$$\sum_{i\in I} \int^* |\mathbf{f}| \, d\mu_i \leqslant \int^* |\mathbf{f}| \, d\mu < +\infty$$

Reciproc, să presupunem că $\mathbf{f}$ este μ_i-integrabilă pentru orice $i \in I$ şi că $\sum_{i\in I} \int^* |\mathbf{f}| \, d\mu_i < +\infty$. Atunci $\mathbf{f}$ este μ_i-măsurabilă pentru fiecare $i \in I$, deci $\mathbf{f}$ este μ-măsurabilă. Din propoziţia 7 rezultă că

$$\int^* |\mathbf{f}| \, d\mu = \sum_{i\in I} |\mathbf{f}| \, d\mu_i < +\infty .$$

Conform criteriului de integrabilitate, funcţia $\mathbf{f}$ este μ-integrabilă.

3. Familii sumabile de măsuri vectoriale

Fie X un spaţiu Banach şi $(\mathbf{m}_i)_{i\in I}$ o familie de măsuri majorate pe T cu valori în X.

Spunem că familia de măsuri vectoriale $(\mathbf{m}_i)_{i\in I}$ este sumabilă, dacă familia de măsuri pozitive $(|\mathbf{m}_i|)_{i\in I}$ este sumabilă.

Rezultă că dacă familia $(\mathbf{m}_i)_{i\in I}$ este sumabilă, atunci pentru orice funcţie $f \in \mathcal{K}(T)$, familia $(\mathbf{m}_i(f))_{i\in I}$ de elemente din X este absolut sumabilă.

Într-adevăr, dacă $f \in \mathcal{K}(T)$, atunci

$$\sum_{i\in I} |\mathbf{m}_i(f)| \leqslant \sum_{i\in I} |\mathbf{m}_i|(f) < +\infty .$$

Pentru fiecare funcţie $f \in \mathcal{K}(T)$ să notăm

$$\mathbf{m}(f) = \sum_{i\in I} \mathbf{m}_i(f).$$

Aplicația $f \to \mathbf{m}(f)$ a lui $\mathcal{K}(T)$ în X este liniară. Ea este majorată de măsura pozitivă $\mu = \sum_{i \in I} |\mathbf{m}_i|$:

$$|\mathbf{m}(f)| = \left|\sum_{i \in I} \mathbf{m}_i(f)\right| \leqslant \sum_{i \in I} |\mathbf{m}_i(f)| \leqslant \sum_{i \in I} |\mathbf{m}_i|(|f|) = \mu(|f|)$$

deci $\mathbf{m}$ este o măsură majorată pe T și $|\mathbf{m}| \leqslant \mu$.

Măsura $\mathbf{m}$ se numește suma familiei $(\mathbf{m}_i)_{i \in I}$ de măsuri vectoriale și se notează

$$\mathbf{m} = \sum_{i \in I} \mathbf{m}_i .$$

Inegalitatea $|\mathbf{m}| \leqslant \mu$ se scrie acum

$$\left|\sum_{i \in I} \mathbf{m}_i\right| \leqslant \sum_{i \in I} |\mathbf{m}_i|$$

și inegalitatea este în general strictă, chiar pentru o familie finită de măsuri

Teorema 2. *Fie E și F două spații Banach astfel încît să avem $X \subset \mathcal{L}(E, F)$. Dacă $\mathbf{f} : T \to E$ este o funcție μ-integrabilă, atunci funcția $\mathbf{f}$ este $\mathbf{m}$-integrabilă și $\mathbf{m}_i$-integrabilă, oricare ar fi $i \in I$ iar familia $\left(\int \mathbf{f}\, d\mathbf{m}_i\right)_{i \in I}$ este absolut sumabilă și*

$$\int \mathbf{f}\, d\mathbf{m} = \sum_{i \in I} \int \mathbf{f}\, d\mathbf{m}_i .$$

Din inegalitatea $|\mathbf{m}| \leqslant \mu$ și $|\mathbf{m}_i| \leqslant \mu$ rezultă că funcția $\mathbf{f}$ este $\mathbf{m}$-integrabilă și $\mathbf{m}_i$-integrabilă pentru fiecare $i \in I$. Faptul că familia $\left(\int \mathbf{f}\, d\mathbf{m}_i\right)_{i \in I}$ este absolut sumabilă rezultă din inegalitățile :

$$\sum_{i \in I} \left|\int \mathbf{f}\, d\mathbf{m}_i\right| \leqslant \sum_{i \in I} \int |\mathbf{f}|\, d\,|\mathbf{m}_i| = \int |\mathbf{f}|\, d\mu < +\infty .$$

Pentru fiecare funcție $\varphi \in \mathcal{K}(T)$ și fiecare $x \in E$ avem

$$\left(\sum_I \int \varphi\, d\mathbf{m}_i\right) x = \left(\lim_{J \subset I} \sum_{i \in J} \int \varphi\, d\mathbf{m}_i\right) x = \lim_{J \subset I} \left(\int \varphi d \left(\sum_{i \in J} \mathbf{m}_i\right)\right) x =$$

$$= \lim_{J \subset I} \int \varphi\, x\, d \left(\sum_{i \in J} \mathbf{m}_i\right) = \lim_{J \subset I} \sum_{i \in J} \int \varphi\, x\, d\mathbf{m}_i = \sum_{i \in I} \int \varphi\, x d\mathbf{m}_i .$$

Deducem de aici

$$\int \varphi\, x d\mathbf{m} = \left(\int \varphi\, d\mathbf{m}\right) x = \left(\sum_{i \in I} \int \varphi d\mathbf{m}_i\right) x = \sum_{i \in I} \int \varphi\, x\, d\mathbf{m}_i .$$

Atunci pentru orice sumă finită de forma $\mathbf{g} = \sum_j \varphi_j x_j$ cu $\varphi_j \in \mathcal{K}(T)$ şi $x_j \in E$ avem

$$\int \mathbf{g}\, \mathrm{d}\, \mathbf{m} = \sum_{i \in I} \int \mathbf{g}\, \mathrm{d}\, \mathbf{m}_i .$$

Fie $(\mathbf{g}_n)$ un şir de sume finite de forma $\sum_j \varphi_j x_j$ cu $\varphi_j \in \mathcal{K}(T)$ şi $x_j \in E$, convergent în medie către $\mathbf{f}$ pentru măsura μ:

$$\lim_{n \to \infty} \int |\mathbf{f} - \mathbf{g}_n|\, \mathrm{d}\mu = 0.$$

Din inegalitatea $|\mathbf{m}| \leqslant \mu$ deducem că

$$\lim_{n \to \infty} \int |\mathbf{f} - \mathbf{g}_n|\, \mathrm{d}\, |\mathbf{m}| = 0$$

şi deci

$$\lim_{n \to \infty} \int \mathbf{g}_n\, \mathrm{d}\, \mathbf{m} = \int \mathbf{f}\, \mathrm{d}\, \mathbf{m}.$$

Pe de altă parte deducem că

$$\lim_{n \to \infty} \sum_{i \in I} \int |\mathbf{f} - \mathbf{g}_n|\, \mathrm{d}\, |\mathbf{m}_i| = 0.$$

Atunci

$$\left| \sum_{i \in I} \int \mathbf{f}\, \mathrm{d}\, \mathbf{m}_i - \sum_{i \in I} \int \mathbf{g}_n\, \mathrm{d}\, \mathbf{m}_i \right| = \left| \sum_{i \in I} \int (\mathbf{f} - \mathbf{g}_n)\, \mathrm{d}\, \mathbf{m}_i \right| \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{i \in I} \left| \int (\mathbf{f} - \mathbf{g}_n)\, \mathrm{d}\, \mathbf{m}_i \right| \leqslant \sum_{i \in I} \int |\mathbf{f} - \mathbf{g}_n|\, \mathrm{d}\, |\mathbf{m}_i|$$

deci

$$\lim_{n \to \infty} \sum_{i \in I} \int \mathbf{g}_n\, \mathrm{d}\, \mathbf{m}_i = \sum_{i \in I} \int \mathbf{f}\, \mathrm{d}\, \mathbf{m}_i .$$

Pentru funcţiile $\mathbf{g}_n$ avem

$$\int \mathbf{g}_n\, \mathrm{d}\, \mathbf{m} = \sum_{i \in I} \int \mathbf{g}_n\, \mathrm{d}\mathbf{m}_i .$$

Trecînd la limită obţinem

$$\int \mathbf{f}\, \mathrm{d}\, \mathbf{m} = \sum_{i \in I} \int \mathbf{f}\, \mathrm{d}\, \mathbf{m}_i .$$

Corolar. *Pentru orice mulţime boreliană relativ compactă A, familia $(\mathbf{m}_i(A))_{i \in I}$ este absolut sumabilă şi*

$$\mathbf{m}(A) = \sum_{i \in I} \mathbf{m}_i(A).$$

Propoziția 9. *Dacă o mulțime $N \subset T$ este $\mathbf{m}_i$ -neglijabilă, oricare ar fi $i \in I$, atunci N este* **m**- *neglijabilă.*

Într-adevăr, N este $\mathbf{m}_i$ -neglijabilă pentru fiecare $i \in I$ deci (propoziția 5) este μ -neglijabilă. Din inegalitatea $|\mathbf{m}| \leqslant \mu$ rezultă că N este **m** -neglijabilă.

Propoziția 10. *Fie f o funcție definită pe T cu valori într-un spațiu topologic E. Dacă f este $\mathbf{m}_i$ -măsurabilă, oricare ar fi $i \in I$, atunci f este* **m** *-măsurabilă.*

Într-adevăr, f este μ -măsurabilă, deci **m**- măsurabilă.

Propoziția 11. *Să presupunem că T este numărabil la infinit și fie* **f** *o funcție definită pe T cu valori într-un spațiu Banach E sau în $\overline{R}$. Dacă* **f** *este $\mathbf{m}_i$ -integrabilă, oricare ar fi $i \in I$ și dacă $\sum_{i \in I} \int |\mathbf{f}| \, \mathrm{d} \, |\mathbf{m}_i| < +\infty$, atunci* **f** *este* **m** *-integrabilă și*

$$\int \mathbf{f} \, \mathrm{d}\mathbf{m} = \sum_{i \in I} \int \mathbf{f} \, \mathrm{d}\mathbf{m}_i .$$

Într-adevăr, din propoziția 8 rezultă că **f** este μ -integrabilă iar din inegalitatea $|\mathbf{m}| \leqslant \mu$ rezultă că **f** este **m** -integrabilă. Din teorema 2 deducem atunci că

$$\int \mathbf{f} \, \mathrm{d}\mathbf{m} = \sum_{i \in I} \int \mathbf{f} \, \mathrm{d}\mathbf{m}_i .$$

§ 20. IMAGINI DE MĂSURI

1. Definiția imaginilor de măsuri

Fie μ o măsură *pozitivă* pe T, S un spațiu local compact și o funcție $\alpha : T \to S$. Se pune problema definirii unei măsuri ν pe S, cu ajutorul funcției α și a măsurii μ de pe T. Este natural să impunem ca măsura ν să fie aleasă în așa fel încît funcțiile f definite pe S, integrabile în raport cu ν să fie acelea pentru care $f \circ \alpha$ sînt integrabile în raport cu μ.

În particular, pentru funcțiile $f \in \mathcal{K}(S)$ trebuie ca funcțiile $f \circ \alpha$ să fie integrabile în raport cu μ.

Definiția 1. *Spunem că o funcție $\alpha : T \to S$ este proprie pentru măsura μ, sau μ -proprie, dacă :*

1) *α este μ -măsurabilă ;*

2) *pentru orice funcție $f \in \mathcal{K}(S)$, funcția $f \circ \alpha : T \to R$ este μ -integrabilă.*

Dacă **m** este o măsură majorată pe T, spunem că α este **m** -proprie dacă α este $|\mathbf{m}|$ -proprie.

Exemple. 1° Dacă μ este o măsură pozitivă mărginită (în particular, dacă μ este cu suport compact), atunci orice funcție μ -măsurabilă

$\alpha : T \to S$ este μ -proprie. Într-adevăr, pentru orice funcţie continuă $f \in \mathcal{K}(S)$, funcţia $f \circ \alpha$ este μ -măsurabilă şi

$$\int^* |f(\alpha(t))| \, d\mu(t) \leqslant \|f\| \mu^*(T) < +\infty,$$

deci $f \circ \alpha$ este μ -integrabilă

2) Dacă $\alpha : T \to S$ este o funcţie *continuă proprie* (pentru orice mulţime compactă $K \subset S$, $\alpha^{-1}(K)$ este compactă), atunci α este proprie pentru orice măsură μ pe T.

Într-adevăr, α este măsurabilă pentru orice măsură μ pe T; pentru orice funcţie continuă $f \in \mathcal{K}(S)$ cu suportul K, funcţia $f \circ \alpha$ este continuă pe T şi are suportul compact, conţinut în mulţimea compactă $\alpha^{-1}(K)$, deci $f \circ \alpha$ este integrabilă pentru orice măsură μ pe T.

Fie X un spaţiu Banach, $\mathbf{m}$ o măsură *majorată* pe T, cu valori în X şi $\alpha : T \to S$ o funcţie $\mathbf{m}$ -proprie.

Pentru orice funcţie $f \in \mathcal{K}(S)$, funcţia reală $t \to f(\alpha(t))$ definită pe T este $\mathbf{m}$ -integrabilă. Să punem

$$\mathbf{n}(f) = \int f(\alpha(t)) \, d\mathbf{m}(t)$$

şi

$$\nu(f) = \int f(\alpha(t)) \, d|\mathbf{m}|(t).$$

Aplicaţia $f \to \nu(f)$ este o funcţională liniară şi pozitivă pe $\mathcal{K}(S)$, deci este o *măsură pozitivă* pe S.

Aplicaţia $f \to \mathbf{n}(f)$ a lui $\mathcal{K}(S)$ în X este *liniară* şi *majorată* de ν :

$$|\mathbf{n}(f)| = \left| \int f(\alpha(t)) \, d\mathbf{m}(t) \right| \leqslant \int |f(\alpha(t))| \, d|\mathbf{m}| \leqslant$$

$$\leqslant \int |f|(\alpha(t)) \, d|\mathbf{m}| = \nu(|f|)$$

deci $\mathbf{n}$ este o *măsură majorată pe S cu valori în X.*

Definiţia 2. *Fie $\mathbf{m}$ o măsură majorată pe T cu valori în X şi $\alpha : T \to S$ o funcţie $\mathbf{m}$ -proprie.*

Măsura majorată $\mathbf{n}$ definită pe S cu valori în X, prin egalitatea

$$\mathbf{n}(f) = \int f \circ \alpha \, d\mathbf{m}, \qquad f \in \mathcal{K}(S)$$

se numeşte imaginea măsurii $\mathbf{m}$ prin funcţia α şi se notează $\alpha(\mathbf{m})$.

Aşadar, avem

$$\int f \, d\alpha(\mathbf{m}) = \int f \circ \alpha \, d\mathbf{m}, \qquad \text{pentru } f \in \mathcal{K}(S).$$

Măsura $\mathbf{n} = \alpha(\mathbf{m})$ este majorată de măsura pozitivă $\nu = \alpha(|\mathbf{m}|)$, deci $|\mathbf{n}| \leqslant \nu$, adică

$$|\alpha(\mathbf{m})| \leqslant \alpha(|\mathbf{m}|).$$

Observații. 1° Inegalitatea $|\alpha(\mathbf{m})| \leqslant \alpha(|\mathbf{m}|)$ poate fi strictă.

Exemplu. Să considerăm $T = \{0, 1\}$, $S = \{0\}$, $\mu = \varepsilon_0 - \varepsilon_1$ și $\alpha : T \to S$ singura aplicație posibilă a lui T în S. Funcția α este evident μ -proprie. Pentru orice funcție $f \in \mathcal{X}(S)$, funcția $f \circ \alpha$ este constantă și

$$\int_{\cdot} f \, \mathrm{d}\alpha(\mu) = \int_{\cdot} (f \circ \alpha) \, \mathrm{d}\mu = \varepsilon_0(f \circ \alpha) - \varepsilon_1(f \circ \alpha) = f(\alpha(0)) - f(\alpha(1)) = 0$$

deci $\alpha(\mu) = 0$ și $|\alpha(\mu)| = 0$.

Dar $|\mu| = \varepsilon_0 + \varepsilon_1$ și pentru orice funcție $f \neq 0$ din $\mathcal{X}(S)$ avem

$$\int_{\cdot} f \, \mathrm{d}\,\alpha(|\mu|) = \int_{\cdot} f \circ \alpha \, \mathrm{d}\,|\mu| = \varepsilon_0(f \circ \alpha) + \varepsilon_1(f \circ \alpha) = f(\alpha(0)) + f(\alpha(1)) = 2f(0)$$

deci $\alpha(|\mu|) \neq 0$ și deci $|\alpha(\mu)| < \alpha(|\mu|)$.

2° Măsura $\alpha(\mathbf{m})$ are valori în același spațiu X ca și măsura $\mathbf{m}$.

De exemplu, dacă μ este pozitivă, atunci $\alpha(\mu)$ este pozitivă; dacă μ este reală, atunci $\alpha(\mu)$ este reală, iar dacă μ este complexă, atunci $\alpha(\mu)$ este complexă.

2. Integrala superioară în raport cu imaginea unei măsuri pozitive

Fie μ o măsură *pozitivă* pe T, $\alpha : T \to S$ o funcție μ -proprie și $\nu = \mu(\alpha)$. Avem $\nu \geqslant 0$. Pentru orice funcție $f \in \mathcal{X}(S)$ avem

$$\int_{\cdot} f(s) \, \mathrm{d}\nu(s) = \int_{\cdot} f(\alpha(t)) \, \mathrm{d}\mu(t).$$

Vom arăta că această relație rămîne adevărată pentru integralele superioare, oricare ar fi funcția $f \geqslant 0$ definită pe S.

Lema 1. *Dacă $f \geqslant 0$ este o funcție semicontinuă inferior definită pe S, atunci*

$$\int_{\cdot}^{*} f(s) \, \mathrm{d}\nu(s) = \int_{\cdot}^{*} f(\alpha(t)) \, \mathrm{d}\mu(t).$$

Fie $(g_i)_{i \in I}$ familia filtrantă a tuturor funcțiilor din $\mathcal{X}(S)$ care verifică inegalitatea $0 \leqslant g_i \leqslant f$. Avem

$$f(s) = \sup_{i \in I} g_i(s)$$

deci

$$f(\alpha(t)) = \sup_{i \in I} g_i(\alpha(t)) \quad \text{pentru} \quad t \in T$$

adică $f \circ \alpha = \sup_{i \in I} g_i \circ \alpha$.

Aplicația $t \to (g_i(\alpha(t)))_{i\in I}$ a lui T în $\overline{R}^I$ este μ -măsurabilă. Într-adevăr, fie $K \subset T$ o mulțime compactă și $\varepsilon > 0$. Există o mulțime compactă $K' \subset K$ astfel încît $\mu(K-K') < \varepsilon$ și astfel încît restricția funcției α la K' să fie continuă. Atunci aplicația $t \to g_i(\alpha(t))$ este continuă pe K' deci și funcția $t \to (g_i(\alpha(t)))_{i\in I}$ este continuă pe K'; rezultă că această aplicație este μ -măsurabilă.

Conform propoziției 1, § 16, avem

$$\int^* f \circ \alpha \mathrm{d}\mu = \sup_{i\in I} \int g_i \circ \alpha \mathrm{d}\mu.$$

Dar

$$\int^* f \mathrm{d}\nu = \sup_{i\in I} \int g_i \,\mathrm{d}\nu \quad \text{și} \quad \int g_i \,\mathrm{d}\nu = \int g_i \circ \alpha \,\mathrm{d}\,\mu$$

deci

$$\int^* f \mathrm{d}\nu = \int^* f \circ \alpha \,\mathrm{d}\,\mu.$$

Lema 2. *Pentru orice funcție $f \geqslant 0$ definită pe S cu suportul compact avem*

$$\int^* f(s)\,\mathrm{d}\nu(s) \geqslant \int^* f(\alpha(t))\,\mathrm{d}\mu(t).$$

Fie $h \geqslant 0$ o funcție semicontinuă inferior pe S astfel încît $h \geqslant f$. Din lema 1, rezultă că

$$\int^* h(s)\,\mathrm{d}\nu(s) = \int^* h(\alpha(t))\,\mathrm{d}\mu(t) \geqslant \int^* f(\alpha(t))\,\mathrm{d}\mu(t).$$

Luînd în membrul stîng marginea inferioară pentru toate funcțiile $h \in \mathcal{J}_+(S)$ cu $g \geqslant f$ obținem

$$\int^* f(s)\,\mathrm{d}\nu(s) \geqslant \int^* f(\alpha(t))\,\mathrm{d}\mu(t),$$

deoarece f este cu suport compact.

Observații. Din lema 2 rezultă că:

1) Dacă f este ν -neglijabilă și cu suport compact, atunci $f \circ \alpha$ este μ -neglijabilă.

2) Dacă $N \subset S$ este ν-neglijabilă și relativ compactă, atunci $\alpha^{-1}(N)$ este μ -neglijabilă.

Lema 3. *Dacă $f \geqslant 0$ este o funcție ν -integrabilă și cu suport compac definită pe S, atunci funcția $f \circ \alpha$ este μ -integrabilă și*

$$\int f(s)\,\mathrm{d}\nu(s) = \int f(\alpha(t))\,\mathrm{d}\mu(t).$$

Fie (f_n) un șir de funcții din $\mathcal{K}(S)$ astfel încît să avem

$$\lim_{n\to\infty} \int |f_n(s) - f(s)|\,\mathrm{d}\nu(s) = 0.$$

Deoarece funcţiile $|f_n - f|$ au suportul compact, din lema 2 rezultă

$$\lim_{n\to\infty} \int^* |f_n(\alpha(t)) - f(\alpha(t))|\, d\mu(t) = 0.$$

Funcţiile $f_n \circ \alpha$ sînt μ -integrabile, deoarece $f_n \in \mathcal{K}(S)$. Urmează că $f \circ \alpha$ este μ -integrabilă şi

$$\int f \circ \alpha \, d\mu = \lim_{n\to\infty} \int f_n \circ \alpha \, d\mu = \lim_{n\to\infty} \int f_n \, d\nu = \int f \, d\nu.$$

Observaţie. Din lema 3 rezultă că dacă $A \subset S$ este relativ compactă şi ν -integrabilă, atunci mulţimea $\alpha^{-1}(A) \subset T$ este μ -integrabilă şi

$$\nu(A) = \mu(\alpha^{-1}(A)).$$

Într-adevăr, $\varphi_A \circ \alpha = \varphi_{\alpha^{-1}(A)}$.

Lema 4. *Dacă $f \geqslant 0$ este o funcţie μ -măsurabilă, cu suport compact, definită pe S, atunci*

$$\int^* f(s)\, d\nu(s) = \int^* f(\alpha(t))\, d\mu(t).$$

Pentru fiecare număr natural n să punem $f_n = \inf(n, f)$. Funcţia f_n este ν -măsurabilă, mărginită şi cu suport compact, deci este ν -integrabilă. Conform lemei 3 avem

$$\int f_n \, d\nu = \int f_n \circ \alpha \, d\mu.$$

Şirul (f_n) este crescător, $f = \sup_n f_n$ şi $f \circ \alpha = \sup_n f_n \circ \alpha$. Luînd marginea superioară în ambii membri ai egalităţii obţinem

$$\int^* f \, d\nu = \int^* f \circ \alpha \, d\mu.$$

Lema 5. *Fie H şi K două spaţii compacte şi α o aplicaţie continuă a lui H pe K. Dacă $h \geqslant 0$ este o funcţie semicontinuă inferior pe H, atunci funcţia $f'(s) = \inf_{\alpha(t)=s} h(t)$ este semicontinuă inferior pe K.*

Să observăm mai întîi că pentru fiecare punct $s \in K$ există un punct $t_s \in H$ astfel încît $\alpha(t_s) = s$ şi $f'(s) = h(t_s)$. Într-adevăr, $\{s\}$ este o mulţime închisă în K iar α este continuă pe H, deci $\alpha^{-1}(s)$ este închisă în H şi deci compactă. Deoarece h este inferior semicontinuă şi $\alpha^{-1}(s)$ este compactă, h îşi atinge marginea inferioară pe $\alpha^{-1}(s)$. Există deci un punct $t_s \in \alpha^{-1}(s)$ astfel încît $h(t_s) = \inf_{\alpha(t)=s} h(t)$, deci $f'(s) = h(t_s)$.

Fie acum a un număr real oarecare. Să arătăm că mulţimea $A = \{s \mid s \in K, f'(s) > a\}$ este deschisă, de unde va rezulta că f' este semicontinuă inferior. Fie $s_0 \in A$. Avem $f'(s_0) > a$ deci $h(t) > a$, pentru orice $t \in \alpha^{-1}(s_0)$. Deoarece h este inferior semicontinuă, există o vecinătate V a lui $\alpha^{-1}(s_0)$, astfel încît să avem $h(t) > a$ pentru orice $t \in V$. În plus, putem

considera mulțimea V saturată pentru relația de echivalență $\alpha(t) = \alpha(t')$. Atunci $\alpha(V)$ este o vecinătate a lui s_0. Pentru orice $s \in \alpha(V)$ există $t \in \alpha^{-1}(s)$ astfel încît $h(t) = f'(s)$. Avem deci $f'(s) > a$ pentru orice $s \in \alpha(V)$, deci s_0 este un punct interior al lui A și deci A este deschisă. Urmează că f' este semicontinuă inferior.

Lema 6. *Dacă $f \geqslant 0$ este o funcție cu suport compact definită pe S, atunci*

$$\int^* f(s)\,\mathrm{d}\nu(s) = \int^* f(\alpha(t))\,\mathrm{d}\mu(t).$$

După lema 2 avem

$$\int^* f(s)\,\mathrm{d}\nu(s) \geqslant \int^* f(\alpha(t))\,\mathrm{d}\mu(t).$$

Rămîne de demonstrat inegalitatea contrară. Fie $K \subset S$ suportul lui f. Deoarece K este o mulțime ν -integrabilă și compactă, mulțimea $A = \alpha^{-1}(K)$ este μ -integrabilă. Deoarece α este μ -măsurabilă, A este reuniunea unei mulțimi μ -neglijabile N și a unui șir (H_n) de mulțimi compacte din T, disjuncte două cîte două, astfel încît restricția lui α la fiecare H_n să fie continuă.

Pentru fiecare n, mulțimea $K_n = \alpha(H_n)$ este compactă în S. Să notăm $B = \bigcup_{n=1}^{\infty} H_n$ și $B' = \bigcup_{n=1}^{\infty} K_n$. Deoarece mulțimile H_n sînt disjuncte două cîte două, avem $\alpha(B) = B'$ (vezi figura).

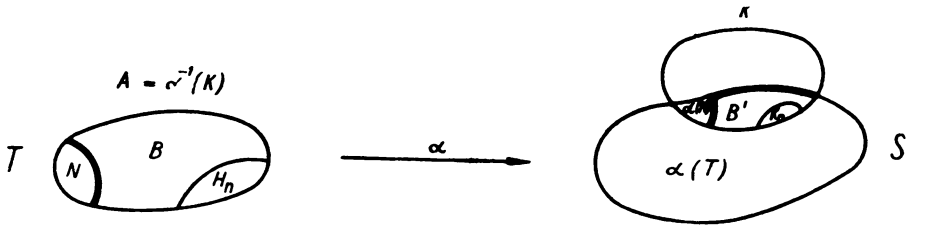

Fig. 1

Deoarece

$$\int^* f \circ \alpha\,\mathrm{d}\mu = \int^* (f \circ \alpha)\,\varphi_B\,\mathrm{d}\mu$$

va fi suficient să arătăm că pentru orice funcție semicontinuă inferior h definită pe T, astfel încît $f(\alpha(t))\,\varphi_B(t) \leqslant h(t)$, avem

$$\int^* f(s)\,\mathrm{d}\nu(s) \leqslant \int^* h(t)\,\mathrm{d}\mu(t)$$

deoarece, luînd în partea dreaptă marginea inferioară pentru toate funcțiile $h \geqslant (f \circ \alpha)\,\varphi_B$ din $\mathcal{J}_+(T)$ va rezulta

$$\int^* f\,\mathrm{d}\nu \leqslant \int^* (f \circ \alpha)\,\varphi_B\,\mathrm{d}\mu = \int^* f \circ \alpha\,\mathrm{d}\mu$$

şi deci

$$\int^* f \mathrm{d}\nu = \int^* f \circ \alpha \mathrm{d}\mu.$$

Pentru aceasta este suficient să arătăm că pentru orice funcţie $h \geqslant (f \circ \alpha)\varphi_B$ din $\mathcal{J}_+(T)$ putem găsi o funcţie f' definită pe S cu următoarele proprietăţi :

1) $f \leqslant f'$ deci $\int^* f \mathrm{d}\nu \leqslant \int^* f' \mathrm{d}\nu$;

2) f' este ν-măsurabilă şi cu suport compact, deci $\int^* f' \mathrm{d}\nu = \int^* f' \circ \alpha \, \mathrm{d}\mu$.

3) $f' \circ \alpha \leqslant h$, μ-aproape peste tot, deci $\int^* f' \circ \alpha \mathrm{d}\mu \leqslant \int^* h \mathrm{d}\mu$.

De aici va rezulta

$$\int^* f \mathrm{d}\nu \leqslant \int^* h \mathrm{d}\mu$$

şi lema va fi demonstrată.

Fie deci $h \geqslant (f \circ \alpha)\varphi_B$ o funcţie din $\mathcal{J}_+(T)$. Să luăm o funcţie $g \geqslant f$ din $\mathcal{J}_+(S)$ şi să punem

$$f'(s) = \begin{cases} g(s), & \text{dacă } s \in K - B', \\ \inf\limits_{\alpha(t)=s} h(t), & \text{dacă } s \in B' = \bigcup\limits_n K_n - \bigcup\limits_n \alpha(H_n). \\ 0, & \text{dacă } s \notin K. \end{cases}$$

Rămîne să verificăm că f' îndeplineşte cele trei condiţii de mai sus :

1) $f \leqslant f'$. Într-adevăr :

pentru $s \in B'$ avem $f(s) = f(\alpha(t))$ oricare ar fi $t \in \alpha^{-1}(s)$, deci $f(s) = \inf\limits_{\alpha(t)=s} f(\alpha(t)) \leqslant \inf\limits_{\alpha(t)=s} h(t) = f'(s)$;

pentru $s \in K - B'$ avem $f(s) \leqslant g(s) = f'(s)$;

pentru $s \notin K$ avem $f(s) = f'(s) = 0$.

2) f' are suportul compact K şi este ν-măsurabilă.

Într-adevăr :

f' este ν-măsurabilă pe $K - B'$, fiind egală pe această mulţime cu funcţia semicontinuă inferior g;

f' este ν-măsurabilă pe fiecare mulţime K_n, în baza lemei 5, deci f' este ν-măsurabilă pe B';

f' este ν-măsurabilă pe $\complement K$, fiind nulă pe această mulţime.

Deoarece mulţimile $K - B'$, B şi $\complement K$ sînt ν-măsurabile, rezultă că f' este ν-măsurabilă.

3) $f'(\alpha(t)) \leqslant h(t)$ pentru $t \in N$. Într-adevăr :

pentru $t \in A$ avem $\alpha(t) \in K$ deci $f'(\alpha(t)) = 0 \leqslant h(t)$;

pentru $t \in B$, notînd $s = \alpha(t)$, avem $t \in \alpha^{-1}(s)$, deci $f'(\alpha(t) = f'(s) \leqslant h(t)$.

Cu aceasta lema este demonstrată.

Propoziția 1. *Pentru orice funcție $f \geqslant 0$ definită pe S avem*

$$\int^* f(s)\,\mathrm{d}\nu(s) = \int^* f(\alpha(t))\,\mathrm{d}\mu(t).$$

Pentru orice mulțime compactă $K \subset S$ avem, conform lemei 6,

$$\int^* f\varphi_K\,\mathrm{d}\nu = \int^* (f\circ\alpha)\,\varphi_{\alpha^{-1}(K)}\,\mathrm{d}\mu \leqslant \int^* f\circ\alpha\,\mathrm{d}\mu,$$

și deci

$$\int^* f\mathrm{d}\nu \leqslant \int^* f\circ\alpha\,\mathrm{d}\mu.$$

Rămîne de demonstrat inegalitatea contrară. Fie $H \subset T$ o mulțime compactă. Există o mulțime μ-neglijabilă $N \subset K$ și un șir crescător (H_n) de mulțimi compacte a căror reuniune este $H - N$ astfel încît restricția lui α la fiecare H_n să fie continuă. Atunci mulțimile $K_n = \alpha(H_n)$ sînt compacte, $\alpha(H - N)$ este reuniunea șirului crescător (K_n) și $H_n \subset \alpha^{-1}(K_n)$. Deducem

$$\int^* (f\circ\alpha)\,\varphi_H\,\mathrm{d}\mu = \int^* (f\circ\alpha)\,\varphi_{H-N}\,\mathrm{d}\mu =$$

$$= \sup_n \int^* (f\circ\alpha)\,\varphi_{H_n}\,\mathrm{d}\mu \leqslant \sup_n \int^* (f\circ\alpha)\,\varphi_{\alpha^{-1}(K)}\mathrm{d}\mu =$$

$$= \sup_n \int^* f\varphi_{K_n}\,\mathrm{d}\nu \leqslant \int^* \mathrm{d}f\nu.$$

Luînd marginea superioară pentru toate mulțimile compacte $H \subset T$, obținem

$$\int^* f\circ\alpha\,\mathrm{d}\mu \leqslant \int^* f\mathrm{d}\nu$$

și cu aceasta propoziția este demonstrată.

Corolar. *Pentru orice mulțime $A \subset S$ avem*

$$\nu^*(A) = \mu^*(\alpha^{-1}(A)).$$

3. Integrarea în raport cu imaginea unei măsuri pozitive

Fie μ o măsură pozitivă pe T și $\alpha : T \to S$ o funcție μ-proprie.

Propoziția 2. *O funcție $\mathbf{f}$ definită pe S cu valori într-un spațiu Banach E sau în $\overline{R}$ este $\alpha(\mu)$-neglijabilă, dacă și numai dacă funcția $\mathbf{f}\circ\alpha$ definită pe T este μ-neglijabilă.*

Într-adevăr, notînd $\nu = \alpha(\mu)$ avem

$$\int^* |\mathbf{f}|\,\mathrm{d}\nu = \int^* |\mathbf{f}|\circ\alpha\,\mathrm{d}\mu = \int^* |\mathbf{f}\circ\alpha|\mathrm{d}\mu$$

deci $\nu^*(|\mathbf{f}|) = 0$ dacă și numai dacă $\mu^*(|f\circ\alpha|) = 0$.

Corolarul 1. *O mulțime $A \subset S$ este ν-neglijabilă dacă și numai dacă mulțimea $\alpha^{-1}(A)$ este μ-neglijabilă.*

Corolarul 2. *Dacă μ este concentrată pe o mulțime $M \subset T$, atunci $\alpha(\mu)$ este concentrată pe mulțimea $\alpha(M) \subset S$.*

Să notăm $N = S - \alpha(M)$. Atunci $\alpha^{-1}(N)$ este disjunctă de M, deci $\alpha^{-1}(N)$ este μ-neglijabilă. Urmează că N este $\alpha(\mu)$-neglijabilă, deci $\alpha(\mu)$ este concentrată pe $\alpha(M)$.

Corolarul 3. *Dacă α este continuă și dacă $S(\mu)$ este suportul lui μ, atunci mulțimea $\overline{\alpha(S(\mu))}$ este suportul lui $\alpha(\mu)$:*

$$S(\alpha(\mu)) = \overline{\alpha(S(\mu))}.$$

Din corolarul 2 rezultă că $\alpha(\mu)$ este concentrată pe $\alpha(S(\mu))$ deci și pe $\overline{\alpha(S(\mu))}$. Suportul $S(\nu)$ al lui $\alpha(\mu)$ este cea mai mică mulțime *închisă* pe care este concentrată $\nu = \alpha(\mu)$, deci $S(\nu) \subset \overline{\alpha(S(\mu))}$.

Pe de altă parte, mulțimea $\alpha^{-1}(S - S(\nu))$ este o mulțime *deschisă* deoarece α este continuă, și este μ-*neglijabilă*, deoarece $S - S(\nu)$ este ν-neglijabilă. Urmează că $\alpha^{-1}(S - S(\nu)) \subset T - S(\mu)$ deci $S(\mu) \subset \alpha^{-1}(S(\nu))$ de unde $\alpha(S(\mu)) \subset S(\nu)$. Deoarece $S(\nu)$ este o mulțime închisă, avem, de asemenea, $\overline{\alpha(S(\mu))} \subset S(\nu)$ și deci $S(\nu) = \overline{\alpha(S(\mu))}$.

Propoziția 3. *O aplicație f a lui S într-un spațiu topologic G este $\alpha(\mu)$-măsurabilă dacă și numai dacă funcția $f \circ \alpha : T \to G$ este μ-măsurabilă.*

Să notăm $\alpha(\mu) = \nu$ și să presupunem mai întîi că f este ν-măsurabilă. Fie $H \subset T$ o mulțime compactă. Deoarece α este μ-măsurabilă, există o mulțime μ-neglijabilă $N \subset H$ și un șir (H_n) de mulțimi compacte disjuncte două cîte două a căror reuniune este $H - N$, astfel încît restricția lui α la fiecare H_n să fie continuă. Mulțimile $K_n = \alpha(H_n)$ sînt părți compacte ale lui S. Pentru fiecare n există o mulțime ν-neglijabilă $M_n \subset K_n$ și un șir $(C_{nm})_m$ de mulțimi compacte, disjuncte două cîte două, a căror reuniune este $K_n - M_n$ și astfel încît restricția lui f la fiecare mulțime C_{nm} să fie continuă. Mulțimile $\alpha^{-1}(M_n)$ sînt atunci μ-neglijabile, mulțimile $\alpha^{-1}(C_{nm})$ sînt μ-integrabile și restricția funcției $f \circ \alpha$ la fiecare mulțime $\alpha^{-1}(C_{nm}) \cap H_n$ este continuă.

Deoarece H este reuniunea mulțimii μ-neglijabile $N \cup \bigcup_n \alpha^{-1}(M_n)$ și a familiei numărabile $(\alpha^{-1}(C_{n,m}) \cap H_n)_{n,m}$, rezultă că funcția $f \circ \alpha$ este μ-măsurabilă.

Reciproc, să presupunem că $f \circ \alpha$ este μ-măsurabilă. Fie $K \subset S$ o mulțime compactă. Mulțimea $\alpha^{-1}(K)$ este μ-integrabilă, deci există o mulțime μ-neglijabilă $N \subset \alpha^{-1}(K)$ și un șir (H_n) de mulțimi compacte disjuncte două cîte două, a căror reuniune este $\alpha^{-1}(K) - N$, astfel încît restricțiile funcțiilor $f \circ \alpha$ și α la fiecare H_n să fie continue. Atunci mulțimile $K_n = \alpha(H_n)$ sînt compacte.

Restricția funcției $h = f \circ \alpha$ este continuă pe H_n deci își atinge marginea inferioară pe fiecare mulțime compactă $\alpha^{-1}(s) \cap H_n$ cu $s \in K_n$. Pentru fiecare $s \in K_n$ există $t_s \in \alpha^{-1}(s) \cap H_n$ astfel încît

$$f'(s) = \inf_{\substack{\alpha(t)=s \\ t \in H_n}} h(t) = h(t_s) = f(\alpha(t_s)) = f(s).$$

Dar, conform lemei 5, funcţia f' este semicontinuă inferior, deci ν-măsurabilă pe fiecare mulţime compactă K_n; urmează că restricţia lui f la fiecare mulţime K_n este ν-măsurabilă, deci f este ν-măsurabilă pe $\bigcup_n K_n$.

Dar $H_n \subset \alpha^{-1}(K_n)$, deci $\alpha^{-1}(K - \bigcup_n K_n) = \alpha^{-1}(K) - \bigcup_n \alpha^{-1}(K_n) \subset \alpha^{-1}(K) - \bigcup_n H_n = N$, deci $K - \bigcup_n K_n$ este ν-neglijabilă. Urmează că f este ν-măsurabilă pe K şi deci f este ν-măsurabilă.

Corolar. *O mulţime $A \subset S$ este $\alpha(\mu)$-măsurabilă dacă şi numai dacă $\alpha^{-1}(A)$ este μ-măsurabilă.*

Teorema 1. *O funcţie $\mathbf{f}$ definită pe S cu valori într-un spaţiu Banach E sau în $\bar{R}$ este $\alpha(\mu)$-integrabilă dacă şi numai dacă funcţia $\mathbf{f} \circ \alpha$ este μ-integrabilă. În acest caz avem*

$$\int \mathbf{f}\, d\alpha(\mu) = \int \mathbf{f} \circ \alpha\, d\mu.$$

Într-adevăr, $\mathbf{f}$ este $\alpha(\mu)$-măsurabilă dacă şi numai dacă $\mathbf{f} \circ \alpha$ este μ-măsurabilă. Din egalitatea

$$\int^* |\mathbf{f}|\, d\alpha(\mu) = \int^* |\mathbf{f} \circ \alpha|\, d\mu$$

rezultă că $\int^* |\mathbf{f}|\, d\alpha(\mu) < +\infty$ dacă şi numai dacă $\int^* |\mathbf{f} \circ \alpha|\, d\mu < +\infty$. Aşadar $\mathbf{f}$ este $\alpha(\mu)$-integrabilă dacă şi numai dacă $f \circ \alpha$ este μ-integrabilă.

Să presupunem acum că $\mathbf{f}$ este $\alpha(\mu)$-integrabilă. Există un şir $(\mathbf{f}_n)$ de funcţii din $\mathcal{K}_E(T)$ (sau din $\mathcal{K}(T)$) de forma $\sum_{i \in I} \varphi_i x_i$, cu $\varphi_i \in \mathcal{K}(T)$, $x_i \in E$, I finită, astfel încît să avem

$$\lim_{n \to \infty} \int |\mathbf{f} - \mathbf{f}_n|\, d\alpha(\mu) = 0$$

deci

$$\lim_{n \to \infty} \left| \int \mathbf{f}\, d\alpha\,(\mu) - \int \mathbf{f}_n\, d\alpha(\mu) \right| = 0$$

de unde

$$\lim_{n \to \infty} \int \mathbf{f}_n\, d\alpha(\mu) = \int \mathbf{f}\, d\alpha(\mu).$$

Pe de altă parte

$$\left| \int \mathbf{f} \circ \alpha\, d\mu - \int \mathbf{f}_n \circ \alpha d\mu \right| \leqslant \int |\mathbf{f} \circ \alpha - \mathbf{f}_n \circ \alpha|\, d\mu =$$

$$= \int |\mathbf{f} - \mathbf{f}_n| \circ \alpha\, d\mu = \int |\mathbf{f} - \mathbf{f}_n|\, d\alpha(\mu)$$

deci

$$\lim_{n \to \infty} \int \mathbf{f}_n \circ \alpha\, d\mu = \int \mathbf{f} \circ \alpha\, d\mu.$$

Pentru $\varphi \in \mathcal{K}(S)$ şi $x \in E$ avem

$$\int \varphi x \, d\alpha(\mu) = \left(\int \varphi \, d\alpha(\mu)\right) x = \left(\int \varphi \circ \alpha \, d\mu\right) x = \int (\varphi \circ \alpha)\, x d\mu = \int (\varphi x) \circ \alpha \, d\mu.$$

şi egalitatea rămîne adevărată pentru sume finite de funcţii de forma φx. Rezultă că pentru funcţiile $\mathbf{f}_n$ avem

$$\int \mathbf{f}_n \, d\alpha(\mu) = \int \mathbf{f}_n \circ \alpha \, d\mu.$$

Trecînd la limită obţinem

$$\int \mathbf{f} \, d\alpha(\mu) = \int \mathbf{f} \circ \alpha \, d\mu.$$

Corolar. *O mulţime $A \subset S$ este $\alpha(\mu)$-integrabilă dacă şi numai dacă mulţimea $\alpha^{-1}(A) \subset T$ este μ-integrabilă. În acest caz*

$$\alpha(\mu)\,(A) = \mu(\alpha^{-1}\,(A)).$$

Propoziţia 4. *Fie μ o măsură pozitivă pe T. O funcţie μ-măsurabilă $\alpha : T \to S$ este μ-proprie dacă şi numai dacă pentru orice mulţime compactă $K \subset S$, mulţimea $\alpha^{-1}(K) \subset S$ este μ-integrabilă.*

Dacă α este μ-proprie, orice mulţime compactă $K \subset S$ este $\alpha(\mu)$-integrabilă, deci $\alpha^{-1}(K)$ este μ-integrabilă.

Reciproc, să presupunem că $\alpha^{-1}(K)$ este μ-integrabilă oricare ar fi mulţimea compactă $K \subset S$.

Fie $f \in \mathcal{K}(S)$ şi fie K suportul lui f. Mulţimea $A = \alpha^{-1}(K)$ este μ-integrabilă, deci

$$\int^* |f(\alpha(t))| \, d\mu(t) = \int^* |f(\alpha(t))| \, \varphi_K(\alpha(t)) \, d\mu(t) \leqslant$$

$$\leqslant \|f\| \int^* \varphi_A(t) \, d\mu(t) < \infty.$$

Funcţia $f \circ \alpha$ este de asemenea μ-măsurabilă deci este μ-integrabilă. Rezultă că α este μ-proprie.

4. Integrarea în raport cu imaginea unei măsuri majorate

Fie X un spaţiu Banach şi $\mathbf{m}$ o măsură majorată pe T cu valori în X. Fie E şi F două spaţii Banach astfel încît $X \subset \mathcal{L}(E, F)$. Fie S un spaţiu local compact şi $\alpha : T \to S$ o funcţie $\mathbf{m}$-proprie. Să considerăm măsura $\alpha(\mathbf{m})$ pe S cu valori în X, definită prin egalitatea

$$\int f \, d\alpha(\mathbf{m}) = \int f \circ \alpha \, d\mathbf{m}, \quad f \in \mathcal{K}(S).$$

Teorema 2. *Fie funcția* $\mathbf{f} : S \to E$.

1) *Dacă funcția* $\mathbf{f} \circ \alpha$ *este* $\mathbf{m}$*-neglijabilă, atunci funcția* $\mathbf{f}$ *este* $\alpha(\mathbf{m})$*-neglijabilă*;

2) *Dacă* $\mathbf{f} \circ \alpha$ *este* $\mathbf{m}$*-măsurabilă, atunci* $\mathbf{f}$ *este* $\alpha(\mathbf{m})$*-măsurabilă*;

3) *Dacă* $\mathbf{f} \circ \alpha$ *este* $\mathbf{m}$*-integrabilă, atunci* $\mathbf{f}$ *este* $\alpha(\mathbf{m})$*-integrabilă și*

$$\int \mathbf{f}\, \mathrm{d}\alpha(\mathbf{m}) = \int \mathbf{f} \circ \alpha\, \mathrm{d}\mathbf{m}.$$

Avem $|\alpha(\mathbf{m})| \leqslant \alpha(|\mathbf{m}|)$. Dacă $\mathbf{f} \circ \alpha$ este $\mathbf{m}$-neglijabilă, adică $|\mathbf{m}|$-neglijabilă, atunci $\mathbf{f}$ este $\alpha(|\mathbf{m}|)$-neglijabilă, deci $\mathbf{f}$ este $|\alpha(\mathbf{m})|$-neglijabilă, adică $\alpha(\mathbf{m})$-neglijabilă.

La fel se demonstrează că dacă $\mathbf{f} \circ \alpha$ este $\mathbf{m}$-măsurabilă, atunci $\mathbf{f}$ este $\alpha(\mathbf{m})$-măsurabilă.

Din inegalitatea

$$\int^* |\mathbf{f}|\, \mathrm{d}\, |\alpha(\mathbf{m})| \leqslant \int^* |\mathbf{f}|\, \mathrm{d}\alpha(|\mathbf{m}|) = \int^* |\mathbf{f} \circ \alpha|\, \mathrm{d}\, |\mathbf{m}|$$

rezultă că dacă $\mathbf{f} \circ \alpha$ este $|\mathbf{m}|$-integrabilă (adică $\mathbf{m}$-integrabilă), atunci funcția $\mathbf{f}$ este $|\alpha(\mathbf{m})|$-integrabilă, adică $\alpha(\mathbf{m})$-integrabilă.

Să presupunem că $\mathbf{f} \circ \alpha$ este $\mathbf{m}$-integrabilă, adică $|\mathbf{m}|$-integrabilă. Atunci $\mathbf{f}$ este $\alpha(|\mathbf{m}|)$-integrabilă și $\alpha(\mathbf{m})$-integrabilă. Există un șir $(\mathbf{f}_n)$ de funcții din $\mathcal{K}_E(S)$ de forma $\sum_i \varphi_i x_i$ cu $\varphi_i \in \mathcal{K}(S)$ și $x_i \in E$, astfel încît

$$\lim_{n \to \infty} \int |\mathbf{f} - \mathbf{f}_n|\, \mathrm{d}\alpha(|\mathbf{m}|) = 0.$$

Deoarece $|\alpha(\mathbf{m})| \leqslant \alpha(|\mathbf{m}|)$, avem

$$\left| \int \mathbf{f}\, \mathrm{d}\alpha(\mathbf{m}) - \int \mathbf{f}_n\, \mathrm{d}\alpha(\mathbf{m}) \right| = \left| \int (\mathbf{f} - \mathbf{f}_n)\, \mathrm{d}\alpha\, (\mathbf{m}) \right| \leqslant$$

$$\leqslant \int |\mathbf{f} - \mathbf{f}_n|\, \mathrm{d}\, |\alpha(\mathbf{m})| \leqslant \int |\mathbf{f} - \mathbf{f}_n|\, \mathrm{d}\alpha(|\mathbf{m}|)$$

deci

$$\lim_{n \to \infty} \int \mathbf{f}_n\, \mathrm{d}\alpha(\mathbf{m}) = \int \mathbf{f}\, \mathrm{d}\alpha(\mathbf{m}).$$

Pe de altă parte

$$\left| \int \mathbf{f} \circ \alpha\, \mathrm{d}\mathbf{m} - \int \mathbf{f}_n \circ \alpha\, \mathrm{d}\mathbf{m} \right| = \left| \int (\mathbf{f} - \mathbf{f}_n) \circ \alpha\, \mathrm{d}\mathbf{m} \right| \leqslant$$

$$\leqslant \int |\mathbf{f} - \mathbf{f}_n| \circ \alpha\, \mathrm{d}\, |\mathbf{m}| = \int |\mathbf{f} - \mathbf{f}_n|\, \mathrm{d}\alpha(|\mathbf{m}|)$$

deci

$$\lim_{n\to\infty} \int \mathbf{f}_n \circ \alpha \, \mathbf{dm} = \int \mathbf{f} \circ \alpha \, \mathbf{dm}.$$

Dacă $\varphi \in \mathcal{K}(S)$ şi $x \in E$ avem

$$\int \varphi x \, \mathrm{d}\alpha(\mathbf{m}) = \left(\int \varphi \, \mathrm{d}\alpha(\mathbf{m}) \right) x = \left(\int \varphi \circ \alpha \, \mathbf{dm} \right) x =$$

$$= \int (\varphi \circ \alpha) x \, \mathbf{dm} = \int (\varphi x) \circ \alpha \, \mathbf{dm}$$

şi egalitatea rămîne adevărată şi pentru sume finite de funcţii de forma φx. Aşadar, pentru funcţiile $\mathbf{f}_n$ avem

$$\int \mathbf{f}_n \, \mathrm{d}\alpha(\mathbf{m}) = \int \mathbf{f}_n \circ \alpha \, \mathbf{dm}.$$

Prin trecere la limită obţinem

$$\int \mathbf{f} \, \mathrm{d}\alpha(\mathbf{m}) = \int \mathbf{f} \circ \alpha \, \mathbf{dm}.$$

5. Proprietăţile imaginilor de măsuri

Propoziţia 5. *Fie* μ *şi* ν *două măsuri pozitive pe* T. *Dacă* $\mu \leqslant \nu$ *şi dacă* $\alpha : T \to S$ *este o funcţie* ν*-proprie, atunci* α *este* μ*-proprie şi* $\alpha(\mu) \leqslant \alpha(\nu)$.

Într-adevăr, α este ν-măsurabilă deci este μ-măsurabilă; pentru orice funcţie $\varphi \in \mathcal{K}(S)$, funcţia $\varphi \circ \alpha$ este μ-integrabilă deci este ν-integrabilă; dacă $\varphi \geqslant 0$, avem

$$\int \varphi \, \mathrm{d}\alpha(\mu) = \int \varphi \circ \alpha \, \mathrm{d}\mu \leqslant \int \varphi \circ \alpha \, \mathrm{d}\nu = \int \varphi \, \mathrm{d}\alpha(\nu)$$

adică $\alpha(\mu) \leqslant \alpha(\nu)$.

Propoziţia 6. *Fie* μ *şi* ν *două măsuri pozitive pe* T. *O funcţie* $\alpha : T \to S$ *este proprie pentru măsura* $\mu + \nu$ *dacă şi numai dacă este proprie pentru* μ *şi pentru* ν. *În acest caz avem*

$$\alpha(\mu + \nu) = \alpha(\mu) + \alpha(\nu).$$

Într-adevăr, α este $\mu + \nu$-măsurabilă dacă şi numai dacă este μ-măsurabilă şi ν-măsurabilă. Pentru orice funcţie $f \in \mathcal{K}(S)$, funcţia $f \circ \alpha$ este $\mu + \nu$-integrabilă dacă şi numai dacă $f \circ \alpha$ este μ-integrabilă şi ν-integrabilă. Rezultă că α este $\mu + \nu$-proprie, dacă şi numai dacă este μ-proprie şi ν-proprie.

Fie $f \in \mathcal{X}(S)$. Avem

$$\int f \mathrm{d}\alpha(\mu + \nu) = \int f \circ \alpha \mathrm{d}(\mu + \nu) = \int f \circ \alpha \mathrm{d}\mu + \int f \circ \alpha \mathrm{d}\nu =$$

$$= \int f \mathrm{d}\alpha(\mu) + \int f \mathrm{d}\alpha(\nu) = \int f \mathrm{d}(\alpha(\mu) + \alpha(\nu))$$

deci

$$\alpha(\mu + \nu) = \alpha(\mu) + \alpha(\nu).$$

Propoziţia 7. *Fie* $\mathbf{m}$ *şi* $\mathbf{n}$ *două măsuri majorate pe* T *cu valori într-un spaţiu Banach* X. *Dacă* $\alpha : T \to S$ *este o funcţie proprie pentru* $\mathbf{m}$ *şi pentru* $\mathbf{n}$, *atunci* α *este proprie pentru* $\mathbf{m} + \mathbf{n}$ *şi*

$$\alpha(\mathbf{m} + \mathbf{n}) = \alpha(\mathbf{m}) + \alpha(\mathbf{n}).$$

Propoziţia rezultă din inegalitatea $|\mathbf{m} + \mathbf{n}| \leqslant |\mathbf{m}| + |\mathbf{n}|$. Egalitatea $\alpha(\mathbf{m} + \mathbf{n}) = \alpha(\mathbf{m}) + \alpha(\mathbf{n})$ se demonstrează ca în propoziţia precedentă.

Propoziţia 8. *Fie* $\mathbf{m}$ *o măsură majorată pe* T *şi* a *un scalar. Dacă* $\alpha : T \to S$ *este* $\mathbf{m}$*-proprie, atunci* α *este* $a\mathbf{m}$*-proprie şi*

$$\alpha(a\mathbf{m}) = a\alpha(\mathbf{m}).$$

Demonstraţia este imediată.

Propoziţa 9. *Fie* μ *o măsură reală pe* T. *O funcţie* $\alpha : T \to S$ *este* μ*-proprie, dacă şi numai dacă este proprie pentru* μ_+ *şi* μ_-. *În acest caz avem*

$$\alpha(\mu) = \alpha(\mu_+) - \alpha(\mu_-).$$

Într-adevăr, dacă α este μ-proprie, atunci este $|\mu|$-proprie, deci este proprie pentru măsurile

$$\mu_+ = \frac{1}{2}(|\mu| + \mu) \text{ şi } \mu = \frac{1}{2}(|\mu| - \mu).$$

Reciproc, dacă α este proprie pentru μ_+ şi μ_-, atunci este proprie pentru măsura $|\mu| = \mu_+ + \mu_-$, adică este μ-proprie. Egalitatea

$$\alpha(\mu) = (\alpha\mu_+) - \alpha(\mu_-)$$

rezultă din egalitatea $\mu = \mu_+ - \mu_-$, folosind propoziţiile 5 şi 7.

Observaţie. Măsurile $\alpha(\mu_+)$ şi $\alpha(\mu_-)$ sînt pozitive dar, în general, sînt diferite de partea pozitivă şi partea negativă a măsurii $\alpha(\mu)$.

Într-adevăr, dacă am avea

$$(\alpha(\mu))_+ = \alpha(\mu_+) \text{ şi } (\alpha(\mu))_- = \alpha(\mu_-),$$

atunci ar rezulta $|\alpha(\mu)| = \alpha(|\mu|)$; dar s-a arătat că putem avea $|\alpha(\mu)| < \alpha(|\mu|)$.

Propoziţia 10. *Fie* $\mu = \mu_1 + i\mu_2$ *o măsură complexă pe* T, *unde* μ_1 *şi* μ_2 *sînt reale. O funcţie* $\alpha : T \to S$ *este* μ*-proprie, dacă şi numai dacă este proprie pentru* μ_1 *şi* μ_2. *În acest caz avem*

$$\alpha(\mu) = \alpha(\mu_2) + i\alpha(\mu_2).$$

Afirmația rezultă din inegalitățile $|\mu_1| \leqslant |\mu|$, $|\mu_2| \leqslant |\mu|$ și $|\mu| \leqslant |\mu_1| + |\mu_2|$. Egalitatea rezultă folosind propozițiile 6 și 8.

Propoziția 11. *Fie μ și ν două măsuri reale pe T. Funcția $\alpha : T \to S$ este proprie pentru μ și pentru ν dacă și numai dacă α este proprie pentru* $\sup(\mu, \nu)$ *și pentru* $\inf(\mu, \nu)$. *În acest caz avem*

$$\sup(\alpha(\mu), \alpha(\nu)) \leqslant \alpha(\sup(\mu, \nu)),$$

$$\inf(\alpha(\mu), \alpha(\nu)) \geqslant \alpha(\inf(\mu, \nu)).$$

Afirmația rezultă din inegalitățile

$$|\mu| \leqslant |\sup(\mu, \nu)|, \ |\nu| \leqslant |\sup(\mu, \nu)| \leqslant |\mu| + |\nu|,$$

și din inegalitățile similare pentru $\inf(\mu, \nu)$.

Avem apoi

$$\sup(\alpha(\mu), \alpha(\nu)) = \frac{1}{2}(\alpha(\mu) + \alpha(\nu) + |\alpha(\mu) - \alpha(\nu)|) =$$

$$= \frac{1}{2}(\alpha(\mu + \nu) + |\alpha(\mu - \nu)|) \leqslant \frac{1}{2}(\alpha(\mu + \nu) + \alpha(|\mu - \nu|) =$$

$$= \alpha\left(\frac{1}{2}(\mu + \nu + |\mu - \nu|)\right) = \alpha(\sup(\mu, \nu))$$

și, de asemenea,

$$\inf(\alpha(\mu), \alpha(\nu)) = -\sup(-\alpha(\mu), -\alpha(\nu)) =$$

$$= -\sup(\alpha(-\mu), \alpha(-\nu)) \geqslant -\alpha(\sup(-\mu, -\nu)) =$$

$$= \alpha(-\sup(-\mu, -\nu)) = \alpha(\inf(\mu, \nu)).$$

Propoziția 12. *Fie T, S, R trei spații local compacte, μ o măsură pe T și $\alpha : T \to S$ o funcție μ-proprie. O funcție $\beta : S \to R$ este $\alpha(\mu)$-proprie, dacă și numai dacă funcția $\beta \circ \alpha$ este μ-proprie. În acest caz avem*

$$(\beta \circ \alpha)(\mu) = \beta(\alpha(\mu)).$$

Într-adevăr, din propoziția 3 rezultă că funcția $\beta : S \to R$ este $\alpha(\mu)$-măsurabilă dacă și numai dacă $\beta \circ \alpha$ este μ-măsurabilă.

Pentru orice funcție $f \in \mathcal{K}(R)$ avem $(f \circ \beta) \circ \alpha = f \circ (\beta \circ \alpha)$ deci $f \circ \beta$ este $\alpha(\mu)$-integrabilă dacă și numai dacă $f \circ (\beta \circ \alpha)$ este μ-integrabilă. Rezultă că β este $\alpha(\mu)$-proprie dacă și numai dacă $\beta \circ \alpha$ este μ-proprie.

Să presupunem că $\beta \circ \alpha$ este μ-proprie și fie $f \in \mathcal{K}(R)$. Atunci

$$\int f \, d(\beta \circ \alpha)(\mu) = \int f \circ (\beta \circ \alpha) \, d\mu = \int (f \circ \beta) \circ d\mu =$$

$$= \int f \circ \beta \, d\alpha(\mu) = \int f \, d\beta(\alpha(\mu))$$

de unde

$$(\beta \circ \alpha)(\mu) = \beta(\alpha(\mu)).$$

Corolarul 1. *Fie* $\mathbf{m}$ *o măsură majorată pe* T, $\alpha : T \to S$ *o funcție* $\mathbf{m}$*-proprie și funcția* $\beta : S \to R$. *Dacă funcția* $\beta \circ \alpha : T \to R$ *este* $\mathbf{m}$*-proprie, atunci* β *este* $\alpha(\mathbf{m})$*-proprie și*

$$(\beta \circ \alpha)\ (\mathbf{m}) = \beta(\alpha(\mathbf{m})).$$

Afirmația rezultă din inegalitatea $|\alpha(\mathbf{m})| \leqslant \alpha(|\mathbf{m}|)$. Dacă $\beta \circ \alpha$ este $\mathbf{m}$-proprie, adică $|\mathbf{m}|$-proprie, atunci β este $\alpha(|\mathbf{m}|)$-proprie și deci $|\alpha(\mathbf{m})|$-proprie, adică $\alpha(\mathbf{m})$-proprie. Egalitatea rezultă ca și în propoziția precedentă.

Corolarul 2. *Fie* T *și* S *două spații local compacte,* $\mathbf{m}$ *o măsură majorată pe* T *și* α *o aplicație biunivocă a lui* T *pe* S. *Funcția* α *este* $\mathbf{m}$*-proprie, dacă și numai dacă funcția* α^{-1} *este* $\alpha(\mathbf{m})$*-proprie. În acest caz*

$$\alpha^{-1}(\alpha(\mathbf{m})) = \mathbf{m}.$$

Într-adevăr, dacă α este $\mathbf{m}$-proprie, luînd în corolarul 1 $\beta = \alpha^{-1}$, funcția $\beta \circ \alpha$ este aplicația identică a lui T pe T, deci este $\mathbf{m}$-proprie; rezultă atunci că și $\alpha^{-1} = \beta$ este $\alpha(\mathbf{m})$-proprie, și

$$\alpha^{-1}(\alpha(\mathbf{m})) = \beta(\alpha(\mathbf{m})) = (\beta \circ \alpha)\ (\mathbf{m}) = \mathbf{m}.$$

Reciproc, dacă α^{-1} este $\alpha(\mathbf{m})$-proprie, rezultă ca mai sus că α este proprie pentru măsura $\alpha^{-1}(\alpha(\mathbf{m})) = \mathbf{m}$.

Corolarul 3. *Dacă* $\mathbf{m}$ *este o măsură majorată pe* T *și dacă* $\alpha : T \to S$ *este o aplicație biunivocă a lui* T *pe* S, *proprie pentru* $\mathbf{m}$, *atunci*

$$|\alpha(\mathbf{m})| = \alpha(|\mathbf{m}|).$$

Într-adevăr,

$$|\alpha(\mathbf{m})| \leqslant \alpha(|\mathbf{m}|).$$

Pe de altă parte, α^{-1} este proprie pentru măsura $\alpha(\mathbf{m})$, adică pentru $|\alpha(\mathbf{m})|$ și

$$|\mathbf{m}| = |\alpha^{-1}(\alpha\ (\mathbf{m}))| \leqslant \alpha^{-1}(|\alpha(\mathbf{m})|).$$

Atunci α este proprie pentru măsura $\alpha^{-1}(|\alpha(\mathbf{m})|)$ deci și pentru $|\mathbf{m}|$ și

$$\alpha(|\mathbf{m}|) \leqslant (\alpha^{-1}(|\alpha(\mathbf{m})|)) = |\alpha\ (\mathbf{m})|.$$

Rezultă deci că

$$|\alpha(\mathbf{m})| = \alpha(|\mathbf{m}|).$$

Corolarul 4. *Fie* $\mathbf{m}$ *o măsură majorată pe* T *cu valori într-un spațiu Banach* X *și* $\alpha : T \to S$ *o aplicație biunivocă a lui* T *pe* S, *proprie pentru măsura* $\mathbf{m}$. *Fie* E *și* F *două spații Banach astfel încît* $X \subset \mathcal{L}(E, F)$ *și fie* $\mathbf{f}$ *o funcție definită pe* S *cu valori în* E.

1) *Funcția* f *este* $\alpha(\mathbf{m})$*-neglijabilă dacă și numai dacă* $\mathbf{f} \circ \alpha$ *este* $\mathbf{m}$*-neglijabila*

2) *Funcția* $\mathbf{f}$ *este* $\alpha(\mathbf{m})$*-măsurabilă dacă și numai dacă* $\mathbf{f} \circ \alpha$ *este* $\mathbf{m}$*-măsurabilă.*

3) *Funcția* $\mathbf{f}$ *este* $\alpha(\mathbf{m})$*-integrabilă dacă și numai dacă* $\mathbf{f} \circ \alpha$ *este* $\mathbf{m}$*-integrabilă. În acest caz*

$$\int \mathbf{f}\, d\alpha(\mathbf{m}) = \int \mathbf{f} \circ \alpha\, d\mathbf{m}.$$

Afirmaţiile rezultă din corolarul 3 şi teorema 1.

În particular, luînd $E = C$ şi $F = X$, corolarul rămîne adevărat pentru funcţii scalare f.

Propoziţia 13. *Fie μ o măsură pozitivă pe T, $\alpha : T \to S$ o funcţie μ-proprie şi $g : S \to C$ o funcţie scalară astfel încît funcţia scalară $g \circ \alpha : T \to C$ să fie local μ-integrabilă. Funcţia g este local integrabilă pentru $\alpha(\mu)$ dacă şi numai dacă α este proprie pentru măsura $(g \circ \alpha)\mu$. În acest caz avem*

$$\alpha((g \circ \alpha)\mu) = g \cdot \alpha(\mu).$$

Să observăm mai întîi că α este măsurabilă pentru μ, deci pentru orice măsură de bază μ, în particular pentru măsura $(g \circ \alpha)\mu$.

Să observăm apoi că, deoarece $g \circ \alpha$ este *scalară* şi $|(g \circ \alpha)\mu| = |g \circ \alpha|\mu$, o funcţie $\mathbf{h}$ definită pe T cu valori într-un spaţiu Banach E sau în $\overline{R}$ este $(g \circ \alpha)$ μ-integrabilă, dacă şi numai dacă funcţia $\mathbf{h}(g \circ \alpha)$ este μ-integrabilă.

Pentru ca funcţia g să fie local $\alpha(\mu)$-integrabilă este necesar şi suficient ca funcţia gf să fie $\alpha(\mu)$-integrabilă, oricare ar fi funcţia $f \in \mathcal{K}(S)$ (propoziţia 1, § 15). Pentru aceasta este necesar şi suficient ca funcţia $(gf) \circ \alpha = (g \circ \alpha)(f \circ \alpha)$ să fie μ-integrabilă (teorema 1), deci (conform observaţiei de mai sus) este necesar şi suficient ca funcţia $f \circ \alpha$ să fie $(g \circ \alpha)$ μ-integrabilă.

Deoarece α este $(g \circ \alpha)$ μ-măsurabilă, rezultă că g este local $\alpha(\mu)$-integrabilă dacă şi numai dacă α este $(g \circ \alpha)$ μ-proprie.

Dacă g este local $\alpha(\mu)$-integrabilă, pentru orice funcţie $f \in \mathcal{K}(T)$ avem

$$\int f \, dg\alpha(\mu) = \int fg \, d\alpha(\mu) = \int (fg) \circ \alpha \, d\mu = \int (f \circ \alpha)(g \circ \alpha) \, d\mu =$$

$$= \int f \circ \alpha \, d(g \circ \alpha)\mu = \int f \, d\alpha((g \circ \alpha)\mu)$$

deci

$$\alpha((g \circ \alpha)\mu) = g \cdot \alpha(\mu)$$

Propoziţia 14. *Fie $\mathbf{m}$ o măsură majorată definită pe T cu valori într-un spaţiu Banach X, $\alpha : T \to S$ o aplicaţie biunivocă a lui T pe S, proprie pentru măsura $\mathbf{m}$ şi $g : S \to C$ o funcţie scalară astfel încît funcţia scalară $g \circ \alpha : T \to C$ să fie local $\mathbf{m}$-integrabilă şi deci*

$$|(g \circ \alpha)\,\mathbf{m}| = |g \circ \alpha|\,|\mathbf{m}|.$$

Funcţia g este local integrabilă pentru măsura $\alpha(\mathbf{m})$ dacă şi numai dacă α este proprie pentru măsura $(g \circ \alpha)\mathbf{m}$. În acest caz

$$\alpha((g \circ \alpha)\mathbf{m}) = g \cdot \alpha(\mathbf{m})$$

Demonstraţia este aceeaşi ca a propoziţiei 13, folosindu-se corolarul 4 al propoziţiei 12 în locul teoremei 1.

Propoziția 15. *Fie* $\mathbf{m}$ *o măsură majorată definită pe* T *cu valori într-un spațiu Banach* X, $\alpha : T \to S$ *o funcție* $\mathbf{m}$*-proprie,* E *și* F *două spații Banach astfel încît* $X \subset \mathcal{L}(E, F)$ *și* $\mathfrak{g} : S \to \mathcal{L}(E, F)$ *o funcție astfel încît funcția* $\mathfrak{g} \circ \alpha : T \to S$ *să fie local* $\mathbf{m}$*-integrabilă și*

$$|(\mathfrak{g} \circ \alpha)\,\mathbf{m}| = |\mathfrak{g} \circ \alpha|\ |\mathbf{m}|.$$

Dacă α *este proprie pentru măsura* $(\mathfrak{g} \circ \alpha)\,\mathbf{m}$, *atunci funcția* $\mathfrak{g}$ *este local* $\alpha(\mathbf{m})$*-integrabilă și*

$$\mathfrak{g} \cdot \alpha(\mathbf{m}) = \alpha((\mathfrak{g} \circ \alpha)\,\mathbf{m}).$$

Fie $f \in \mathcal{K}(S)$. Deoarece α este proprie pentru măsura $(\mathfrak{g} \circ \alpha)\,\mathbf{m}$, funcția $f \circ \alpha$ este $(\mathfrak{g} \circ \alpha)\,\mathbf{m}$-integrabilă. Din ipotezele asupra lui $\mathbf{m}$ și $\mathfrak{g} \circ \alpha$, folosind corolarul teoremei 3, § 16, rezultă că funcția $(\mathfrak{g} \circ \alpha)\ (f \circ \alpha) = (\mathfrak{g} f) \circ \alpha$ este $\mathbf{m}$-integrabilă. Deoarece α este $\mathbf{m}$-proprie, din teorema 2 rezultă că $\mathfrak{g} f$ este $\alpha(\mathbf{m})$-integrabilă. Deducem atunci că funcția $\mathfrak{g}$ este local $\alpha(\mathbf{m})$-integrabilă. Egalitatea $\mathfrak{g}\alpha(\mathbf{m}) = \alpha((\mathfrak{g} \circ \alpha)\ \mathbf{m})$ se demonstrează ca în propoziția 11.

Observație. Propozițiile 14 și 15 sînt valabile în particular dacă m este scalară, sau dacă $g : S \to C$ este o funcție scalară astfel încît funcția $g \circ \alpha : T \to C$ să fie local m-integrabilă.

Într-adevăr, în aceste cazuri rezultă și egalitatea

$$|(\mathfrak{g} \circ \alpha)\,\mathbf{m}| = |\mathfrak{g} \circ \alpha|\,|\mathbf{m}|.$$

6. Aplicație. Măsura Lebesgue ca imagine a măsurilor difuze

În acest punct vom arăta că pentru orice măsură *difuză* $\mu \geqslant 0$ pe un spațiu *compact* T, există o aplicație *continuă* α a lui T *pe* $[0,1]$ astfel încît $\alpha(\mu)$ să fie măsura Lebesgue pe $[0,1]$.

Pentru aceasta avem nevoie de cîteva noțiuni pregătitoare.

Fie T un spațiu local compact și μ o măsură pozitivă pe T.

Spunem că o mulțime $A \subset T$ este *carabilă* pentru măsura μ, sau μ-carabilă, dacă frontiera sa este μ-neglijabilă.

Deoarece mulțimea punctelor de discontinuitate ale funcției caracteristice φ_A este mulțimea $\mathrm{Fr}A$, rezultă că A este μ-carabilă dacă și numai dacă φ_A este continuă μ-aproape peste tot.

Orice mulțime μ-carabilă A este μ-măsurabilă, deoarece este reuniunea mulțimii deschise $\mathring{A}$ și a mulțimii μ-neglijabile

$$A - \mathring{A} \subset \overline{A} - \mathring{A} = \mathrm{Fr}\,A.$$

Dacă A este μ-carabilă, atunci

$$\mu^*(\mathring{A}) = \mu^*(\overline{A})$$

deoarece $\overline{A} = \mathring{A} \cup \mathrm{Fr}A$ iar $\mu^*(\mathrm{Fr}A) = 0$.

Reciproc, dacă A este μ-integrabilă și dacă

$$\mu^*(\mathring{A}) = \mu^*(\overline{A}),$$

atunci A este μ-carabilă deoarece

$$\mu^*(\mathrm{Fr}A) = \mu^*(\overline{A}) - \mu^*(\mathring{A}) = 0.$$

Dacă A este carabilă, orice mulțime B astfel încît $\mathring{A} \subset B \subset \overline{A}$ este carabilă; în particular $\mathring{A}$ și $\overline{A}$ sînt carabile.

Propoziția 16. *Orice punct din T posedă un sistem fundamental de vecinătăți închise carabile.*

Fie $t_0 \in T$ un punct oarecare și U o vecinătate integrabilă deschisă a lui T. Trebuie să arătăm că există o mulțime integrabilă deschisă V astfel încît

$$t_0 \in V \subset \overline{V} \subset U \quad \text{și} \quad \mu(V) = \mu(\overline{V}).$$

Pentru aceasta fie $f: T \to [0,1]$ o funcție continuă cu $f(t_0) = 1$ și $f(t) = 0$ pentru $t \notin U$. Pentru orice număr $\alpha > 0$, mulțimea $F_\alpha = f^{-1}(\alpha)$ este închisă și $F_\alpha \subset U$. Pentru orice familie finită $(\alpha_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ de numere diferite cu $0 < \alpha_i < 1$, mulțimile F_{α_i} sînt disjuncte două cîte două și

$$\sum_{i=1}^{n} \mu(F_{\alpha_i}) = \mu\left(\bigcup_{i=1}^{n} F_{\alpha_i}\right) \leqslant \mu(U) < +\infty.$$

Urmează că

$$\sum_{0<\alpha<1} \mu(F_\alpha) \leqslant \mu(U) < +\infty$$

adică familia de numere pozitive $(\mu(F_\alpha))_{0<\alpha<1}$ este sumabilă. Urmează că avem $\mu(F_\alpha) > 0$ cel mult pentru o mulțime numărabilă de indici α. Există atunci un număr β cu $0 < \beta < 1$ și $\mu(F_\beta) = 0$. Mulțimea $G_\beta = \{t \mid f(t) > \beta\}$ este o vecinătate deschisă a lui t_0 conținută în U, deci integrabilă, iar mulțimea

$$G_\beta \cup F_\beta = \{t \mid f(t) \geqslant \beta\}$$

este închisă. Urmează că $\overline{G}_\beta \subset G_\beta \cup F_\beta \subset U$ și

$$\mu(G_\beta) \leqslant \mu(\overline{G}_\beta) \leqslant \mu(G_\beta) + \mu(F_\beta) \leqslant \mu(G_\beta)$$

de unde $\mu(G_\beta) = \mu(\overline{G}_\beta)$ și deci G_β este carabilă. Luînd $V = G_\beta$ avem $t_0 \in V \subset \overline{V} \subset U$ și propoziția este demonstrată.

Corolar. *Pentru orice mulțime compactă $K \subset T$ și orice mulțime deschisă $U \supset K$ există o mulțime deschisă, integrabilă și carabilă V cu*

$$K \subset V \subset \overline{V} \subset U.$$

Într-adevăr, pentru fiecare punct $t \in K$ există o mulțime deschisă, integrabilă și carabilă V_t cu

$$t \in V_t \subset \overline{V}_t \subset U.$$

Există atunci o familie finită $(V_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ de mulțimi deschise integrabile și carabile care acoperă pe K, cu $V_i \subset \overline{V}_i \subset U$ pentru fiecare i. Mulțimea $V = \bigcup_{i=1}^{n} V_i$ este deschisă integrabilă și carabilă și

$$K \subset V \subset \overline{V} \subset U.$$

Măsurile difuze au o proprietate asemănătoare cu proprietatea lui Darboux : mulțimea valorilor sale este un interval.

Propoziția 17. *Fie K o mulțime compactă și $U \supset K$ o mulțime deschisă cu $\mu^*(U) > \mu(K)$. Dacă μ este difuză, pentru orice număr a cu $\mu(K) < a \leqslant \mu^*(U)$ există o mulțime deschisă μ-integrabilă G_a cu*

$$K \subset G_a \subset U \quad \text{și} \quad \mu(G_a) = a.$$

Deoarece

$$\mu(K) = \inf_{G \supset K} \mu(G), \qquad G \text{ deschisă},$$

există mulțimi deschise integrabile G cu $K \subset G \subset U$ și $\mu(G) < a$.

Să notăm cu $\mathcal{G}$ mulțimea părților deschise G cu $K \subset G \subset U$ și $\mu^*(G) \leqslant a$. Mulțimea $\mathcal{G}$ este ordonată inductiv, prin relația de incluziune. Într-adevăr, dacă (G_α) este o familie total ordonată de părți din $\mathcal{G}$, atunci mulțimea $G = \bigcup_\alpha G_\alpha$ este deschisă, $K \subset G \subset U$ și

$$\mu^*(G) = \mu^*\left(\bigcup_\alpha G_\alpha\right) = \sup_\alpha \mu^*(G_\alpha) \leqslant a$$

deci $G \in \mathcal{G}$. Fie G_0 un element maximal din G. Avem $K \subset G_0 \subset U$, G_0 este deschisă și $\mu^*(G) \leqslant a$. Vom arăta că avem $\mu^*(G_0) = a$. Într-adevăr, dacă am avea $\mu^*(G_0) < a$, atunci $G_0 \neq U$; luînd $t_0 \in U - G_0$ avem $\mu(\{t_0\}) = 0$ (deoarece μ este difuză). Există atunci o mulțime deschisă G_1 cu $\{t_0\} \subset G_1 \subset U$ și

$$\mu(G_1) < a - \mu(G_0).$$

Atunci $K \subset G_0 \cup G_1 \subset U$ și $\mu(G_0 \cup G_1) \leqslant \mu(G_0) + \mu(G_1) < a$ deci $G_0 \cup G_1 \in \mathcal{G}$ și deci G_0 n-ar mai fi element maximal în $\mathcal{G}$. Așadar, luînd $G_a = G_0$, avem

$$K \subset G_a \subset U \quad \text{și} \quad \mu(G_a) = a$$

și propoziția este demonstrată.

Lema 7. *Fie V și W două mulțimi deschise relativ compacte μ-carabile și a și b două numere, astfel încît*

$$V \subset W \quad \text{și} \quad \mu(V) < a < b < \mu(W).$$

Dacă μ este difuză există o mulțime deschisă μ-carabilă U astfel încît

$$\overline{V} \subset U \subset \overline{U} \subset W \quad \text{și} \quad a < \mu(U) < b.$$

Fie $a < \alpha < b$. Deoarece $\overline{V}$ este compactă și μ este difuză, conform propoziției 17 există o mulțime deschisă G cu

$$\overline{V} \subset G \subset W \quad \text{și} \quad \mu(G) = \alpha.$$

Deoarece

$$\mu(G) = \sup_{K \subset I} \mu(K), \quad K \text{ compactă},$$

există o mulțime compactă K cu

$$\overline{V} \subset K \subset G \quad \text{și} \quad a < \mu(K) \leqslant \mu(G) = \alpha.$$

Conform corolarului propoziției 16, există o mulțime deschisă carabilă U cu

$$K \subset U \subset \bar{U} \subset G.$$

Urmează că

$$\overline{V} \subset U \subset \bar{U} \subset W$$

și

$$a < \mu(K) \leqslant \mu(U) \leqslant \mu(G) = \alpha < b.$$

Propoziția 18. *Fie V și W două mulțimi deschise relativ compacte μ-carabile și a un număr astfel încît*

$$\overline{V} \subset W \text{ și } \mu(V) < a < \mu(W).$$

Dacă μ este difuză, există o mulțime deschisă μ-carabilă U astfel încît

$$\overline{V} \subset U \subset \bar{U} \subset W \quad \text{și} \quad \mu(U) = a.$$

Fie (a_n) un șir strict crescător și (b_n) un șir strict descrescător, ambele convergente către a, astfel încît

$$\mu(V) < a_n < a < b_n < \mu(W), \qquad \text{pentru orice } n.$$

Există o mulțime deschisă μ-carabilă V_1 cu

$$\overline{V} \subset V_1 \subset \overline{V}_1 \subset W \quad \text{și} \quad a_1 < \mu(V_1) < a_2.$$

Există apoi o mulțime deschisă μ-carabilă W_1 cu

$$\overline{V}_1 \subset W_1 \subset \overline{W}_1 \subset W \quad \text{și} \quad b_2 < \mu(W_1) < b_1.$$

Să presupunem că am găsit două mulțimi deschise μ-carabile V_n și W_n cu

$$\overline{V} \subset V_n \subset \overline{V}_n \subset W_n \subset \overline{W}_n \subset W \text{ și } a_n < \mu(V_n) < a_{n+1} < b_{n+1} < \mu(W_n) < b_n.$$

Putem atunci găsi o mulțime deschisă μ-carabilă V_{n+1} cu

$$\overline{V}_n \subset V_{n+1} \subset \overline{V}_{n+1} \subset W \quad \text{și} \quad a_{n+1} < \mu(V_{n+1}) < a_{n+2}$$

și apoi o mulțime deschisă μ-carabilă W_{n+1} cu

$$\overline{V}_{n+1} \subset W_{n+1} \subset \overline{W}_{n+1} \subset W \quad \text{și} \quad b_{n+2} < \mu(W_{n+1}) < b_{n+1}.$$

Am demonstrat astfel prin recurență că putem construi două șiruri (V_n) și (W_n) pe mulțimi deschise μ-carabile astfel încît pentru fiecare n să avem

$$\overline{V} \subset V_n \subset \overline{V}_n \subset \overline{V}_{n+1} \subset W_{n+1} \subset \overline{W}_{n+1} \subset W_n \subset \overline{W}_n \subset W$$

şi

$$a_n < \mu(V_n) < a_{n+1} < b_{n+1} < \mu(W_n) < b_n.$$

Să notăm cu $U = \bigcup_{n=1}^{\infty} V_n$. Mulţimea U este deschisă. Deoarece şirul (V_n) este crescător, avem

$$\mu(U) = \mu(\bigcup_n V_n) = \sup_n \mu(V_n) = \lim_{n\to\infty} \mu(V_n) = a.$$

Pe de altă parte avem

$$U = \bigcup_n V_n \subset \bigcap_n W_n \subset \bigcap_n \overline{W}_n$$

iar ultima mulţime este închisă, deci

$$\overline{U} \subset \bigcap_n \overline{W}_n.$$

Aşadar

$$\mu(\overline{U}) \leqslant \mu(\bigcap_n \overline{W}_n) = \inf_n \mu(\overline{W}_n) = \lim_{n\to\infty} \mu(\overline{W}_n) = a$$

şi U este μ-integrabilă, deci este μ-carabilă. Mulţimea U verifică incluziunile

$$\overline{V} \subset U \subset \overline{U} \subset W$$

şi propoziţia este demonstrată.

Sîntem acum în măsură să demonstrăm rezultatul anunţat la începutul acestui punct.

Teorema 3. *Dacă T este compact şi dacă μ este o măsură difuză cu $\mu(T) = 1$, există o aplicaţie continuă α a lui T pe segmentul $[0, 1]$ astfel încît măsura $\alpha(\mu)$ să fie măsura Lebesgue pe $[0,1]$.*

Să notăm $G(0) = \varnothing$ şi $G(1) = T$. Acestea sînt mulţimi carabile şi

$$\overline{G(0)} \subset G(1),\ 0 = \mu(G(0)) < \mu(G(1)) = 1.$$

Conform propoziţiei 18, există o mulţime deschisă μ-carabilă $G\left(\frac{1}{2}\right)$ cu

$$\overline{G\left(\frac{1}{2}\right)} \subset G(1) \quad \text{şi} \quad \mu\left(G\left(\frac{1}{2}\right)\right) = \frac{1}{2}.$$

Să presupunem că pentru fiecare număr diadic $\frac{k}{2^n}$, $k = 0, 1, \ldots, 2^n$, am găsit o mulţime deschisă μ-carabilă $G\left(\frac{k}{2^n}\right)$ astfel încît pentru $k = 0, 1, \ldots, 2^n - 1$ să avem

$$\overline{G\left(\frac{k}{2^n}\right)} \subset G\left(\frac{k+1}{2^n}\right) \quad \text{şi} \quad \mu\left(G\left(\frac{k}{2^n}\right)\right) = \frac{k}{2^n},$$

Pentru fiecare număr diadic de forma $\frac{2k+1}{2^{n+1}}$, $k = 0, 1, \ldots, 2^n - 1$, există atunci, conform propoziției 18, o mulțime deschisă carabilă $G\left(\frac{2k+1}{2^{n+1}}\right)$ cu

$$G\left(\frac{k}{2^n}\right) \subset G\left(\frac{2k+1}{2^{n+1}}\right) \subset \overline{G\left(\frac{2k+1}{2^{n+1}}\right)} \subset G\left(\frac{k+1}{2^n}\right)$$

și

$$\mu\left(G\left(\frac{2k+1}{2^{n+1}}\right)\right) = \frac{2k+1}{2^{n+1}}.$$

Am demonstrat astfel prin inducție completă că fiecărui număr diadic $r \in [0, 1]$ îi putem ataşa o mulțime deschisă μ-carabilă $G(r)$ cu $\mu(G(r)) = r$, astfel încît dacă $r < s$, atunci $\overline{G(r)} \subset G(s)$.

Pentru orice număr real $x \in [0,1]$ să punem

$$G(x) = \bigcup_{r \leqslant x} G(r).$$

Pentru $x = r$ diadic, avem $G(x) = G(r)$. Dacă $0 \leqslant x < x' \leqslant 1$, atunci există două numere diadice s şi s' cu $x < s < s' < x'$ şi deci

$$G(x) \subset G(s) \subset \overline{G(s)} \subset G(s') \subset G(x')$$

de unde

$$\overline{G(x)} \subset G(x').$$

Mulțimea $G(x)$ este deschisă, μ-carabilă şi

$$\mu(G(x)) = x.$$

Într-adevăr,

$$\mu(G(x)) = \mu\left(\bigcup_{r \leqslant x} G(r)\right) = \sup_{r \leqslant x} \mu(G(r)) = \sup_{r \leqslant x} r = x$$

Avem apoi

$$\overline{G(x)} \subset \bigcap_{s > x} G(s)$$

deci

$$\mu\left(\overline{G(x)}\right) \leqslant \mu\left(\bigcap_{s > x} G(s)\right) \leqslant \inf_{s > x} \mu(G(s)) = \inf_{s > x} s = x$$

deci

$$\mu(G(x)) = \mu\left(\overline{G(x)}\right) = x$$

şi deci $G(x)$ este carabilă.

Pentru fiecare punct $t \in T$ să definim

$$\alpha(t) = \inf_{t \in G(x)} x.$$

Să arătăm că funcţia α este continuă. Fie $t_0 \in T$ şi $\varepsilon > 0$. Să notăm $a = \alpha(t_0)$. Mulţimea $V = G(a + \varepsilon) - \overline{G(a - \varepsilon)}$ este o vecinătate a lui t_0, deoarece este deschisă şi $t_0 \in G(a + \varepsilon) - \overline{G(a - \varepsilon)}$. Aici am notat $G(a - \varepsilon) = G(0)$ dacă $a - \varepsilon \leqslant 0$ şi $G(a + \varepsilon) = G(1)$ dacă $a + \varepsilon \geqslant 1$.

Pentru orice $t \in G(a + \varepsilon) - \overline{G(a - \varepsilon)}$ avem $a - \varepsilon \leqslant \alpha(t) \leqslant a + \varepsilon$ deci $|\alpha(t) - \alpha(t_0)| \leqslant \varepsilon$ şi deci α este continuă în t_0. Cum t_0 a fost ales arbitrar în T, rezultă că α este continuă pe T.

Să arătăm că $\alpha(T) = [0, 1]$.

Fie $x \in [0, 1]$. Am văzut că dacă $t \in G(x + \varepsilon) - \overline{G(x - \varepsilon)}$, atunci $|\alpha(t) - x| < \varepsilon$. Dar

$$\bigcap_{\varepsilon > 0} [G(x + \varepsilon) - \overline{G(x - \varepsilon)}] \supset \bigcap_{\varepsilon > 0} [\overline{G(x + \varepsilon)} - G(x - \varepsilon)] \neq \emptyset$$

deoarece mulţimile $\overline{G(x + \varepsilon)} - G(x - \varepsilon)$ sînt închise şi intersecţiile finite de astfel de mulţimi sînt mulţimi de acelaşi fel, deci nevide.

Pentru $t \in \bigcap_{\varepsilon > 0} [G(t + \varepsilon) - \overline{G(t - \varepsilon)}]$ avem $|\alpha(t) - x| < \varepsilon$ oricare ar fi $\varepsilon > 0$, deci $\alpha(t) = x$.

Deoarece α este continuă şi T este compact, α este μ-proprie. Să arătăm că $\alpha(\mu)$ este măsură Lebesgue pe $[0,1]$. Să notăm $\nu = \alpha(\mu)$. Pentru orice mulţime ν-integrabil $A \subset [0, 1]$ avem

$$\nu(A) = \mu(\alpha^{-1}(A)).$$

În particular, pentru $A = [0, a] \subset [0, 1]$ avem

$$\nu([0, a]) = \mu(\alpha^{-1}([0, a])).$$

Dar

$$\overline{G(a)} \subset \alpha^{-1}([0, a]) \subset \bigcap_{x > a} G(x)$$

şi

$$\mu(\overline{G(a)}) = \mu(G(a)) = a$$

iar

$$\mu\left(\bigcap_{r > a} G(r)\right) = \inf_{r > a} \mu(G(r)) = \inf_{r > a} r = a$$

deci

$$\mu[\alpha^{-1}([0, a])) = a$$

de unde

$$\nu([0, a]) = a.$$

Urmează că ν este măsura Lebesgue pe $[0, 1]$ şi teorema este demonstrată.

§ 21. MĂSURI INDUSE

1. Definiția măsurilor induse

Fie $\mathbf{m}$ o măsură majorată pe T cu valori într-un spațiu Banach X și $S \subset T$ un subspațiu *local compact*.

Se pune problema definirii unei măsuri $\mathbf{m}_S$ pe S cu ajutorul măsurii $\mathbf{m}$ de pe T, care să fie, într-un anumit sens, *restricția* măsurii $\mathbf{m}$ la S. Este natural să impunem măsurii $\mathbf{m}_S$ să fie aleasă în așa fel încît funcțiile f definite pe S, integrabile în raport cu $\mathbf{m}_S$ să fie acelea care sînt restricții de funcții definite pe T și integrabile în raport cu $\mathbf{m}$, sau, ceea ce revine la același lucru, acelea care prelungite cu 0 pe $\complement S$ să fie integrabile în raport cu $\mathbf{m}$. În particular, această condiție trebuie impusă funcțiilor continue cu suport compact definite pe S. Pentru aceste funcții, condiția este verificată de la sine.

Pentru fiecare funcție $\mathbf{f}$ definită pe S, cu valori într-un spațiu Banach E sau în $\overline{R}$, notăm cu $\mathbf{f}'$ funcția definită pe T astfel:

$$\mathbf{f}'(t) = \begin{cases} \mathbf{f}(t), & \text{dacă } t \in S, \\ 0, & \text{dacă } t \notin S. \end{cases}$$

Restricția funcției $\mathbf{f}'$ la S este egală cu $\mathbf{f}$.

Se verifică ușor următoarele relații:

1) $(\mathbf{f}+\mathbf{g})' = \mathbf{f}' + \mathbf{g}'$, $(\alpha\mathbf{f})' = \alpha\mathbf{f}'$, α scalar;
2) $|\mathbf{f}|' = |\mathbf{f}'|$;
3) dacă $f \geqslant 0$, atunci $f' \geqslant 0$; $f \leqslant g$ dacă și numai dacă $f' \leqslant g'$;
4) $\|\mathbf{f}'\| = \|\mathbf{f}\|$.

Propoziția 1. *Fie E un spațiu Banach. Dacă $\mathbf{f} \in \mathcal{X}_E(S)$, funcția $\mathbf{f}'$ este integrabilă pentru orice măsură pe T.*

Să notăm cu $K \subset S$ suportul lui $\mathbf{f}$; K este un subspațiu compact al lui S, deci este și un subspațiu compact al lui T. Așadar $\mathbf{f}'$ are tot suportul compact K; din egalitatea $\|\mathbf{f}'\| = \|\mathbf{f}\|$ deducem că $\mathbf{f}'$ este mărginită. Rămîne de arătat că $\mathbf{f}'$ este măsurabilă pentru orice măsură pe T.

Orice mulțime compactă $H \subset T$ este reuniunea mulțimilor disjuncte $H \cap K$ și $H - K$. Restricția lui $\mathbf{f}'$ la $H \cap K$ este egală cu restricția lui $\mathbf{f}$ la $H \cap K$ deci este continuă, restricția lui $\mathbf{f}'$ la $H - K$ este identic nulă, deci este continuă. Cum $H \cap K$ este compactă iar $H - K$ este diferența a două mulțimi compacte, mulțimile $H \cap K$ și $H - K$ sînt integrabile în raport cu orice măsură, deci funcția $\mathbf{f}'$ este măsurabilă în raport cu orice măsură. Deoarece pentru orice măsură $\mu \geqslant 0$ pe T avem

$$\int^* |\mathbf{f}'| \, d\mu = \int^* |\mathbf{f}'| \, \varphi_K \, d\mu \leqslant \|\mathbf{f}'\| \, \mu(K) < +\infty$$

rezultă că $\mathbf{f}'$ este integrabilă în raport cu orice măsură, și cu aceasta propoziția este demonstrată.

Pentru fiecare funcţie $f \in \mathcal{K}(S)$ să punem

$$\mathbf{n}(f) = \int f' \, \mathrm{d}\mathbf{m}$$

şi

$$\nu(f) = \int f' \, \mathrm{d}|\mathbf{m}|.$$

Se verifică uşor că ν este o funcţională liniară pozitivă pe $\mathcal{K}(S)$ deci ν este o *măsură pozitivă* pe S. Se verifică, de asemenea, că aplicaţia $\mathbf{n} : \mathcal{K}(S) \to X$ este liniară şi majorată de ν :

$$|\mathbf{n}(f)| = \left|\int f' \, \mathrm{d}\mathbf{m}\right| \leqslant \int |f'| \, \mathrm{d}|\mathbf{m}| = \int |f|' \, \mathrm{d}|\mathbf{m}| = \nu(|f|),$$

deci $\mathbf{n}$ este o măsură majorată pe S cu valori în X şi $|\mathbf{n}| \leqslant \nu$.

Definiţia 1. *Măsura* $\mathbf{n}$ *definită pe* S *se numeşte restricţia măsurii* $\mathbf{m}$ *la subspaţiul local compact* S, *sau măsura indusă de* $\mathbf{m}$ *pe* S, *şi se notează* $\mathbf{m}_S$:

$$\mathbf{m}_S(f) = \int f' \, \mathrm{d}\mathbf{m}, \qquad f \in \mathcal{K}(S).$$

Conform acestei definiţii, ν este restricţia la S a măsurii $|\mathbf{m}|$ deci $\nu = |\mathbf{m}|_S$:

$$|\mathbf{m}|_S(f) = \int f' \, \mathrm{d}|\mathbf{m}|, \qquad f \in \mathcal{K}(S).$$

Inegalitatea $|\mathbf{n}| \leqslant \nu$ se scrie acum

$$|\mathbf{m}_S| \leqslant |\mathbf{m}|_S.$$

Vom arăta mai departe că avem totdeauna

$$|\mathbf{m}_S| = |\mathbf{m}|_S$$

Observaţii. 1° Subspaţiul local compact $S \subset T$ este intersecţia unei mulţimi deschise cu o mulţime închisă din T, deci S este o mulţime măsurabilă în raport cu orice măsură pe T.

2° Dacă G este o submulţime *deschisă* a lui T, G este un subspaţiu local compact al lui T.

Pentru orice funcţie continuă cu suport compact $f : G \to R$ funcţia $f' : T \to R$ este continuă pe T şi are acelaşi suport compact ca şi f. Spaţiul $\mathcal{K}(G)$ se poate deci identifica cu subspaţiul $\mathcal{K}(T, G)$ al lui $\mathcal{K}(T)$. În acest caz măsura $\mathbf{m}_G$ pe G este restricţia măsurii $\mathbf{m}$ de la $\mathcal{K}(T)$ la subspaţiul $\mathcal{K}(T, G)$.

3° Conform convenţiilor făcute, vom nota cu $\int_S f \, \mathrm{d}\mathbf{m}$ integrala $\int f' \, \mathrm{d}\mathbf{m} = \int f' \varphi_S \, \mathrm{d}\mathbf{m}$. În acest caz,

$$\int f \, \mathrm{d}\mathbf{m}_S = \int_S f \, \mathrm{d}\mathbf{m}.$$

Vom nota de asemenea $\int_S^* f\,d\mu$ integrala superioară $\int^* f'\,d\mu = \int^* f'\,\varphi_S\,d\mu$ a unei funcții $f \geqslant 0$ definită pe S, în raport cu o măsură $\mu \geqslant 0$.

Vom arăta că pentru orice funcție $f \geqslant 0$ definită pe S și orice măsură $\mu \geqslant 0$ avem egalitatea

$$\int^* f\,d\mu_S = \int_S^* f\,d\mu$$

4° Măsura indusă $\mathbf{m}_S$ are valori în același spațiu X ca și măsura $\mathbf{m}$.

De exemplu, dacă μ este pozitivă, μ_S este pozitivă, iar dacă μ este reală sau complexă, atunci μ_S este reală respectiv complexă.

Este însă posibil, de exemplu, ca μ să fie reală fără a fi pozitivă iar μ_S să fie pozitivă (de exemplu dacă S este astfel încît $\mu_+ = \varphi_S\,\mu$).

2. Integrala superioară în raport cu o măsură indusă pozitivă

Fie μ o măsură pozitivă pe T și $S \subset T$ un subspațiu local compact.

Lema 1. *Dacă $f \geqslant 0$ este o funcție semicontinuă inferior pe S, atunci funcția f' este μ-măsurabilă și*

$$\int^* f\,d\mu_S = \int^* f'\,d\mu.$$

Fie $(g_\alpha)_{\alpha\in A}$ familia filtrantă a tuturor funcțiilor $g \in \mathcal{K}(S)$ care verifică relația $0 \leqslant g \leqslant f$.

Atunci $f' = \sup_{\alpha\in A} g'_\alpha$, funcțiile g'_α sînt μ-măsurabile (propoziția 1) iar funcția $t \to (g'_\alpha(t))_{\alpha\in A}$ a lui T în $\bar{R}^A$ este μ-măsurabilă.

Într-adevăr, fie $K \subset T$ o mulțime compactă și $\varepsilon > 0$. Mulțimile $K \cap S$ și $K - S$ sînt boreliene și relativ compacte, deci sînt μ-integrabile. Există o mulțime compactă $K_1 \subset K \cap S$ și o mulțime compactă $K_2 \subset K - S$ astfel încît $\mu((K \cap S) - K_1) < \frac{\varepsilon}{2}$ și $\mu((K - S) - K_2) < \frac{\varepsilon}{2}$. Atunci $\mu(K - (K_1 \cup K_2)) < \varepsilon$. Restricția fiecărei funcții g'_α la K_1 este egală cu restricția lui g_α la K_1 (deoarece $K_1 \subset K$) deci este continuă; restricția lui g'_α la K_2 este identic nulă (deoarece $K_2 \cap S = \varnothing$) deci este continuă. Deoarece K_1 și K_2 sînt două mulțimi compacte disjuncte, restricția fiecărei funcții g'_α la $K_1 \cup K_2$ este continuă. Urmează că și restricția funcției $(g'_\alpha)_{\alpha\in A}$ la $K_1 \cup K_2$ este continuă, deci funcția $(g'_\alpha)_{\alpha\in A}$ este μ-măsurabilă.

Conform propoziției 1, § 16, f' este μ-măsurabilă și

$$\int^* f'\,d\mu = \sup_{\alpha\in A} \int g'_\alpha\,d\mu.$$

Dar

$$\int g'_\alpha\,d\mu = \int g_\alpha\,d\mu_S \quad \text{și} \quad \sup_{\alpha\in A} \int g_\alpha\,d\mu_S = \int^* f\,d\mu_S$$

deci

$$\int^* f \mathrm{d}\mu_S = \int^* f' \,\mathrm{d}\mu.$$

Lema 2. *Pentru orice funcţie $f \geqslant 0$ cu suport compact definită pe S avem*

$$\int^* f \,\mathrm{d}\,\mu_S = \int^* f' \,\mathrm{d}\,\mu.$$

Fie $h \geqslant 0$ o funcţie semicontinuă inferior pe S cu $h \geqslant f$. Din lema 1 deducem

$$\int^* h \,\mathrm{d}\,\mu_S = \int^* h' \mathrm{d}\,\mu \geqslant \int^* f' \mathrm{d}\,\mu.$$

Luînd marginea inferioară pentru toate funcţiile $h \geqslant f$ din $\mathcal{J}_+(S)$, obţinem

$$\int^* f \,\mathrm{d}\,\mu_S \geqslant \int^* f' \,\mathrm{d}\,\mu.$$

Pentru a demonstra inegalitatea contrară fie h_1 o funcţie semicontinuă inferior definită pe T astfel încît $h_1 \geqslant f'$. Restricţia h a lui h_1 la S este semicontinuă inferior pe S şi avem $h \geqslant f$, $h' \geqslant f'$ şi $h_1 \geqslant h'$. Ţinînd seama de lema 1, deducem

$$\int^* f \,\mathrm{d}\,\mu_S \leqslant \int^* h \,\mathrm{d}\,\mu_S = \int^* h' \,\mathrm{d}\,\mu \leqslant \int^* h_1 \,d\,\mu.$$

Luînd în dreapta marginea inferioară pentru toate funcţiile $h_1 \geqslant f'$ din $\mathcal{J}_+(T)$ şi ţinînd seama de faptul că f' este cu suport compact, obţinem

$$\int^* f \,\mathrm{d}\,\mu_S \leqslant \int^* f' \mathrm{d}\,\mu.$$

Din cele două inegalităţi de sens contrar rezultă egalitatea dorită.

Propoziţia 2. *Pentru orice funcţie $f \geqslant 0$ definită pe S avem*

$$\int^* f \,\mathrm{d}\,\mu_S = \int^* f' \,\mathrm{d}\,\mu.$$

După lema 2, pentru orice mulţime compactă $K \subset S$ avem

$$\int^* f \varphi_K \,\mathrm{d}\,\mu_S = \int^* f' \varphi_K \,\mathrm{d}\,\mu \leqslant \int^* f' \,\mathrm{d}\,\mu,$$

unde am notat cu φ_K funcţia caracteristică a lui K fie considerată în S fie în T. Luînd marginea superioară pentru toate mulţimile compacte, obţinem

$$\int^* f \mathrm{d}\mu_S \leqslant \int^* f' \mathrm{d}\mu.$$

Pentru a demonstra inegalitatea contrară, fie $K' \subset T$ o mulțime compactă. Atunci $K' \cap S$ este μ-măsurabilă și relativ compactă, deci este μ-integrabilă. Există o mulțime μ-neglijabilă $N \subset K' \cap S$ și un șir crescător (K_n) de mulțimi compacte a căror reuniune să fie $(K' \cap S) - N$. Deoarece

$$f'\varphi_{K'} = f'\varphi_{K' \cap S}$$

deducem

$$\int^* f'\varphi_{K'}\,d\mu = \int^* f'\varphi_{K' \cap S}\,d\mu = \int^* f'\varphi_{(K' \cap S)-N}\,d\mu =$$

$$= \sup_n \int^* f'\varphi_{K_n} d\mu = \sup_n \int^* f\varphi_{K_n} d\mu_S \leqslant \int^* f\,d\mu_S.$$

Luînd marginea superioară pentru toate mulțimile compacte $K' \subset T$ obținem

$$\int^* f'\,d\mu \leqslant \int^* f\,d\mu_S$$

și propoziția este demonstrată,

Corolar. *Pentru orice mulțime $A \subset S$ avem*

$$\mu_S^*(A) = \mu^*(A).$$

3. Integrarea în raport cu restricția unei măsuri pozitive

Fie μ o măsură pozitivă pe T și $S \subset T$ un subspațiu local compact.

Propoziția 3. *O funcție f definită pe S cu valori într-un spațiu Banach E sau în $\overline{R}$, este μ_S-neglijabilă, dacă și numai dacă f' este μ-neglijabilă.*

Într-adevăr

$$\int^* |f|\,d\mu_S = \int^* |f|'\,d\mu = \int^* |f'|\,d\mu.$$

Corolar. *O mulțime $A \subset S$ este μ-neglijabilă dacă și numai dacă $A \subset T$ este μ-neglijabilă.*

Propoziția 4. *Fie G un spațiu topologic. O funcție $f : S \to G$ este μ_S-măsurabilă, dacă și numai dacă o prelungire f' a lui f la T, constantă pe $\complement S$, este μ-măsurabilă.*

Să presupunem mai întîi că f este μ_S-măsurabilă. Fie $K \subset T$ o mulțime compactă. Mulțimile $K \cap S$ și $K - S$ sînt boreliene relativ compacte, deci μ-integrabile.

Deoarece f este μ_S-măsurabilă, există o mulțime μ_S-neglijabilă $N \subset K \cap S$ și un șir (K_n) de mulțimi compacte disjuncte două cîte două, a căror reuniune este $(K \cap S) - N$, astfel încît restricția lui f la fiecare K_n să fie continuă. Restricția lui f' la mulțimea μ-integrabilă $K_0 = K - S$ este constantă, deci continuă. Cum mulțimea N este de asemenea μ-neglijabilă, rezultă că am descompus mulțimea compactă $K \subset T$ într-o mulțime μ-neglijabilă $N \subset K$ și a unui șir $(K_n)_{0 \leqslant n < +\infty}$ de mulțimi μ-integrabile, astfel încît restricția lui f' la fiecare K_n să fie continuă.

Reciproc, dacă f' este μ-măsurabilă, fiecare mulțime compactă $K \subset S$ este reuniunea unei mulțimi μ-neglijabile $N \subset K$, și a unui șir (K_n) de mulțimi compacte disjuncte două cîte două, astfel încît restricția lui f' la fiecare K_n să fie continuă.

Dar N este de asemenea μ_S-neglijabilă, iar restricția lui f la K_n egală cu restricția lui f'_n la K_n, este continuă. Urmează că f este μ_S-măsurabilă.

Corolar. *O mulțime $A \subset S$ este μ_S-măsurabilă dacă și numai dacă $A \subset T$ este μ măsurabilă.*

Teorema 1. *O funcție* f *definită pe S cu valori într-un spațiu Banach E sau în $\overline{R}$ este μ_S-integrabilă, dacă și numai dacă funcția* f′ *este μ-integrabilă. În acest caz avem*

$$\int \mathrm{f}\, \mathrm{d}\mu_S = \int \mathrm{f}'\, \mathrm{d}\mu$$

Funcția f este μ_S-măsurabilă dacă și numai dacă funcția f′ este μ-măsurabilă. Din egalitatea

$$\int^* |\mathrm{f}|\, \mathrm{d}\mu_S = \int^* |\mathrm{f}'|\, \mathrm{d}\mu$$

rezultă că $\int^* |\mathrm{f}|\, \mathrm{d}\mu_S < +\infty$ dacă și numai dacă $\int^* |\mathrm{f}'|\, \mathrm{d}\mu < +\infty$. Urmează că f este μ_S-integrabilă dacă și numai dacă f′ este μ-integrabilă.

Să presupunem acum că f este μ_S-integrabilă. Există un șir (f_n) de funcții care sînt combinații liniare finite de forma $\sum_i \varphi_i x_i$ cu $\varphi_i \in \mathcal{K}(S)$ și $x_i \in E$ (sau $x_i \in R$) astfel încît să avem

$$\lim_{n\to\infty} \int |\mathrm{f} - \mathrm{f}_n|\, \mathrm{d}\mu_S = 0.$$

Atunci

$$\left| \int \mathrm{f}\, \mathrm{d}\mu_S - \int \mathrm{f}_n\, \mathrm{d}\mu_S \right| = \left| \int (\mathrm{f} - \mathrm{f}_n)\, \mathrm{d}\mu_S \right| \leqslant \int |\mathrm{f} - \mathrm{f}_n|\, \mathrm{d}\mu_S$$

deci

$$\lim_{n\to\infty} \int \mathrm{f}_n \mathrm{d}\mu_S = \int \mathrm{f}\, \mathrm{d}\, {}_S.$$

Avem apoi

$$\left| \int \mathrm{f}'\mathrm{d}\mu - \int \mathrm{f}'_n \mathrm{d}\mu \right| = \left| \int (\mathrm{f}' - \mathrm{f}'_n)\, \mathrm{d}\mu \right| \leqslant \int |\mathrm{f}' - \mathrm{f}'_n|\, \mathrm{d}\mu = \int |\mathrm{f} - \mathrm{f}_n|\, \mathrm{d}\mu_S$$

de unde

$$\lim_{n\to\infty} \int \mathrm{f}'_n\, \mathrm{d}\mu = \int \mathrm{f}'\, \mathrm{d}\mu.$$

Pentru $\varphi \in \mathcal{K}(S)$ şi $x \in E$ avem

$$\int \varphi x \, d\mu_S = x \int \varphi \, d\mu_S = x \int \varphi' \, d\mu = \int \varphi' x \, d\mu = \int (\varphi x)' d\mu$$

şi egalitatea se menţine şi pentru o sumă finită de funcţii de forma φx, deci pentru fiecare funcţie $\mathbf{f}_n$ avem

$$\int \mathbf{f}_n \, d\mu_S = \int \mathbf{f}_n' \, d\mu.$$

Trecînd la limită, obţinem

$$\int \mathbf{f} \, d\mu_S = \int \mathbf{f}' \, d\mu$$

şi teorema este demonstrată.

Corolar. *O mulţime $A \subset S$ este μ_S-integrabilă dacă şi numai dacă $A \subset T$ este μ-integrabilă. În acest caz avem*

$$\mu_S(A) = \mu(A).$$

4. Proprietăţile măsurilor induse pozitive

Fie μ o măsură pozitivă pe T şi $S \subset T$ un subspaţiu local compact.

Propoziţia 5. *Aplicaţia canonică $j : S \to T$ (definită prin egalitatea $j(t) = t$ pentru $t \in S$) este μ_S-proprie şi*

$$j(\mu_S) = \varphi_S \mu$$

Într-adevăr, j este continuă deci μ_S-măsurabilă. Fie $f \in \mathcal{K}(T)$. Funcţia $f \circ j$ este restricţia lui f la S, deci $(f \circ j)' = f\varphi_S$. Funcţia $f\varphi_S$ este μ-integrabilă, adică funcţia $(f \circ j)'$ este μ-integrabilă, deci (teorema 1) $f \circ j$ este μ_S-integrabilă.

Aceasta înseamnă că j este μ_S-proprie.

Pentru $f \in \mathcal{K}(T)$ avem

$$\int f d(\varphi_S \mu) = \int f\varphi_S \, d\mu = \int (f \circ j)' \, d\mu = \int f \circ j \, d\mu_S = \int f \, d\, j(\mu_S)$$

deci

$$\varphi_S \mu = j(\mu_S).$$

Corolar. *Fie T' un spaţiu local compact, $\alpha : T \to T'$ o funcţie μ-proprie şi $\alpha_S : S \to T'$ restricţia lui α la S. Funcţia α_S este μ_S-proprie şi avem*

$$\alpha_S(\mu_S) = \alpha(\varphi_S \cdot \mu).$$

Într-adevăr, avem $\alpha_S = \alpha \circ j$. Deoarece $j : S \to T$ este μ_S-proprie şi $\alpha : T \to T'$ este $j(\mu_S) = \varphi_S \mu$-proprie, rezultă că $\alpha \circ j = \alpha_S : S \to T'$ este μ_S-proprie (propoziţia 12, § 20) şi

$$\alpha_S(\mu_S) = (\alpha \circ j)(\mu_S) = \alpha(j(\mu_S)) = \alpha(\varphi_S \mu).$$

Propoziția 6. *Dacă R este un subspațiu local compact al lui T astfel încît $R \subset S$, atunci restricția lui μ la R este egală cu restricția lui μ_S la R:*

$$\mu_R = (\mu_S)_R.$$

Fie $f \in \mathcal{K}(R)$ și f' prelungirea lui f la S astfel încît $f'(t) = 0$ pentru $t \in S - R$. Avem

$$\int f \, \mathrm{d}(\mu_S)_R = \int f' \, \mathrm{d}\mu_S.$$

Deoarece f' este μ_S-integrabilă, prelungirea f'' a lui f' la T astfel încît $f''(t) = 0$ pentru $t \in T - S$ este μ-integrabilă și

$$\int f' \, \mathrm{d}\mu_S = \int f'' \, \mathrm{d}\mu.$$

Dar f'' este de asemenea prelungirea lui f la T astfel încît $f''(t) = 0$ pentru $t \in T - R$, deci

$$\int f \, \mathrm{d}\mu_R = \int f'' \mathrm{d}\mu.$$

Din cele trei egalități rezultă

$$\int f \, \mathrm{d}\mu_R = \int f \, \mathrm{d}(\mu_S)_R$$

adică

$$\mu_R = (\mu_S)_R.$$

Propoziția 7. *Dacă $g \geqslant 0$ este o funcție local μ-integrabilă definită pe T și g_S este restricția lui g la S, atunci funcția g_S este local μ_S-integrabilă și*

$$g_S \cdot \mu_S = (g\mu)_S.$$

Fie $f \in \mathcal{K}(S)$. Funcția f' este integrabilă pentru orice măsură pe T, în particular pentru măsura $g\mu$ și avem

$$\int f \mathrm{d}(g\mu)_S = \int f' \, \mathrm{d}(g\mu).$$

Atunci funcția $f'g$ este μ-integrabilă și avem

$$\int f' \, \mathrm{d}(g\mu) = \int f' g \, \mathrm{d}\mu.$$

Dar $f'g = f'g\varphi_S$ și $g\varphi_S = (g_S)'$, deci $f'g = f'(g_S)' = (fg_S)'$. Așadar $(fg_S)'$ este μ-integrabilă. Urmează că fg_S este μ_S-integrabilă și

$$\int (fg_S) \mathrm{d}\mu_S = \int (fg_S)' \mathrm{d}\mu_S = \int f' g \, \mathrm{d}\mu.$$

Rezultă că g_S este local μ_S -integrabilă și

$$\int f\mathrm{d}(g_S\,\mu_S) = \int fg_S\,\mathrm{d}\mu_S .$$

Din egalitățile de mai sus deducem succesiv

$$\int f\mathrm{d}(g_S\mu_S) = \int fg_S\,d\mu_S = \int f'g\,\mathrm{d}\mu = \int f'\mathrm{d}(g\mu) = \int f\mathrm{d}(g\mu)_S$$

deci

$$g_S\mu_S = (g\mu)_S .$$

Corolar. *Avem* $\mu_S = (\varphi_S\mu)_S$.

Într-adevăr, luăm, în propoziția 7, $g = \varphi_S$ și atunci $g_S = \varphi_S$ iar $g_S\mu_S = \varphi_S\mu_S = \mu_S$.

Propoziția 8. *O măsură pozitivă* λ *pe* S *este restricția unei măsuri pozitive pe* T, *dacă și numai dacă mulțimea* $K \cap S$ *este* λ *-integrabilă, oricare ar fi mulțimea compactă* $K \subset T$.

Dacă există o măsură $\nu \geqslant 0$ pe T astfel încît $\lambda = \nu_S$, atunci pentru orice mulțime compactă $K \subset T$ mulțimea $K \cap S$ este boreliană relativ compactă în T, deci ν-integrabilă și deci $K \cap S$ este $\nu_S = \lambda$ -integrabilă.

Reciproc, să presupunem că pentru orice mulțime compactă $K \subset T$, mulțimea $K \cap S$ este λ -integrabilă. Atunci aplicația canonică $j : S \to T$ este λ-proprie (deoarece $(j^{-1}(K) = K \cap S)$.

Atunci λ este restricția măsurii $\nu = j(\lambda)$ de pe T. Într-adevăr, fie $f \in \mathcal{K}(S)$ Funcția f' este $\nu = j(\lambda)$ -integrabilă și $f' \circ j = f$, deci

$$\int f'\mathrm{d}\nu = \int f'\mathrm{d}j(\lambda) = \int f' \circ j\mathrm{d}\lambda = \int f\mathrm{d}\lambda .$$

Aceasta înseamnă că $\lambda = \nu_S$.

Corolarul 1. *Orice măsură mărginită* $\lambda \geqslant 0$ *pe* S *este restricția unei măsuri pozitive pe* T.

Într-adevăr, pentru orice mulțime compactă $K \subset T$, mulțimea $K \cap S$ este închisă în S, deci este boreliană în S. Deoarece λ este mărginită, $K \cap S$ este λ-integrabilă. Din propoziția 8 rezultă că λ este restricția unei măsuri pe T.

Corolarul 2. *Dacă* S *este o mulțime închisă în* T, *orice măsură* $\lambda \geqslant 0$ *pe* S *este restricția unei măsuri pozitive pe* T.

Într-adevăr, pentru orice mulțime compactă $K \subset T$, mulțimea $K \cap S$ este închisă în T deci compactă, deci λ-integrabilă. Se aplică apoi propoziția 8.

Propoziția 9. *Dacă măsura* μ *este concentrată pe o mulțime* $M \subset T$, *atunci măsura indusă* μ_S *este concentrată pe* $M \cap S$.

Într-adevăr, $S - M = S \cap \mathbf{C}M$ deci

$$\mu^*(S - M) = \mu_S^*(S \cap \mathbf{C}M) = \mu^*(\mathbf{C}M) = 0$$

deci μ_S este concentrată pe $S - (S - M) = S \cap M$.

Propoziția 10. *Măsura μ_S este nulă dacă și numai dacă S este μ-neglijabilă.*

Într-adevăr,

$$\mu_S^*(S) = \mu^*(S).$$

Corolar. *Dacă $S(\mu)$ este suportul lui μ și $S(\mu_S)$ este suportul lui μ_S, avem*

$$S(\mu_S) \subset S \cap S(\mu).$$

Într-adevăr, μ este concentrată pe mulțimea închisă $S(\mu)$, deci μ_S este concentrată pe mulțimea $S \cap S(\mu)$ care este închisă în S, iar $S(\mu_S)$ este cea mai mică mulțime închisă în S pe care este concentrată μ_S.

Observație. Incluziunea $S(\mu_S) \subset S \cap S(\mu)$ poate fi strictă. De exemplu, dacă $\mu \neq 0$ este difuză și $S = \{a\}$, atunci $\mu_S = 0$, deci are suportul vid.

5. Integrarea în raport cu restricția unei măsuri majorate

Fie $\mathbf{m}$ o măsură majorată pe T cu valori într-un spațiu Banach X și $S \subset T$ un subspațiu local compact.

Lema 3. *Fie funcția reală $f: T \to R$. Dacă funcția $f\varphi_S$ este $\mathbf{m}$-integrabilă, atunci restricția f_S a lui f la S este $|\mathbf{m}_S|$-integrabilă și*

$$\int f_S \, d\mathbf{m}_S = \int f\varphi_S \, d\mathbf{m}.$$

Dacă $f\varphi_S$ este $\mathbf{m}$-integrabilă, adică $|\mathbf{m}|$-integrabilă, atunci f_S este $|\mathbf{m}|_S$-integrabilă (teorema 1) deoarece $(f_S)' = f\varphi_S$. Din inegalitatea $|\mathbf{m}_S| \leqslant |\mathbf{m}|_S$, rezultă că f_S este $|\mathbf{m}_S|$-integrabilă, adică $\mathbf{m}_S$-integrabilă.

Fie (f_n) un șir de funcții din $\mathcal{X}(S)$ astfel încît

$$\lim_{n\to\infty} \int |f_n - f_S| \, d|\mathbf{m}|_S = 0.$$

Atunci

$$\left|\int f_n d\mathbf{m}_S - \int f_S \, d\mathbf{m}_S\right| = \left|\int (f_n - f_S) \, d\mathbf{m}_S\right| \leqslant \int |f_n - f_S| \, d|\mathbf{m}_S| \leqslant \int |f_n - f_S| \, d|\mathbf{m}|_S$$

deci

$$\lim_{n\to\infty} \int f_n \, d\mathbf{m}_S = \int f_S \, d\mathbf{m}_S.$$

De asemenea

$$\left|\int f_n' \, d\mathbf{m} - \int f\varphi_S \, d\mathbf{m}\right| = \left|\int (f_n' - f\varphi_S) \, d\mathbf{m}\right| \leqslant$$

$$\leqslant \int |f_n' - f_S'| \, d|\mathbf{m}| = \int |f_n - f_S|' \, d|\mathbf{m}| \leqslant \int |f_n - f_S| \, d|\mathbf{m}|_S$$

deci

$$\lim_{n\to\infty}\int f_n \,\mathrm{dm} = \int f\varphi_S \,\mathrm{dm}.$$

Pentru funcţiile f_n avem

$$\int f_n \,\mathrm{dm}_S = \int f_n \,\mathrm{dm}.$$

Trecînd la limită obţinem

$$\int f_S \,\mathrm{dm}_S = \int f\varphi_S \,\mathrm{dm}$$

Teorema 2. *Pentru orice măsură majorată* $\mathbf{m}$ *pe* T *cu valori în* X *avem*

$$|\mathbf{m}_S| = |\mathbf{m}|_S .$$

Inegalitatea $|\mathbf{m}_S| \leqslant |\mathbf{m}|_S$ a fost deja demonstrată. Pentru a demonstra inegalitatea contrară, fie $K \subset T$ o mulţime compactă. Mulţimea $K \cap S$ este boreliană relativ compactă, deci este $|\mathbf{m}|$-integrabilă, şi deci (corolarul teoremei 1), $K \cap S$ este de asemenea $|\mathbf{m}|_S$ -integrabilă şi cu atît mai mult $|\mathbf{m}_S|$-integrabilă.

Din propoziţia 8 rezultă că măsura pozitivă $|\mathbf{m}_S|$ este restricţia unei măsuri pozitive ν pe T.

$$|\mathbf{m}_S| = \nu_S.$$

Din corolarul propoziţiei 7 deducem

$$|\mathbf{m}|_S = (\varphi_S |\mathbf{m}|)_S \quad \text{şi} \quad |\mathbf{m}_S| = \nu_S = (\varphi_S \nu)_S.$$

Din lema 3 deducem că pentru orice funcţie $f \in \mathcal{K}(T)$ avem

$$\int f_S \,\mathrm{dm}_S = \int f\varphi_S \,\mathrm{dm}.$$

Dar

$$\left|\int f_S \mathrm{dm}_S\right| \leqslant \int |f_S| \,\mathrm{d}|\mathbf{m}_S| = \int |f_S| \,\mathrm{d}\nu_S = \int |f_S| \,\mathrm{d}\nu = \int |f|\varphi_S \,\mathrm{d}\nu$$

şi deci

$$|\mathbf{m}(f)| = \left|\int f\varphi_S \,\mathrm{dm} + \int f\varphi_{T-S} \,\mathrm{dm}\right| \leqslant \left|\int f_S \,\mathrm{dm}_S\right| + \left|\int f\varphi_{T-S} \,\mathrm{dm}\right| \leqslant$$

$$\leqslant \int |f|\varphi_S \,\mathrm{d}\nu + \int |f| \varphi_{T-S} \,\mathrm{d}|\mathbf{m}| = \int |f| \,\mathrm{d}(\varphi_S \nu + \varphi_{T-S} |\mathbf{m}|)$$

Rezultă că măsura pozitivă $\varphi_S \nu + \varphi_{T-S} |\mathbf{m}|$ majorează pe $\mathbf{m}$, deci

$$|\mathbf{m}| \leqslant \varphi_S \nu + \varphi_{T-S} |\mathbf{m}| .$$

Urmează că $\varphi_S |\mathbf{m}| \leqslant \varphi_S \nu$ și deci (corolarul propoziției 7) $|\mathbf{m}|_S \leqslant \nu_S = |\mathbf{m}_S|$. Ținînd seama de inegalitatea contrară, deducem $|\mathbf{m}|_S = |\mathbf{m}|_S$.

Teorema 3. *Fie E și F două spații Banach astfel încît $X \subset \mathcal{L}(E, F)$ și funcția $\mathbf{f} : S \to E$.*

1) *Funcția $\mathbf{f}$ este $\mathbf{m}_S$-neglijabilă dacă și numai dacă $\mathbf{f}'$ este $\mathbf{m}$-neglijabilă.*

2) *Funcția $\mathbf{f}$ este $\mathbf{m}_S$-măsurabilă dacă și numai dacă $\mathbf{f}'$ este $\mathbf{m}$-măsurabilă.*

3) *Funcția $\mathbf{f}$ este $\mathbf{m}_S$-integrabilă dacă și numai dacă $\mathbf{f}'$ este $\mathbf{m}$-integrabilă. În acest caz avem*

$$\int \mathbf{f}\, d\mathbf{m}_S = \int \mathbf{f}' d\mathbf{m}.$$

Afirmațiile rezultă din egalitatea $|\mathbf{m}_S| = |\mathbf{m}|_S$ și din teorema 1.

Egalitatea $\int \mathbf{f}\, d\mathbf{m}_S = \int \mathbf{f}' d\mathbf{m}$ se demonstrează ca în lema 3, luînd un șir $(\mathbf{f}_n)$ format din combinații liniare finite de forma $\sum_n \varphi_i x_i$ cu $\varphi_i \in \mathcal{K}(S)$ și $x_i \in E$ și observînd că pentru funcțiile φx avem

$$\int \varphi x\, d\mathbf{m}_S = \left(\int \varphi d\mathbf{m}_S\right) x = \left(\int \varphi'\, d\mathbf{m}_S\right) x = \int \varphi' x\, d\mathbf{m} = \int (\varphi x)'\, d\mathbf{m}$$

deci și pentru funcțiile $\mathbf{f}_n$ rezultă

$$\int \mathbf{f}_n\, d\mathbf{m}_S = \int \mathbf{f}_n d\mathbf{m}.$$

Observație. Afirmația relativă la măsurabilitate rămîne valabilă pentru orice funcție definită pe S cu valori într-un spațiu topologic oarecare.

6. Proprietățile restricțiilor de măsuri majorate

Fie X un spațiu Banach, $\mathbf{m}$ o măsură majorată pe T cu valori în X și $S \subset T$ un subspațiu local compact.

Toate proprietățile restricțiilor de măsuri pozitive se mențin pentru restricția de măsuri majorate.

Propoziția 11. *Aplicația canonică $j : S \to T$ este $\mathbf{m}_S$-proprie și*

$$j(\mathbf{m}_S) = \varphi_S \mathbf{m}.$$

Într-adevăr, j este proprie pentru măsura pozitivă $|\mathbf{m}|_S = |\mathbf{m}_S|$ deci este proprie și pentru măsura $\mathbf{m}_S$ (propoziția 5). Pentru orice funcție $f \in \mathcal{K}(T)$ avem

$$\int f d(\varphi_S \mathbf{m}) = \int f \varphi_S\, d\mathbf{m} = \int (f \circ j)\, d\mathbf{m}_S = \int f\, dj(\mathbf{m}_S)$$

deci

$$j(\mathbf{m}_S) = \varphi_S \mathbf{m}.$$

Corolar. *Fie T' un spațiu local compact, $\alpha : T \to T'$ o funcție* **m***-proprie și $\alpha_S : S \to T'$ restricția lui α la S. Funcția α_S este* $\mathbf{m}_S$*-proprie și*

$$\alpha_S(\mathbf{m}_S) = \alpha(\varphi_S \mathbf{m}).$$

Într-adevăr, α este $|\mathbf{m}|$-proprie deci (corolarul propoziției 5), α_S este $|\mathbf{m}|_S = |\mathbf{m}_S|$-proprie, adică $\mathbf{m}_S$-proprie.

Egalitatea $\alpha_S(\mathbf{m}_S) = \alpha(\varphi_S \mathbf{m})$ se demonstrează ca și cea asemănătoare din corolarul propoziției 5.

Propoziția 12. *Dacă R și S sînt două subspații local compacte ale lui T astfel încît $R \subset S$, atunci*

$$\mathbf{m}_R = (\mathbf{m}_S)_R.$$

Demonstrația este aceeași ca a propoziției 6.

Propoziția 13. *Fie E și F două spații Banach astfel încît $X \subset \mathcal{L}(E, F)$. Dacă $\mathbf{g} : T \to E$ este (simplu) local* **m***-integrabilă, atunci restricția $\mathbf{g}_S : S \to E$ este (simplu) local $\mathbf{m}_S$-integrabilă și*

$$\mathbf{g}_S \mathbf{m}_S = (\mathbf{g}\mathbf{m})_S.$$

Demonstrația este aceeași ca a propoziției 7, luînd $f \in \mathcal{K}(S)$ dacă $\mathbf{g}$ este local **m**-integrabilă, sau $\mathbf{f} \in \mathcal{K}_E(S)$ dacă $\mathbf{g}$ este simplu local **m**-integrabilă și ținînd seama de egalitatea $|\mathbf{m}_S| = |\mathbf{m}|_S$.

Corolar. $\mathbf{m}_S = (\varphi_S \mathbf{m})_S$.

Propoziția 14. *O măsură majorată* **n** *pe S cu valori în X este restricția unei măsuri pe T, dacă și numai dacă, mulțimea $K \cap S$, este* **n***-integrabilă, oricare ar fi mulțimea compactă $K \subset T$.*

Demonstrația este aceeași ca a propoziției 8.

În particular, propoziția este adevărată dacă măsura **n** este mărginită sau dacă S este un subspațiu închis al lui T.

§ 22. PRODUS DE MĂSURI

1. Definiția măsurilor pe un spațiu produs

Fie T și S două spații local compacte. Spațiul produs $T \times S$ este de asemenea local compact.

Dîndu-se o măsură **m** pe T și o măsură **n** pe S, se pune problema definirii în mod natural a unei măsuri pe spațiul produs $T \times S$ cu ajutorul măsurilor **m** și **n**.

Vom demonstra mai întîi cîteva leme.

Lema 1. *Fie U o mulțime deschisă relativ compactă în T, V o mulțime deschisă relativ compactă în S și E un spațiu Banach.*

Orice funcție $\mathbf{f} \in \mathcal{K}_E(T \times S, U \times V)$ poate fi aproximată uniform pe $T \times S$ prin sume finite de forma $\sum_{i,j} \varphi_i(t)\psi_j(s)$ cu $a_{ij} \in E$, $\varphi \in \mathcal{K}_+(T, U)$ și $\psi_j \in \mathcal{K}_+(S, V)$.

Să notăm cu K (respectiv L) proiecția suportului lui $\mathbf{f}$ pe T (respectiv S). Avem $K \subset U$ și $L \subset V$.

Funcția $\mathbf{f}$ este continuă pe mulțimea compactă $U \times V$, deci este uniform continuă pe această mulțime. Fie $\varepsilon > 0$. Există o acoperire $(A_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ a lui K formată din mulțimi deschise conținute în U și o acoperire $(B_j)_{1 \leqslant j \leqslant m}$ a lui L formată din mulțimi deschise, conținute în V, astfel încît oscilația funcției $\mathbf{f}$ pe fiecare mulțime $A_i \times B_j$ să fie $< \varepsilon$. Fie $(\varphi_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ (respectiv $(\psi_j)_{1 \leqslant j \leqslant m}$) o partiție continuă a unității subordonată acoperirii (A_i) a lui K (respectiv subordonată acoperirii (B_j) a lui L).

Pentru fiecare i funcția $\varphi_i : T \to [0,1]$ are suportul conținut în A_i, pentru fiecare j funcția $\psi_j : S \to [0,1]$ are suportul conținut în B_j și

$$\sum_{i=1}^{n} \varphi_i(t) = 1 \text{ pentru } t \in K \text{ și } \sum_{j=1}^{m} \psi_j(s) = 1 \text{ pentru } s \in L.$$

Avem deci

$$\sum_{i,j} \varphi_i(t)\, \psi_j(s) = 1, \quad \text{pentru } (t, s) \in K \times L$$

și deoarece pentru $(t, s) \in K \times L$ avem $\mathbf{f}(t, s) = 0$, urmează că

$$\mathbf{f}(t, s) = \sum_{i,j} \mathbf{f}(t, s)\, \varphi_i(t)\, \psi_j(s), \text{ pentru } (t, s) \in T \times S.$$

Pentru fiecare i să alegem un punct $t_i \in A_i$, pentru fiecare j să alegem un punct $s_j \in B_j$ și să notăm $a_{ij} = \mathbf{f}(t_i, s_j) \in E$. Avem

$$|\mathbf{f}(t, s) - a_{ij}| < \varepsilon, \quad \text{pentru } (t, s) \in A_i \times B_j$$

și deci

$$|\mathbf{f}(t, s) - \sum_{i,j} a_{ij}\, \varphi_i(t)\, \psi_j(s)| < \varepsilon, \text{ pentru orice } (t, s) \in T \times S.$$

Cu aceasta lema este demonstrată.

Observații. 1° Dacă funcția f este $\geqslant 0$, atunci $a_{ij} \geqslant 0$ și renotînd, de exemplu, $\varphi_k = a_{ij}\, \varphi_j$, deducem că :

Orice funcție pozitivă $f \in \mathcal{K}_+(T \times S, U \times V)$ se poate aproxima uniform prin sume finite de funcții pozitive de forma

$$\sum_k \varphi_k(t)\, \psi_k(s) \text{ cu } \varphi_k \in \mathcal{K}_+(T, U) \text{ și } \psi_k \in \mathcal{K}_+(S, V).$$

2° Renotînd $\mathbf{g}_k = a_{ij}\, \varphi_j$, lema 1 se poate formula astfel :

Orice funcție $\mathbf{f} \in \mathcal{K}_E(T \times S, U \times V)$ se poate aproxima uniform prin sume finite de forma $\sum \mathbf{g}_k(t)\, \psi_k(s)$ cu $\mathbf{g}_k \in \mathcal{K}_E(T, U)$ și $\varphi_k \in \mathcal{K}_+(S, V)$.

3° Dacă E este o algebră Banach cu element unitate, renotînd $\mathbf{g}_k = a_{ij}\, \varphi_j$ și $\mathbf{h}_k = e\, \psi_j$ deducem că :

Orice funcție $\mathbf{f} \in \mathcal{K}_E(T \times S,\ U \times V)$ *se poate aproxima uniform prin sume finite de forma* $\sum_k \mathbf{g}_k(t)\,\mathbf{h}_k(s)$ *cu* $\mathbf{g}_k \in \mathcal{K}_E(T,\ U)$ *și* $\mathbf{h}_k \in \mathcal{K}_E(S,\ V)$.

Lema 2. *Fie* X, E *și* F *trei spații Banach,* $(x,\ y) \to xy$ *o aplicație biliniară continuă a lui* $X \times E$ *în* F *și* $\mathbf{m}$ *o măsură majorată pe* T *cu valori în* X. *Fie* $K \subset T$ *și* $L \subset S$ *două mulțimi compacte.*

Pentru orice funcție $\mathbf{f} \in \mathcal{K}_E(T \times S,\ K \times L)$, *funcția*

$$\mathbf{h}(s) = \int \mathbf{f}(t,\ s)\ \mathbf{dm}(t)$$

aparține spațiului $\mathcal{K}_F(S,\ L)$.

Reamintim mai întîi că, deoarece măsura $\mathbf{m} : \mathcal{K}(T) \to X$ este majorată iar xy este o aplicație biliniară continuă a lui $X \times E$ în F, $\mathbf{m}$ se poate „prelungi" în mod unic la o măsură $\mathbf{m} : \mathcal{K}_E(T) \to F$ (teorema 5, § 8).

Pentru fiecare punct $s \in S$, funcția parțială $\mathbf{f}_s$ definită pe T prin egalitatea $\mathbf{f}_s(t) = \mathbf{f}(s, t)$ este continuă, cu suportul conținut în K, cu valori în E. Aplicația $s \to \mathbf{f}_s$ a lui S în $\mathcal{K}_E(T, K)$ este continuă pentru topologia convergenței uniforme pe $\mathcal{K}_k(T,\ K)$. Deoarece $\mathbf{m}$ este continuă pe $\mathcal{K}_E(T,\ K)$ pentru această topologie, funcția compusă $s \to \mathbf{m}(\mathbf{f}_s)$ definită pe T cu valori în F, este continuă pe S. Dar

$$\mathbf{m}(\mathbf{f}_s) = \int \mathbf{f}_s(t)\ \mathbf{dm}(t) = \int \mathbf{f}(t,\ s)\ \mathbf{dm}(t) = \mathbf{h}(s)$$

deci $\mathbf{h}$ este continuă pe S. Pentru $s \in L$ avem $\mathbf{f}(t,\ s) = 0$ oricare ar fi $t \in T$, deci $\mathbf{h}(s) = 0$ și deci $\mathbf{h} \in \mathcal{K}_E(S,\ L)$.

Observații. 1° Dacă se ia $E = C$ (sau $E = R$), $F = X$ și xy înmulțirea cu scalari în X, lema 2 se enunță astfel:

Dacă $f \in \mathcal{K}(T \times S,\ K \times L)$, *atunci funcția* $\mathbf{h}(s) = \int f(t,\ s)\ \mathbf{dm}(t)$ *aparține spațiului* $\mathcal{K}_X(S,\ L)$.

2° Dacă se ia $E = X'$, $F = C$ și aplicația biliniară $(x,\ x') \to \langle x,\ x' \rangle$, lema 2 se enunță astfel:

Dacă $f \in \mathcal{K}_E(T \times S,\ K \times L)$, *atunci funcția scalară* $h(s) = \int \mathbf{f}(t, s)\ \mathbf{dm}(t)$ *este continuă pe* S *cu suportul conținut în* L.

3° Dacă X este o algebră Banach, luînd $E = F = X$ și xy înmulțirea din algebra X, lema 2 se enunță astfel:

Dacă $\mathbf{f} \in \mathcal{K}_X(T \times S,\ K \times L)$, *atunci funcția* $\mathbf{h}(s) = \int \mathbf{f}(t,\ s)\ \mathbf{dm}(t)$ *aparține spațiului* $\mathcal{K}_X(S,\ L)$.

4° Dacă se dă de la început măsura $\mathbf{m} : \mathcal{K}_E(T) \to F$, lema 2 rămîne adevărată chiar dacă $\mathbf{m}$ nu este majorată. Astfel, în situația de la observația 1°, nu este necesar ca măsura $\mathbf{m}$ să fie majorată.

Teorema 1. *Fie* X, Y *și* Z *trei spații Banach,* $(x,\ y) \to xy$ *o aplicație biliniară continuă a lui* $X \times Y$ *în* Z, $\mathbf{m}$ *o măsură majorată pe* T *cu valori*

în X și $\mathbf{n}$ *o măsură majorată pe S cu valori în Y. Atunci aplicația liniară* $\mathbf{p} : \mathcal{K}(T \times S) \to Z$ *definită prin egalitatea*

$$\mathbf{p}(f) = \int\left(\int f(t, s)\ \mathbf{dm}(t)\right)\mathbf{dn}(s), \text{ pentru } f \in \mathcal{K}(T \times S)$$

este o măsură majorată pe $T \times S$ cu valori în Z, și este singura măsură pe $T \times S$ care verifică egalitatea

$$\int g(t)\,h(s)\ \mathbf{dp}(t, s) = \left(\int g(t)\ \mathbf{dm}(t)\right)\left(\int h(s)\ \mathbf{dn}(s)\right)$$

pentru orice funcție $g \in \mathcal{K}(T)$ și orice funcție $h \in \mathcal{K}(S)$.

Avem de asemenea

$$\mathbf{p}(f) = \int\left(\int f(t, s)\ \mathbf{dn}(s)\right)\mathbf{dm}(t), \text{ pentru } f \in \mathcal{K}(T \times S).$$

Conform lemei 2 (observația 1°) dacă $f \in \mathcal{K}(T \times S)$, atunci funcția

$$s \to \int f(t, s)\,\mathbf{dm}(t)$$

definită pe S cu valori în X este continuă cu suport compact. Deoarece măsura $\mathbf{n} : \mathcal{K}(T) \to Y$ este majorată iar aplicația biliniară xy este continuă, putem extinde măsura n la o măsură $\mathbf{n} : \mathcal{K}_X(T) \to Z$ deci are sens

$$\mathbf{p}(f) = \int\left(\int f(t, s)\ \mathbf{dm}(t)\right)\mathbf{dn}(s).$$

Aplicația $f \to \mathbf{p}(f)$ a lui $\mathcal{K}(T \times S)$ în Z este liniară.

De asemenea are sens

$$\pi(f) = \int\left(\int f(t, s)\ \mathbf{d}|\mathbf{m}|(t)\right)\mathbf{d}|\mathbf{n}|(s), \text{ pentru } f \in \mathcal{K}(T \times S).$$

Aplicația $f \to \pi(f)$ este o funcțională liniară *pozitivă* pe $\mathcal{K}(T \times S)$ deci este o măsură pozitivă pe $T \times S$.

Fie $a > 0$ un număr astfel încît $|xy| \leqslant a\,|x|\,|y|$ pentru orice $x \in X$ și $y \in Y$. Atunci

$$|\mathbf{p}(f)| = \left|\int\left(\int f(t, s)\ \mathbf{dm}(t)\right)\mathbf{dn}(s)\right| \leqslant a\int\left|\int f(t, s)\ \mathbf{dm}(t)\right|\mathbf{d}|\mathbf{n}|(s) \leqslant$$

$$\leqslant a\int\left(\int |f(t, s)|\ \mathbf{d}|\mathbf{m}|(t)\right)\mathbf{d}|\mathbf{n}|(s) = a\,\pi(|f|)$$

deci $\mathbf{p}$ este o măsură majorată de măsura pozitivă $a\ \pi$.

Fie acum $g \in \mathcal{K}(T)$ și $h \in \mathcal{K}(S)$ și $f(t, s) = g(t)\,h(s)$.

Pentru fiecare $s \in S$ avem

$$\int g(t)\,h(s)\,\mathbf{dm}(t) = \left(\int g(t)\,\mathbf{dm}(t)\right)h(s) = \mathbf{m}(g)\,h(s)$$

şi

$$\int \mathbf{m}(g)\, h(s)\, \mathbf{dn}(s) = \mathbf{m}(g) \int h(s)\, \mathbf{dm}(s) = \mathbf{m}(g)\, \mathbf{n}(h)$$

deci

$$\int g(t)\, h(s)\, \mathbf{dp}(t, s) = \mathbf{p}(hg) = \int \left(\int g(t)\, h(s)\, \mathbf{dm}(t) \right) \mathbf{dn}(s) =$$

$$= \int \mathbf{m}(g)\, h(s)\, \mathbf{dn}(s) = \mathbf{m}(g)\, \mathbf{n}(h) = \left(\int g(t)\, \mathbf{dm}(t) \right) \left(\int h(s)\, \mathbf{dn}(s) \right)$$

Dacă $\mathbf{p}' = \mathcal{K}(T \times S) \to Z$ este o măsură care verifică de asemenea egalitatea

$$\int g(t)\, h(s)\, \mathbf{dp}'(t, s) = \left(\int g(t)\, \mathbf{dm}(t) \right) \left(\int h(s)\, \mathbf{dn}(s) \right)$$

pentru $g \in \mathcal{K}(T)$ şi $h \in \mathcal{K}(S)$, conform lemei 1, avem atunci $\mathbf{p}(f) = \mathbf{p}'(f)$ pentru orice funcţie $f \in \mathcal{K}(T \times S)$, deci $\mathbf{p} = \mathbf{p}'$ şi astfel unicitatea măsurii $\mathbf{p}$ este demonstrată.

Dacă notăm cu $\mathbf{q}$ măsura pe $T \times S$ definită prin egalitatea

$$\mathbf{q}(f) = \int \left(\int f(t, s)\, \mathbf{dn}(s) \right) \mathbf{dm}(t), \text{ pentru } f \in \mathcal{K}(T \times S),$$

atunci, ca mai sus, se arată că

$$\int g(t)\, h(s)\, \mathbf{dq}(t, s) = \left(\int g(t)\, \mathbf{dm}(t) \right) \left(\int h(s)\, \mathbf{dn}(s) \right)$$

pentru orice funcţie $g \in \mathcal{K}(T)$ şi orice funcţie $h \in \mathcal{K}(S)$.

Din unicitatea măsurii $\mathbf{p}$ rezultă că $\mathbf{p} = \mathbf{q}$, deci

$$\mathbf{p}(f) = \int \left(\int f(t, s)\, \mathbf{dn}(s) \right) \mathbf{dm}(t), \text{ pentru } f \in \mathcal{K}(T \times S)$$

şi astfel teorema este demonstrată.

Observaţie. Dacă se ia de la început măsura $\mathbf{n} : \mathcal{K}_X(S) \to E$ se poate defini

$$\mathbf{p}(f) = \int \left(\int f(t, s)\, \mathbf{dm}(t) \right) \mathbf{dn}(s), \text{ pentru } f \in \mathcal{K}(T \times S)$$

fără a presupune că $\mathbf{m}$ şi $\mathbf{n}$ sînt majorate; în acest caz, $\mathbf{p}$ este o *măsură* (nu neapărat majorată) pe $T \times S$, cu valori în Z.

Într-adevăr, fie $C \subset T \times S$ o mulţime compactă, K proiecţia lui C pe T şi L proiecţia lui C pe S. Fie a_K şi b_L două numere care verifică inegalităţile

$$|\mathbf{m}(g)| \leqslant a_K \, \|g\|, \text{ pentru } g \in \mathcal{K}(T, K),$$

$$|\mathbf{n}(\mathbf{h})| \leqslant b_L \, \|\mathbf{h}\|, \text{ pentru } \mathbf{h} \in \mathcal{K}_X(S, L).$$

Atunci, pentru orice funcţie $f \in \mathcal{K}(T \times S, C)$, avem

$$|\mathbf{p}(f)| = \left|\int\left(\int f(t,s)\,\mathbf{dm}(t)\right)\mathbf{dn}(s)\right| \leqslant b_L \sup_{s\in S}\left|\int f(t,s)\,\mathbf{dm}(t)\right| \leqslant$$

$$\leqslant b_L\, a_K \sup_{\substack{s\in S\\ t\in T}} |f(t,s)| = b_L a_K \|f\|,$$

deci $\mathbf{p}$ este continuă pe $\mathcal{K}(T \times S, C)$ pentru topologia convergenţei uniforme şi deci $\mathbf{p}$ este o măsură pe $T \times S$.

Se verifică de asemenea, ca în demonstraţia teoremei, că $\mathbf{p}$ verifică egalitatea

$$\int g(t)\,h(s)\,\mathbf{dp}(t,s) = \left(\int g(t)\,\mathbf{dm}(t)\right)\left(\int h(s)\,\mathbf{dn}(s)\right)$$

pentru $f \in \mathcal{K}(T)$ şi $h \in \mathcal{K}(S)$ şi că $\mathbf{p}$ este singura măsură pe $T \times S$ care verifică această egalitate.

Dacă, în plus, $\mathbf{m}$ este majorată (sau dacă $\mathbf{m} : \mathcal{K}_Y(T) \to Z$ şi $X = \mathcal{L}(Y, Z)$, atunci $\mathbf{p}$ verifică de asemenea eagalitatea

$$\mathbf{p}(f) = \int\left(\int f(t,s)\,\mathbf{dn}(s)\right)\mathbf{dm}(t), \text{ pentru } f \in \mathcal{K}(T \times S).$$

Definiţia 1. *Fie X, Y şi Z trei spaţii Banach şi $(x, y) \to xy$ o aplicaţie biliniară şi continuă a lui $X \times Y$ în Z.*

Fiind date două măsuri majorate $\mathbf{m} : \mathcal{K}(T) \to X$ şi $\mathbf{n} : \mathcal{K}(S) \to Y$, măsura majorată $\mathbf{p} : \mathcal{K}(T \times S) \to Z$ definită în teorema 1 se numeşte produsul măsurilor $\mathbf{m}$ şi $\mathbf{n}$ şi se notează $\mathbf{m} \otimes \mathbf{n}$.

În loc de

$$\int\left(\int f(t,s)\,\mathbf{dm}(t)\right)\mathbf{dn}(s) \quad \text{şi} \quad \int\left(\int f(t,s)\,\mathbf{dn}(s)\right)\mathbf{dm}(t)$$

vom scrie, respectiv,

$$\int \mathbf{dn}(s)\int f(t,s)\,\mathbf{dm}(t) \quad \text{şi} \quad \int \mathbf{dm}(t)\int f(t,s)\,\mathbf{dn}(s)$$

şi le vom numi integrale iterate.

Pentru integrala în raport cu $\mathbf{m} \otimes \mathbf{n}$ a unei funcţii f, definită pe $T \times S$, se folosesc notaţiile

$$\int\int f\,\mathbf{dm}\,\mathbf{dn} \qquad \text{sau} \quad \int\int f\,\mathbf{dn}\,\mathbf{dm} \qquad \text{sau}$$

$$\int\int f(t,s)\,\mathbf{dm}(t)\,\mathbf{dn}(s) \qquad \text{sau} \quad \int\int f(t,s)\,\mathbf{dn}(s)\,\mathbf{dm}(t).$$

Pentru aceste notaţii se foloseşte denumirea de *integrală dublă a lui f în raport cu $\mathbf{m}$ şi $\mathbf{n}$.*

Cu aceste notații avem egalitățile

$$\iint f(t,s)\,\mathrm{dm}(t)\,\mathrm{dn}(s) = \int \mathrm{dm}(t)\int f(t,s)\,\mathrm{dm}(s) = \int \mathrm{dn}(s)\int f(t,s)\,\mathrm{dm}(t)$$

pentru orice funcție $f \in \mathcal{K}(T \times S)$.

Observații. 1° Produsul $\mathbf{m} \otimes \mathbf{n}$ depinde și de aplicația biliniară continuă xy. De fiecare dată această aplicație biliniară va fi precizată, cînd va fi vorba despre produsul a două măsuri.

De exemplu, dacă m și n sînt măsuri scalare, adică dacă $X = Y = Z = C$, xy este produsul obișnuit al numerelor. Dacă $X = C$ și $Y = Z$, xy este produsul cu scalari în Z.

2° Măsura pozitivă π definită prin egalitatea

$$\pi(f) = \int \mathrm{d}\,|\mathbf{m}|\,(t)\int f(t,\ s)\,\mathrm{d}\,|\mathbf{n}|\,(s),\ \text{pentru}\ f \in \mathcal{K}(T \times S)$$

este produsul măsurilor pozitive $|\mathbf{m}|$ și $|\mathbf{n}|$:

$$\pi = |\mathbf{m}| \otimes |\mathbf{n}|.$$

Dacă $a > 0$ este un număr care verifică egalitatea $|xy| \leqslant a|x|\ |y|$ pentru $x \in X$ și $y \in Y$, din demonstrația teoremei 1 rezultă că

$$|\mathbf{m} \otimes \mathbf{n}| \leqslant a\ |\mathbf{m}| \otimes |\mathbf{n}|.$$

Dacă $|xy| \leqslant |x|\ |y|$ pentru orice $x \in X$ și $y \in Y$, atunci

$$|\mathbf{m} \otimes \mathbf{n}| \leqslant |\mathbf{m}| \otimes |\mathbf{n}|.$$

3° Se verifică fără greutate următoarele egalități

$$\alpha(\mathbf{m} \otimes \mathbf{n}) = (\alpha\mathbf{m}) \otimes \mathbf{n} = \mathbf{m} \otimes (\alpha\mathbf{n}),\ \alpha \text{ scalar},$$

$$\mathbf{m} \otimes (\mathbf{n} + \mathbf{n}') = \mathbf{m} \otimes \mathbf{n} + \mathbf{m} \otimes \mathbf{n}',$$

$$(\mathbf{m} + \mathbf{m}') \otimes \mathbf{n} = \mathbf{m} \otimes \mathbf{n} + \mathbf{m}' \otimes \mathbf{n}.$$

2. Integrarea în raport cu produsul a două măsuri

Fie μ o măsură pozitivă pe T și ν o măsură pozitivă pe S

Integrala dublă în raport cu μ și ν este definită prin egalitățile

$$\iint f(t,\ s)\,\mathrm{d}\mu\,(t)\,\mathrm{d}\nu\,(s) = \int \mathrm{d}\mu\,(t)\int f(t,\ s)\,\mathrm{d}\nu\,(s) = \int \mathrm{d}\nu\,(s)\int f(t,\ s)\,\mathrm{d}\mu\,(t)$$

pentru $f \in \mathcal{K}(T \times S)$.

Vom arăta că aceste egalități se păstrează și pentru funcțiile semicontinue inferior, dar pentru funcții $f \geqslant 0$ oarecari se pot transforma în inegalități.

Lema 3. *Pentru orice funcție $f \geqslant 0$ semicontinuă inferior pe $T \times S$, funcția*

$$t \to \int^* f(t, s)\, \mathrm{d}\nu(s)$$

este semicontinuă inferior pe T şi

$$\iint^* f(t, s)\, \mathrm{d}\mu(t)\, \mathrm{d}\nu(s) = \int^* \mathrm{d}\mu(t) \int^* f(t, s)\, \mathrm{d}\nu(s).$$

Fie A mulţimea funcţiilor $h \in \mathcal{K}(T \times S)$ astfel încît $0 \leqslant h \leqslant f$. Avem

$$\iint^* f(t, s)\, \mathrm{d}\mu(t)\, \mathrm{d}\nu(s) = \sup_{h \in A} \iint h(t, s)\, \mathrm{d}\mu(t)\, \mathrm{d}\nu(s) =$$

$$= \sup_{h \in A} \int \mathrm{d}\mu(t) \int h(t, s)\, \mathrm{d}\nu(s).$$

Conform lemei 2, funcţiile

$$t \to \int h(t, s)\, \mathrm{d}\nu(s)$$

sînt continue pe T şi cu suport compact, şi deci funcţia

$$t \to \sup_{h \in A} \int h(t, s)\, \mathrm{d}\nu(s) = \int^* \sup_{h \in A} h(t, s)\, \mathrm{d}\nu(s) = \int^* f(t, s)\, \mathrm{d}\nu(s)$$

este semicontinuă inferior pe T şi

$$\int^* \mathrm{d}\mu(t) \int^* f(t, s)\, \mathrm{d}\nu(s) = \int^* \mathrm{d}\mu(t) \sup_{h \in A} \int h(t, s)\, \mathrm{d}\nu(s) = \sup_{h \in A} \int \mathrm{d}\mu(t) \int h(t, s)\, \mathrm{d}\nu(s).$$

Rezultă atunci că

$$\iint^* f(t, s)\, \mathrm{d}\mu(t)\, \mathrm{d}\nu(s) = \int^* \mathrm{d}\mu(t) \int^* f(t, s)\, \mathrm{d}\nu(s).$$

Observaţii. 1° Se demonstrează la fel că dacă $f \geqslant 0$ este o funcţie semicontinuă inferior pe $T \times S$, atunci funcţia

$$s \to \int^* f(t, s)\, \mathrm{d}\mu(t)$$

este semicontinuă inferior pe S şi]

$$\iint^* f(t, s)\, \mathrm{d}\mu(t)\, \mathrm{d}\nu(s) = \int^* \mathrm{d}\nu(s) \int f(t, s)\, \mathrm{d}\mu(t).$$

2° Dacă $f \geqslant 0$ este semicontinuă inferior pe $T \times S$ şi dacă

$$\iint^* f(t, s)\, \mathrm{d}\mu(t)\, \mathrm{d}\nu(s) < \infty,$$

atunci mulțimea

$$\left\{t;\ \int^* f(t,\ s)\,\mathrm{d}\nu\,(s) \neq 0\right\}$$

este egală cu reuniunea unui șir de mulțimi deschise μ-integrabile, deoarece funcția $t \to \int^* f(t,\ s)\ \mathrm{d}\nu(s)$ este semicontinuă inferior (v. proprietatea 6, punctul 3, § 5).

3° Lema 3 este valabilă, în particular, dacă $f(t,\ s)$ este continuă pe $T \times S$.

Lema 4. *Pentru orice funcție $f \geqslant 0$ definită pe $T \times S$ avem*

$$\inf_{h \geqslant f} \iint^* h\,(t,\ s)\,\mathrm{d}\mu\,(t)\,\mathrm{d}\nu\,(s) \geqslant \int^* \mathrm{d}\mu\,(t) \int f\,(t,\ s)\,\mathrm{d}\nu\,(s),\ h \in \mathcal{J}_+(T \times S).$$

Într-adevăr, pentru orice funcție semicontinuă inferior $h \geqslant f$ avem

$$\iint^* h\,(t,\ s)\,\mathrm{d}\mu\,(t)\,\mathrm{d}\nu\,(s) = \int^* \mathrm{d}\mu(t) \int^* h\,(t,s)\,\mathrm{d}\nu\,(s) \geqslant \int^* \mathrm{d}\mu\,(t) \int^* f\,(t,\ s)\,\mathrm{d}\nu\,(s).$$

Luînd în membrul stîng marginea inferioară pentru toate funcțiile $h \geqslant f$ din $\mathcal{J}_+(T \times S)$, se obține inegalitatea din enunț.

Propoziția 1. *Pentru orice funcție $f \geqslant 0$ definită pe $T \times S$, nulă pe complementara reuniunii unui șir de mulțimi deschise $\mu \otimes \nu$-integrabile, avem*

$$\iint^* f\,(t,\ s)\,\mathrm{d}\mu\,(t)\,\mathrm{d}\nu\,(s) \geqslant \int^* \mathrm{d}\mu\,(t) \int^* f(t,\ s)\,\mathrm{d}\nu\,(s).$$

Dacă, în plus, $\iint^* f\,(t,\ s)\,\mathrm{d}\mu\,(t)\,\mathrm{d}\nu\,(s) < +\infty$, *atunci funcția* $t \to \int^* f(t,s)\ \mathrm{d}\nu\,(s)$ *este nulă pe complementara reuniunii unui șir de mulțimi deschise μ-integrabile, din T.*

Într-adevăr, în acest caz avem (propoziția 8, § 11).

$$\iint^* f\,(t,s)\ \mathrm{d}\mu\,(t)\,\mathrm{d}\nu\,(s) = \inf_{f \geqslant h} \iint^* h\,(t,\ s)\,\mathrm{d}\mu\,(t)\,\mathrm{d}\nu\,(s),\ h \in \mathcal{J}_+(T \times S),$$

și inegalitatea rezultă din lema 4.

Dacă, în plus, integrala din stînga egalității precedente este finită, există o funcție $h \geqslant f$ din $\mathcal{J}_+(T \times S)$ cu

$$\iint^* h\,(t,\ s)\,\mathrm{d}\mu\,(t)\,\mathrm{d}\nu\,(s) < +\infty.$$

Pentru fiecare $t \in T$ avem

$$\int^* f\,(t,\ s)\,\mathrm{d}\nu\,(s) \leqslant \int^* h\,(t,\ s)\,\mathrm{d}\nu\,(s)$$

Conform observației 2° după lema 3, funcția $t \to \int^* h(t, s)\, d\nu(s)$ este nulă pe complementara reuniunii unui șir de mulțimi deschise μ-integrabile din T. Din ultima inegalitate deducem că și funcția $t \to \int^* f(t, s)\, d\nu(s)$ are aceeași proprietate și propoziția este demonstrată.

Observații. 1°. În condițiile propoziției avem de asemenea

$$\iint^* f(t, s)\, d\mu(t)\, d\nu(s) \geqslant \int^* d\nu(s) \int^* f(t, s)\, d\mu(t).$$

2° Se va arăta că dacă, în plus, f este măsurabilă, inegalitatea din enunțul propoziției se transformă în egalitate.

3° Dacă mulțimea $\{(t, s) | f(t, s) > 0\}$ nu este conținută în reuniunea unui șir de mulțimi deschise $\mu \otimes \nu$-integrabile, este posibil să avem

$$0 = \iint^* f(t, s)\, d\mu(t)\, d\nu(s) < \int^* d\mu(t) \int^* f(t, s)\, d\nu(s) <$$

$$< \inf_{h \geqslant f} \iint^* h(t, s)\, d\mu(t)\, d\nu(s) = +\infty, \quad h \in \mathcal{J}_+(T \times S)$$

Corolarul 1. *Dacă f este o funcție $\mu \otimes \nu$-neglijabilă, definită pe $T \times S$ cu valori într-un spațiu Banach E sau în $\bar{R}$ și nulă pe complementara reuniunii unui șir de mulțimi deschise $\mu \otimes \nu$-integrabile, atunci există o mulțime μ-neglijabilă $A \subset T$ astfel încît pentru $t \in A$, funcția $s \to f(t, s)$ este ν-neglijabilă.*

Într-adevăr,

$$0 = \iint^* |f(t, s)|\, d\mu(t)\, d\nu(s) \geqslant \int d\mu(t) \int^* |f(t, s)|\, d\nu(s).$$

Din egalitatea

$$\int^* d\mu(t) \int^* |f(t, s)|\, d\nu(s) = 0$$

rezultă că funcția pozitivă $t \to \int^* |f(t, s)|\, d\nu(s)$ este μ-neglijabilă, deci există o mulțime μ-neglijabilă $A \subset T$, astfel încît pentru $t \in A$ să avem

$$\int^* |f(t, s)|\, d\nu(s) = 0.$$

Aceasta înseamnă că pentru $t \in A$, funcția $s \to f(t, s)$ este ν-neglijabilă.

Corolarul 2. *Dacă $N \subset T \times S$ este o mulțime $\mu \otimes \nu$-neglijabilă, conținută în reuniunea unui șir de mulțimi deschise $\mu \otimes \nu$-integrabile,*

există o mulțime μ*-neglijabilă* $A \subset T$*, astfel încît pentru* $t \in A$*, tăietura lui* N *după* t:

$$N(t) = \{s \mid s \in S,\ (t, s) \in N\}$$

să fie ν*-neglijabilă.*

Într-adevăr, funcția $s \to \varphi_{N(t)}(s)$ este egală cu funcția $s \to \varphi_N(t, s)$.

Propoziția 2. *Dacă* f *este o funcție* $\mu \otimes \nu$*-măsurabilă definită pe* T *cu valori într-un spațiu topologic, constantă pe complementara reuniunii unui șir* (G_n) *de mulțimi deschise* $\mu \otimes \nu$*-integrabile, atunci există o mulțime* μ*-neglijabilă* $A \subset T$*, astfel încît pentru* $t \in A$*, funcția* $s \to f(t, s)$ *este* ν*-măsurabilă.*

Fiecare mulțime G_n este reuniunea unei mulțimi $\mu \otimes \nu$-neglijabile și a unui șir de mulțimi compacte, disjuncte două cîte două pe care f este continuă.

Există deci o partiție a lui $T \times S$, formată dintr-o mulțime $\mu \otimes \nu$-neglijabilă $N \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} G_n$, dintr-un șir (K_n) de mulțimi compacte disjuncte două cîte două, conținute în $\bigcup_{n=1}^{\infty} G_n$ astfel încît restricția lui f la fiecare K_n să fie continuă și din mulțimea $\mu \otimes \nu$-măsurabilă $B = T - \bigcup_{n=1}^{\infty} G_n$, pe care f este constantă.

Există atunci o mulțime μ-neglijabilă $A \subset T$ astfel încît pentru $t \in A$, tăietura $N(t)$ a lui N după t să fie ν-neglijabilă. Tăieturile $K_n(t)$ ale mulțimilor K_n, sînt submulțimi compacte ale lui S, și pentru fiecare $t \in T$, funcția parțială $s \to f(t, s)$ este continuă pe fiecare $K_n(t)$ și constantă pe $B(t)$.

Rezultă că pentru $t \in A$ funcția $s \to f(t, s)$ este ν-măsurabilă, conform principiului localizării.

Corolar. *Dacă* $E \subset T \times S$ *este o mulțime* $\mu \otimes \nu$*-măsurabilă conținută în reuniunea unui șir* (G_n) *de mulțimi deschise* $\mu \otimes \nu$*-integrabile, atunci există o mulțime* μ*-neglijabilă* $A \subset T$ *astfel încît pentru* $t \in A$*, tăietura* $E(t)$ *a lui* E *după* t *este o submulțime* ν*-măsurabilă a lui* S.

Teorema 2. (Lebesgue-Fubini). *Dacă* $\mathfrak{f}$ *este o funcție definită pe* $T \times S$ *cu valori într-un spațiu Banach* E *sau în* $\overline{R}$, $\mu \otimes \nu$*-integrabilă și nulă pe complementara reuniunii unui șir de mulțimi deschise* $\mu \otimes \nu$*-integrabile, atunci:*

1) *există o mulțime* μ*-neglijabilă* $A \subset T$ *astfel încît pentru* $t \in A$ *funcția* $s \to f(t, s)$ *este* ν*-integrabilă;*

2) *funcția* $t \to \int \mathfrak{f}(t, s)\, d\nu(s)$ *definită* μ*-aproape peste tot pe* T *este* μ*-integrabilă și*

$$\int\int \mathfrak{f}(t, s)\, d\mu(t)\, d\nu(s) = \int d\mu(t) \int \mathfrak{f}(t, s)\, d\nu(s).$$

Există un şir $(\mathbf{h}_n)$ de funcţii din $\mathcal{K}_E(T \times S)$ convergent $\mu \otimes \nu$-aproape peste tot şi în medie (în $\mathcal{L}^1_E(T \times S, \mu \otimes \nu)$) către $\mathbf{f}$ şi o funcţie $g \geqslant 0$ definită pe $T \times S$, semicontinuă inferior şi $\mu \otimes \nu$-integrabilă, astfel încît să avem $|\mathbf{h}_n(t, s)| \leqslant g(t, s)$ pentru orice n şi orice $(t, s) \in T \times S$ (corolarul propoziţiei 12, § 7). În plus, putem presupune că fiecare funcţie $\mathbf{h}_n$ este o sumă finită de forma $\sum_i x_i \varphi_i$ cu $x_i \in E$ şi $\varphi_i \in \mathcal{K}(T \times S)$. Există deci o mulţime $\mu \otimes \nu$-neglijabilă $N \subset T \times S$, astfel încît pentru $(t, s) \notin N$ să avem

$$\lim_{n \to \infty} \mathbf{h}_n(t, s) = \mathbf{f}(t, s).$$

Avem de asemenea

$$\lim_{n \to \infty} \int\int |\mathbf{h}_n - \mathbf{f}| \, d\mu \, d\nu = 0 \text{ şi } \lim_{n \to \infty} \int\int \mathbf{h}_n \, d\mu \, d\nu = \int\int \mathbf{f} \, d\mu \, d\nu.$$

Din ipoteză rezultă că mulţimea N este conţinută în reuniunea unui şir de mulţimi deschise $\mu \otimes \nu$-integrabile, deci există o mulţime μ-neglijabilă $A_1 \subset T$, astfel încît, pentru fiecare $t \notin A_1$, să avem

$$\lim_{n \to \infty} \mathbf{h}_n(t, s) = \mathbf{f}(t, s)$$

ν-aproape pentru orice $s \in S$ (corolarul 2 al propoziţiei 1).

Pentru fiecare $t \in T$ funcţia $s \to g(t, s)$ este semicontinuă inferior pe S şi

$$\int^* d\mu(t) \int^* g(t, s) \, d\nu(s) = \int\int^* g(t, s) \, d\mu(t) \, d\nu(s) < +\infty.$$

Există deci o mulţime μ-neglijabilă $A_2 \subset T$ astfel încît pentru $t \notin A_2$ să avem

$$\int^* g(t, s) \, d\nu(s) < +\infty.$$

Dacă notăm $A = A_1 \cup A_2$, mulţimea A este μ-neglijabilă şi pentru $t \notin A$ avem

$$\lim_{n \to \infty} \mathbf{h}(t, s) = \mathbf{f}(t, s), \ \nu\text{-aproape pentru orice } s \in S,$$

$$\int^* g(t, s) \, d\nu(s) < +\infty$$

şi

$$|\mathbf{h}_n(t, s)| \leqslant g(t, s), \text{ pentru orice } n \text{ şi orice } s \in S.$$

Conform teoremei lui Lebesgue, pentru $t \in A$ funcţia $s \to \mathbf{f}(t, s)$ este ν-integrabilă. Dacă pentru $t \in A$ punem $\int \mathbf{f}(t, s)\, \mathrm{d}\nu(s) = 0$, avem

$$\int^* \mathrm{d}\mu(t) \left| \int \mathbf{h}_n(t, s)\, \mathrm{d}\nu(s) - \int \mathbf{f}(t, s)\, \mathrm{d}\nu(s) \right| =$$

$$= \int^* \mathrm{d}\mu(t) \left| \int [\mathbf{h}_n(t, s) - \mathbf{f}(t, s)]\, d\nu(s) \right| \leqslant$$

$$\leqslant \int^* \mathrm{d}\mu(t) \int |\mathbf{h}_n(t, s) - \mathbf{f}(t, s)|\, \mathrm{d}\nu(s) \leqslant \iint^* |\mathbf{h}_n(t, s) - \mathbf{f}(t, s)|\, \mathrm{d}\mu(t)\, \mathrm{d}\nu(s)$$

deci

$$\lim_{n \to \infty} \int^* \mathrm{d}\mu(t) \left| \int \mathbf{h}_n(t, s)\, \mathrm{d}\nu(s) - \int \mathbf{f}(t, s)\, \mathrm{d}\nu(s) \right| = 0.$$

Cum funcţiile $t \to \int \mathbf{h}_n(t, s)\, \mathrm{d}\nu(s)$ sînt continue pe T şi cu suport compact, rezultă că funcţia $t \to \int \mathbf{f}(t, s)\, \mathrm{d}\nu(s)$ este μ-integrabilă şi

$$\int \mathrm{d}\mu(t) \int \mathbf{f}(t, s)\, \mathrm{d}\nu(s) = \lim_{n \to \infty} \int \mathrm{d}\mu(t) \int \mathbf{h}_n(t, s)\, \mathrm{d}\nu(s).$$

Pentru fiecare $x \in E$ şi $\varphi \in \mathcal{K}(T \times S)$ avem

$$\iint x\varphi(t, s)\, \mathrm{d}\mu(s)\, d\nu(t) = x \iint \varphi(t, s)\, \mathrm{d}\mu(t)\, \mathrm{d}\nu(s) = x \int \mathrm{d}\mu(t) \int \varphi(s, t)\, \mathrm{d}\nu(s) =$$

$$= \int \mathrm{d}\mu(t)\, x \int \varphi(t, s)\, \mathrm{d}\nu(s) = \int \mathrm{d}\mu(t) \int x\varphi(t, s)\, \mathrm{d}\nu(s)$$

deci pentru funcţiile $\mathbf{h}_n$ avem

$$\iint \mathbf{h}_n(t, s)\, \mathrm{d}\mu(t)\, \mathrm{d}\nu(s) = \int \mathrm{d}\mu(t) \int \mathbf{h}_n(t, s)\, \mathrm{d}\nu(s).$$

Trecînd la limită în această egalitate obţinem

$$\iint \mathbf{f}(t, s)\, \mathrm{d}\mu(t)\, \mathrm{d}\nu(s) = \int \mathrm{d}\mu(t) \int \mathbf{f}(t, s)\, \mathrm{d}\nu(s).$$

Observaţii. 1° Se demonstrează la fel că *dacă* $\mathbf{f}$ *este* $\mu \otimes \nu$*-integrabilă şi nulă pe complementara reuniunii unui şir de mulţimi deschise* $\mu \otimes \nu$*-integrabile, atunci*:

1') *există o mulţime* ν*-neglijabilă* $B \subset S$ *astfel încît pentru* $s \in B$ *funcţia* $t \to \mathbf{f}(t, s)$ *să fie* μ*-integrabilă*;

2') *funcția* $s \to \int f(t, s)\, d\mu(t)$ *definită* ν*-aproape peste tot pe* S *este* ν*-integrabilă și*

$$\iint f(t, s)\, d\mu(t)\, d\nu(s) = \int d\nu(s) \int f(t, s)\, d\mu(t).$$

2° În condițiile teoremei, funcția $t \to \int f(t, s)\, d\nu(s)$ este nulă pe complementara reuniunii unui șir de mulțimi deschise μ-integrabile din T (propoziția 1).

3° Fie $f(t, s)$ o funcție definită pe $T \times S$ cu valori în E sau $\bar{R}$. Dacă funcția $s \to f(t, s)$ este ν-integrabilă, μ-aproape pentru orice t și dacă funcția $t \to \int f(t, s)\, d\nu(s)$ definită μ-aproape peste tot este μ-integrabilă, spunem că există integrala iterată $\int d\mu \int f\, d\nu$.

În mod asemănător, dacă funcția $t \to f(t, s)$ este μ-integrabilă, ν-aproape pentru orice s și dacă funcția $s \to \int f(t, s)\, d\mu(t)$ definită ν-aproape peste tot, este ν-integrabilă, spunem că există integrala iterată $\int d\nu \int f\, d\mu$.

Teorema lui Lebesque-Fubini se enunță acum astfel :

Dacă f *este* $\mu \otimes \nu$*-integrabilă și nulă pe complementara reuniunii unui șir de mulțimi deschise* $\mu \otimes \nu$ *-integrabile, atunci integralele iterate* $\int d\mu \int f\, d\nu$ *și* $\int d\nu \int f\, d\mu$ *există și avem egalitatea*

$$\iint f\, d\mu\, d\nu = \int d\mu \int f\, d\nu = \int d\nu \int f\, d\mu.$$

Dacă însă una sau ambele integrale iterate există, nu rezultă că f este $\mu \otimes \nu$-integrabilă și nici că integralele iterate sînt egale. (Dacă f este $\mu \times \nu$ măsurabilă, atunci vezi corolarul propoziției 3).

Corolarul 1. *Dacă* μ și ν *sînt mărginite și dacă* $f(t, s)$ *este* $\mu \otimes \nu$*-integrabilă, atunci există integralele iterate și*

$$\iint f\, d\mu\, d\nu = \int d\mu \int f\, d\mu = \int d\nu \int f\, d\mu\,.$$

Într-adevăr, din lema 3 rezultă că $\mu \otimes \nu$ este mărginită deci $T \times S$ este o mulțime deschisă $\mu \otimes \nu$-integrabilă.

Corolarul 2. *Dacă* $f(t, s)$ *este o funcție* $\geqslant 0$ *semicontinuă inferior pe* $T \times S$ *și dacă este* $\mu \otimes \nu$*-integrabilă, atunci integralele iterate există și*

$$\iint f\, d\mu\, d\nu = \int d\mu \int f\, d\nu = \int d\nu \int f\, d\mu.$$

Într-adevăr, o funcţie semicontinuă inferior integrabilă, este nulă pe complementara reuniunii unui şir de mulţimi deschise integrabile.

Corolarul 3. *Dacă $E \subset T \times S$ este o mulţime $\mu \otimes \nu$-integrabilă, conţinută în reuniunea unui şir de mulţimi deschise $\mu \otimes \nu$-integrabile, atunci:*

există o mulţime μ-neglijabilă $A \subset T$ astfel încît pentru $t \in A$, tăietura $E(t) \subset S$ este μ-integrabilă;

funcţia $t \to \nu(E(t))$ definită μ-aproape peste tot pe T este μ-integrabilă şi

$$(\mu \otimes \nu)(E) = \int \nu(E(t))\, \mathrm{d}\mu(t).$$

Observaţie. Dacă E este deschisă sau dacă μ şi ν sînt mărginite, condiţia ca E să fie conţinută în reuniunea unui şir de mulţimi deschise $\mu \otimes \nu$-integrabile este de prisos.

Propoziţia 1 şi teorema 1 se pot preciza:

Propoziţia 3. *Dacă $f \geqslant 0$ este o funcţie $\mu \otimes \nu$-măsurabilă nulă pe complementara reuniunii unui şir (G_n) de mulţimi deschise $\mu \otimes \nu$-integrabile, atunci funcţia $t \to \int^* f(t, s)\, \mathrm{d}\nu(s)$ este μ-măsurabilă şi*

$$\iint^* f(t, s)\, \mathrm{d}\mu(t)\, \mathrm{d}\nu(s) = \int^* \mathrm{d}\mu(t) \int^* f(t, s)\, \mathrm{d}\nu(s).$$

Putem presupune că şirul (G_n) este crescător. Pentru fiecare n să notăm $f_n = \inf(n, f\varphi_{G_n})$. Fiecare funcţie f_n este $\mu \otimes \nu$-măsurabilă, mărginită şi nulă în afara mulţimii deschise $\mu \otimes \nu$-integrabile G_n, deci f_n este $\mu \otimes \nu$-integrabilă şi $f = \sup_n f_n$. Pentru fiecare $t \in T$ avem

$$\int^* f(t, s)\, \mathrm{d}\nu(s) = \int^* \sup_n f_n(t, s)\, \mathrm{d}\nu(s) = \sup_n \int^* f_n(t, s)\, \mathrm{d}\nu(s)$$

Conform teoremei 1, funcţia $t \to f_n(t, s)$ este integrabilă, cu excepţia punctelor t aparţinînd unei mulţimi μ-neglijabile, iar funcţia $t \to \int f_n(t, s)\, \mathrm{d}\nu(s)$, definită μ-aproape peste tot, este μ-integrabilă. Rezultă că funcţia

$$t \to \int^* f_n(t, s)\, \mathrm{d}\nu(s)$$

este egală μ-aproape peste tot cu funcţia μ-integrabilă

$$t \to \int f_n(t, s)\, \mathrm{d}\nu(s)$$

şi deci este μ-măsurabilă. Atunci funcţia

$$t \to \int^* f(t, s)\, \mathrm{d}\nu(s).$$

este μ-măsurabilă ca anvelopă superioară a unui şir de funcţii μ-măsurabile.

Deoarece

$$\int^* f_n(t, s)\, d\nu(s) = \int f_n(t, s)\, d\nu(s)$$

μ-aproape peste tot, pentru fiecare n, iar funcţiile din cei doi membri ai egalităţii formează două şiruri crescătoare de funcţii pozitive, avem

$$\iint^* f(t, s)\, d\mu(t)\, d\nu(s) = \sup_n \iint f_n(t, s)\, d\mu(t)\, d\nu(s) =$$

$$= \sup_n \int d\mu(t) \int f_n(t, s)\, d\nu(s) = \sup_n \int^* d\mu(t) \int^* f_n(t, s)\, d\nu(s) =$$

$$= \int^* d\mu(t) \sup_n \int^* f_n(t, s)\, d\nu(s) = \int^* d\mu(t) \int^* f(t, s)\, d\nu(s)$$

şi propoziţia este demonstrată.

Corolar. *Fie* $\mathbf{f}$ *o funcţie definită pe* $T \times S$ *cu valori într-un spaţiu Banach* E *sau în* $\overline{R}$, $\mu \otimes \nu$*-măsurabilă şi nulă pe complementara reuniunii unui şir de mulţimi deschise* $\mu \otimes \nu$*-integrabile. Pentru ca integralele*

$$\iint \mathbf{f}(t, s)\, d\mu(t)\, d\nu(s), \quad \int d\mu(t) \int \mathbf{f}(t, s)\, d\nu(s), \quad \int d\nu(s) \int \mathbf{f}(t, s)\, d\mu(t)$$

să existe toate şi să fie egale, este necesar şi suficient ca una din integralele

$$\int^* d\mu(t) \int^* |\mathbf{f}(t, s)|\, d\nu(s), \quad \int^* d\nu(s) \int^* |\mathbf{f}(t, s)|\, d\mu(t)$$

să fie finită.

Dacă, de exemplu,

$$\int^* d\mu(t) \int^* |\mathbf{f}(t, s)|\, d\nu(s) < +\infty$$

din propoziţia precedentă şi din criteriul de integrabilitate rezultă că $\mathbf{f}$ este $\mu \otimes \nu$-integrabilă. Din teorema 2 rezultă că cele două integrale iterate există şi sînt egale cu integrala lui $\mathbf{f}$ în raport cu $\mu \otimes \nu$.

Reciproc, dacă $\mathbf{f}$ este $\mu \otimes \nu$-integrabilă, atunci $|\mathbf{f}|$ este $\mu \otimes \nu$-integrabilă, deci există integralele iterate

$$\int d\mu(t) \int |\mathbf{f}(t, s)|\, d\nu(s) \quad \text{şi} \quad \int d\nu(s) \int |f(t, s)|\, d\mu(t)$$

şi deci integralele superioare iterate sînt finite.

Observaţie. O funcţie $f \geqslant 0$ *semicontinuă inferior pe* $T \times S$ *este* $\mu \otimes \nu$*-integrabilă, dacă şi numai dacă există una din integralele iterate.*

Într-adevăr, f este $\mu \otimes \nu$-măsurabilă, şi din lema 3 rezultă

$$\iint f\, d\mu\, d\nu < \infty .$$

3. Integrarea funcţiilor scalare în raport cu produsul a două măsuri vectoriale

Vom considera mai multe cazuri.

a) Fie X, Y şi Z trei spaţii Banach şi $(x, y) \to xy$ o aplicaţie biliniară continuă a lui $X \times Y$ în Z.

Fie $\mathbf{m}$ o măsură majorată definită pe T cu valori în X, $\mathbf{n}$ o măsură majorată definită pe S cu valori în Y şi $\mathbf{m} \otimes \mathbf{n}$ produsul măsurilor $\mathbf{m}$ şi $\mathbf{n}$, relativ la aplicaţia biliniară xy.

Teorema 3. *Dacă f este o funcţie scalară definită pe $T \times S$, integrabilă în raport cu măsura $|\mathbf{m}| \otimes |\mathbf{n}|$ şi nulă pe complementara reuniunii unui şir de mulţimi deschise $|\mathbf{m}| \otimes |\mathbf{n}|$-integrabile, atunci :*

1) *funcţia f este $\mathbf{m} \otimes \mathbf{n}$-integrabilă ;*

2) *există o mulţime $\mathbf{m}$-neglijabilă $A \subset T$ astfel încît pentru $t \in A$, funcţia $s \to f(t, s)$ este $\mathbf{n}$-integrabilă.*

3) *funcţia $t \to \int f(t, s)\, \mathbf{dn}(s)$ definită $\mathbf{m}$-aproape peste tot pe T este $\mathbf{m}$-integrabilă şi*

$$\iint f(t, s)\, \mathbf{dm}(t)\, \mathbf{dn}(s) = \int \mathbf{dm}(t) \int f(t, s)\, \mathbf{dn}(s).$$

Faptul că f este $\mathbf{m} \otimes \mathbf{n}$-integrabilă rezultă din inegalitatea $|\mathbf{m} \otimes \mathbf{n}| \leqslant a|\mathbf{m}| \otimes |\mathbf{n}|$, unde $a > 0$ este un număr care verifică inegalitatea $|xy| \leqslant a|x|\,|y|$ pentru $x \in X$ şi $y \in Y$.

Din teorema lui Lebesgue-Fubini rezultă că există o mulţime $|\mathbf{m}|$-neglijabilă, deci $\mathbf{m}$-neglijabilă, $A \subset T$, astfel încît pentru $t \in A$ funcţia $s \to f(t, s)$ este $|\mathbf{n}|$-integrabilă, deci $\mathbf{n}$-integrabilă.

Pentru demonstrarea ultimului punct, fie (f_n) un şir de funcţii scalare continue cu suport compact definite pe $T \times S$ convergent $|\mathbf{m}| \otimes |\mathbf{n}|$-aproape peste tot şi în medie, în $\mathcal{L}^1_c(T \times S, |\mathbf{m}| \times |\mathbf{n}|)$ către f.

Avem deci

$$\lim_{n \to \infty} \int |f(t, s) - f_n(t, s)|\, \mathbf{d}|\mathbf{m}| \otimes |\mathbf{n}| = 0.$$

Atunci

$$\lim_{n \to \infty} \int |f(t, s) - f_n(t, s)|\, \mathbf{d}|\mathbf{m} \otimes \mathbf{n}| = 0$$

deci

$$\lim_{n \to \infty} \int f_n(t, s)\, \mathbf{dm} \otimes \mathbf{n} = \int f(t, s)\, \mathbf{dm} \otimes \mathbf{n}$$

adică

$$\lim_{n \to \infty} \iint f_n(t, s)\, \mathbf{dm}(t)\, \mathbf{dn}(s) = \iint f(t, s)\, \mathbf{dm}(t)\, \mathbf{dn}(s).$$

Pe de altă parte

$$\int^* \mathrm{d}|\mathbf{m}|(t)\left|\int f_n(t,s)\,\mathrm{dn}(s)-\int f(t,s)\,\mathrm{dn}(s)\right|=$$

$$=\int^* \mathrm{d}|\mathbf{m}|(t)\left|\int [f_n(t,s)-f(t,s)]\,\mathrm{dn}(s)\right|\leqslant$$

$$\leqslant\int^* \mathrm{d}|\mathbf{m}|(t)\int |f_n(t,s)-f(t)\,s)|\,\mathrm{d}|\mathbf{n}|(s)=$$

$$=\int |f_n(t,s)-f(t,s)|\,\mathrm{d}|\mathbf{m}|\otimes|\mathbf{n}|$$

deci

$$\lim_{n\to\infty}\int^* \mathrm{d}|\mathbf{m}|(t)\left|\int f_n(t,s)\,\mathrm{dn}(s)-\int f(t,s)\,\mathrm{dn}(s)\right|=0$$

Deoarece funcţiile $t\to\int f_n(t,s)\,\mathrm{dn}(s)$ sînt **m**-integrabile, rezultă că funcţia $t\to\int f(t,s)\,\mathrm{dn}(s)$, definită **m**-aproape peste tot pe T este **m**-integrabilă şi

$$\lim_{n\to\infty}\int \mathrm{dm}(t)\int f_n(t,s)\,\mathrm{dn}(s)=\int \mathrm{dm}(t)\int f(t,s)\,\mathrm{dn}(s).$$

Pentru funcţiile f_n avem

$$\iint f_n(t,s)\,\mathrm{dm}(t)\,\mathrm{dn}(s)=\int \mathrm{dm}(t)\int f_n(t,s)\,\mathrm{dn}(s).$$

Trecînd la limită în această egalitate, se obţine egalitatea din enunţul teoremei.

Corolar. *Dacă* $|\mathbf{m}\otimes\mathbf{n}|=|\mathbf{m}|\otimes|\mathbf{n}|$ *şi dacă* f *este o funcţie scalară definită pe* $T\times S$, $\mathbf{m}\otimes\mathbf{n}$-*integrabilă, nulă pe complementara reuniunii unui şir de mulţimi deschise* $\mathbf{m}\otimes\mathbf{n}$-*integrabile, atunci*:

1) *există o mulţime* **m**-*neglijabilă* $A\subset T$ *astfel încît pentru* $t\in A$, *funcţia* $s\to f(t,s)$ *este* **n**-*integrabilă*;

2) *funcţia* $t\to\int f(t,s)\,\mathrm{dn}(s)$ *definită* **m**-*aproape peste tot pe* T *este* **m**-*integrabilă şi*

$$\iint f(t,s)\,\mathrm{dm}(t)\,\mathrm{dn}(s)=\int \mathrm{dm}(t)\int f(t,s)\,\mathrm{dn}(s).$$

b) Fie E, Y şi G trei spaţii Banach şi $(x,y)\to xy$ o aplicaţie biliniară continuă a lui $E\times Y$ în G.

Fie μ o măsură scalară pe T, $\mathbf{n}$ o măsură majorată pe S cu valori în Y şi $\mu \otimes \mathbf{n}$ produsul măsurilor μ şi $\mathbf{n}$ relativ la produsul cu scalari în Y. Măsura $\mu \otimes \mathbf{n}$ are valori în Y ca şi măsura $\mathbf{n}$.

Teorema 4. *Dacă* $\mathbf{f} : T \times S \to E$ *este o funcţie* $|\mu| \otimes |\mathbf{n}|$*-integrabilă şi nulă pe complementara reuniunii unui şir de mulţimi deschise* $|\mu| \otimes |\mathbf{n}|$*-integrabile, atunci :*

1) *funcţia* $\mathbf{f}$ *este* $\mu \otimes \mathbf{n}$*-integrabilă ;*

2) *există o mulţime* μ*-neglijabilă* $A \subset T$ *astfel încît pentru* $t \in A$, *funcţia* $s \to \mathbf{f}(t, s)$ *este* $\mathbf{n}$*-integrabilă ;*

3) *funcţia* $t \to \int \mathbf{f}(t, s)\, \mathbf{dn}\,(s)$ *definită* μ*-aproape peste tot pe* T *cu valori în* G *este* μ*-integrabilă şi*

$$\iint \mathbf{f}(t, s)\, d\mu\,(t)\, \mathbf{dn}\,(s) = \int d\mu\,(t) \int \mathbf{f}(t, s)\, \mathbf{dn}\,(s)$$

Demonstraţia este aceeaşi ca a teoremei 3.

Punctele 2) şi 3) din teoremă pot fi înlocuite cu :

2′) *există o mulţime* $\mathbf{n}$*-neglijabilă* $B \subset S$ *astfel încît pentru* $s \in B$, *funcţia* $t \to \mathbf{f}(t, s)$ *este* μ*-integrabilă ;*

3′) *funcţia* $s \to \int \mathbf{f}(t, s)\, d\mu\,(t)$ *definită* $\mathbf{n}$*-aproape peste tot pe* S *cu valori în* E *este* $\mathbf{n}$*-integrabilă şi*

$$\iint \mathbf{f}(t, s)\, d\mu\,(t)\, \mathbf{dn}\,(s) = \int \mathbf{dn}\,(s) \int \mathbf{f}(t, s)\, d\mu\,(t)$$

Observaţie. Teorema este valabilă, în particular, dacă $Y = C$, $G = E$ şi n este o măsură scalară. În acest caz, teorema va fi precizată mai departe.

c) Fie E o algebră Banach, $\mathbf{m}$ o măsură majorată pe T cu valori în E, $\mathbf{n}$ o măsură majorată pe S cu valori în E şi $\mathbf{m} \otimes \mathbf{n}$ produsul măsurilor $\mathbf{m}$ şi $\mathbf{n}$ relativ la produsul xy din algebra E.

Teorema 5. *Dacă* $\mathbf{f} : T \times S \to E$ *este o funcţie* $|\mathbf{m}| \otimes |\mathbf{n}|$*-integrabilă şi nulă pe complementara reuniunii unui şir de mulţimi deschise* $|\mathbf{m}| \otimes |\mathbf{n}|$*-integrabile, atunci :*

1) *funcţia* $\mathbf{f}$ *este* $\mathbf{m} \otimes \mathbf{n}$*-integrabilă ;*

2) *există o mulţime* $\mathbf{m}$*-neglijabilă* $A \subset T$ *astfel încît pentru* $t \in A$, *funcţia* $s \to \mathbf{f}(t, s)$ *este* $\mathbf{n}$*-integrabilă ;*

3) *funcţia* $t \to \int \mathbf{f}(t, s)\, \mathbf{dn}\,(s)$, *definită* $\mathbf{m}$*-aproape peste tot pe* T *cu valori în* E *este* $\mathbf{m}$*-integrabilă şi*

$$\iint \mathbf{f}(t, s)\, \mathbf{dm}\,(t)\, \mathbf{dn}\,(s) = \int \mathbf{dm}\,(t) \int \mathbf{f}(t, s)\, \mathbf{dn}\,(s).$$

Demonstraţia este aceeaşi ca a teoremei 3.

4. Proprietăţile produsului de măsuri

a. *Proprietăţi ale integralei superioare*

Fie μ o măsură pozitivă pe T şi ν o măsură pozitivă pe S.

Lema 5. *Pentru orice funcţie $g \geqslant 0$ definită pe T şi orice funcţie $h \geqslant 0$ definită pe S, avem**)

$$\int^* d\mu(t) \int^* g(t)\, h(s)\, d\nu(s) = \left(\int^* g(t)\, d\mu(t)\right)\left(\int^* h(s)\, d\nu(s)\right).$$

Într-adevăr, pentru fiecare $t \in T$ avem

$$\int^* g(t)\, h(s)\, d\nu(s) = g(t) \int^* h(s)\, d\nu(s)$$

chiar dacă $g(t) = +\infty$. Avem apoi

$$\int^* d\mu(t) \int^* g(t)\, h(s)\, d\nu(s) = \int^* \left(\int^* h(s)\, d\nu(s)\right) g(t)\, d\mu(t) =$$

$$= \left(\int^* h(s)\, d\nu(s)\right)\left(\int^* g(t)\, d\mu(t)\right)$$

chiar dacă $\int^* h(s)\, d\nu(s) = +\infty$

Observaţie. Avem de asemenea

$$\int^* d\nu(s) \int^* g(t)\, h(s)\, d\mu(t) = \left(\int^* g(t)\, d\mu(t)\right)\left(\int^* h(s)\, d\nu(s)\right)$$

Propoziţia 4. *Pentru orice funcţie $g \geqslant 0$, definită pe T şi orice funcţie $h \geqslant 0$ definită pe S avem*

$$\iint^* g(t)\, h(s)\, d\mu(t)\, d\nu(s) = \left(\int^* g(t)\, d\mu(t)\right)\left(\int^* h(s)\, d\nu(s)\right)$$

a) Să presupunem mai întîi că g şi h au suporturile compacte. Atunci funcţia $(t, s) \to g(t)\, h(s)$ are suport compact în $T \times S$.

Conform propoziţiei 1 avem atunci

$$\iint^* g(t)\, h(s)\, d\mu(t)\, d\nu(s) \geqslant \int^* d\mu(t) \int^* g(t)\, h(s)\, d\nu(s)$$

deci, conform lemei precedente,

$$\iint^* g(t)\, h(s)\, d\mu(t)\, d\nu(s) \geqslant \left(\int^* g(t)\, d\mu(t)\right)\left(\int^* h(s)\, d\nu(s)\right).$$

---

*) Dacă în membrul drept unul din factori este 0 iar celălalt este $+\infty$, atunci membrul drept este 0, conform convenţiei făcute, $0 \cdot \infty = 0$.

b) Pentru a demonstra inegalitatea contrară să presupunem mai întîi că membrul drept nu este de forma $0\cdot\infty$.

Fie $g' \geqslant g$ o funcţie semicontinuă inferior pe T şi $h' \geqslant h$ o funcţie semicontinuă inferior pe S. Funcţia $g'(t)\,h'(s)$ este semicontinuă inferior pe $T \times S$. Folosind lema 3 şi lema 5 deducem

$$\iint^* g(t)\,h(s)\,\mathrm{d}\mu(t)\,\mathrm{d}\nu(s) \leqslant \iint^* g'(t)\,h'(s)\,\mathrm{d}\mu(t)\,\mathrm{d}\nu(s) =$$

$$= \int^* \mathrm{d}\mu(t) \int^* g'(t)\,h'(s)\,\mathrm{d}\nu(s) = \left(\int^* g'(t)\,\mathrm{d}\mu(t)\right)\left(\int^* h'(s)\,\mathrm{d}\nu(s)\right)$$

Luînd în membrul drept marginea inferioară pentru toate funcţiile $g' \in \in \mathcal{J}_+(T)$ şi $h' \in \mathcal{J}_+(S)$ cu $g' \geqslant g$ şi $h' \geqslant h$, obţinem inegalitatea

$$\iint^* g(t)\,h(s)\,\mathrm{d}\mu(t)\,\mathrm{d}\nu(s) \leqslant \left(\int^* g(t)\,\mathrm{d}\mu(t)\right)\left(\int^* h(s)\,\mathrm{d}\nu(s)\right)$$

de unde rezultă egalitatea din enunţ, în acest caz.

Înainte de a trece mai departe să observăm că dacă $A \subset T$ şi $B \subset S$ sînt relativ compacte, luînd $g = \varphi_A$ şi $h = \varphi_B$ obţinem

$$(\mu \otimes \nu)^*(A \times B) = \mu^*(A)\,\nu^*(B).$$

În particular, dacă $A \subset T$ este μ-neglijabilă şi $B \subset S$ este relativ compactă, atunci $A \times B$ este $\mu \otimes \nu$-neglijabilă.

c) Să presupunem acum că membrul drept este de forma $0\cdot\infty$. Dacă, de exemplu, $\int^* g(t)\,\mathrm{d}\mu(t) = 0$, atunci mulţimea $A = \{t \in T \mid g(t) \neq \neq 0\}$ este μ-neglijabilă, mulţimea $B = \{s \in S \mid h(s) \neq 0\}$ este relativ compactă, deci $A \times B$ este $\mu \otimes \nu$-neglijabilă. Deoarece $\{(t, s) \in T \times S \mid g(t)\,h(s) \neq 0\} \subset A \times B$, rezultă că funcţia $g(t)\,h(s)$ este $\mu \otimes \nu$-neglijabilă, deci

$$\iint^* g(t)\,h(s)\,\mathrm{d}\mu(t)\,\mathrm{d}\nu(s) = \left(\int^* g(t)\,\mathrm{d}\mu(t)\right)\left(\int^* h(s)\,\mathrm{d}\nu(s)\right) = 0$$

d) Dacă g şi h nu au suporturi compacte, pentru orice mulţimi compacte $K \subset T$ şi $L \subset S$ avem

$$\iint^* g(t)\,\varphi_K(t)\,h(s)\,\varphi_L(s)\,\mathrm{d}\mu(t)\,\mathrm{d}\nu(s) =$$

$$= \left(\int^* g(t)\,\varphi_K(t)\,\mathrm{d}\mu(t)\right)\left(\int^* h(s)\,\varphi_L(s)\,\mathrm{d}\nu(s)\right).$$

Cum orice mulţime compactă $C \subset T \times S$ este conţinută într-o mulţime compactă de forma $K \times L$ cu $K \subset T$ şi $L \subset S$, luînd marginea superioară pentru toate mulţimile compacte $K \subset T$ şi $L \subset S$, obţinem egalitatea din enunţ.

Cu aceasta propoziția este complet demonstrată.

Corolarul 1. *Dacă* μ *și* ν *sînt mărginite, atunci și* $\mu\otimes\nu$ *este mărginită și* $\|\mu\otimes\nu\| = \|\mu\|\,\|\nu\|$.

Corolarul 2. *Pentru orice mulțime* $A\subset T$ *și orice mulțime* $B\subset S$ *avem*

$$(\mu\otimes\nu)^*(A\times B) = \mu^*(A)\,\nu^*(B).$$

Corolarul 3. *Dacă* $A\subset T$ *este* μ*-neglijabilă, atunci* $A\times B$ *este* $\mu\otimes\nu$*-neglijabilă oricare ar fi mulțimea* $B\subset S$.

În particular, dacă A este μ-neglijabilă, atunci $A\times S$ este $\mu\otimes\nu$-neglijabilă și reciproc, dacă $\nu\neq 0$ și $A\times S$ este $\mu\otimes\nu$-neglijabilă, atunci A este μ-neglijabilă.

De asemenea, dacă B este ν-neglijabilă, atunci mulțimea $A\times B$ este $\mu\otimes\nu$-neglijabilă oricare ar fi mulțimea $A\subset T$.

b. *Proprietăți ale funcțiilor măsurabile*

Fie X, Y și Z trei spații Banach, $(x, y)\to xy$ o aplicație biliniară continuă a lui $X\times Y$ în Z și $a>0$ un număr astfel încît $|xy|\leqslant a\,|x|\,|y|$ pentru orice $x\in X$ și $y\in Y$:

Fie $\mathbf{m}$ o măsură majorată pe T cu valori în X, $\mathbf{n}$ o măsură majorată pe S cu valori în Y și $\mathbf{m}\otimes\mathbf{n}$ produsul măsurilor $\mathbf{m}$ și $\mathbf{n}$ relativ la aplicația biliniară xy.

Propoziția 5. *Dacă* $A\subset T$ *este o mulțime* $\mathbf{m}$*-neglijabilă, atunci* $A\times B$ *este* $\mathbf{m}\otimes\mathbf{n}$*-neglijabilă oricare ar fi* $B\subset S$.

Într-adevăr, A este $|\mathbf{m}|$-neglijabilă, deci $A\times B$ este $|\mathbf{m}|\otimes|\mathbf{n}|$-neglijabilă. Din inegalitatea $|\mathbf{m}\otimes\mathbf{n}|\leqslant|\mathbf{m}|\otimes|\mathbf{n}|$ rezultă că $A\times B$ este $|\mathbf{m}\otimes\mathbf{n}|$-neglijabilă, adică $\mathbf{m}\otimes\mathbf{n}$-neglijabilă.

Reciproc, dacă $|\mathbf{m}\otimes\mathbf{n}| = |\mathbf{m}|\otimes|\mathbf{n}|$ iar $\mathbf{n}\neq 0$ și dacă $A\times S$ este $\mathbf{m}\otimes\mathbf{n}$-neglijabilă, atunci A este $\mathbf{m}$-neglijabilă.

Corolar. *Între suporturile măsurilor* $\mathbf{m}$, $\mathbf{n}$ *și* $\mathbf{m}\otimes\mathbf{n}$ *avem următoarea relație*

$$S(\mathbf{m}\otimes\mathbf{n})\subset S(\mathbf{m})\times S(\mathbf{n}).$$

Dacă $|\mathbf{m}\otimes\mathbf{n}| = |\mathbf{m}|\otimes|\mathbf{n}|$, *atunci* $S(\mathbf{m}\otimes\mathbf{n}) = S(\mathbf{m})\times S(\mathbf{n})$.

Într-adevăr, $\complement S(\mathbf{m})$ este deschisă și $\mathbf{m}$-neglijabilă și $\complement S(\mathbf{n})$ este deschisă și $\mathbf{n}$-neglijabilă, deci $\complement S(\mathbf{m})\times S$ și $T\times\complement S(\mathbf{n})$ sînt deschise și $\mathbf{m}\otimes\mathbf{n}$-neglijabile. Deoarece $\complement(S(\mathbf{m})\times S(\mathbf{n}))$ este reuniunea mulțimilor $\complement S(\mathbf{m})\times S$ și $T\times\complement S(\mathbf{n})$, rezultă că $\complement(S(\mathbf{m})\times S(\mathbf{n}))$ este deschisă și $\mathbf{m}\otimes\mathbf{n}$-neglijabilă. Urmează că $S(\mathbf{m}\otimes\mathbf{n})\subset S(\mathbf{m})\times S(\mathbf{n})$.

Să presupunem acum că $|\mathbf{m}\otimes\mathbf{n}| = |\mathbf{m}|\otimes|\mathbf{n}|$. Fie $U\times V\subset T\times S$ o mulțime deschisă $\mathbf{m}\otimes\mathbf{n}$-neglijabilă, deci $|\mathbf{m}|\otimes|\mathbf{n}|$-neglijabilă. Din corolarul 2 al propoziției 4 deducem că una din mulțimile U sau V este neglijabilă, deci

$$\complement S(\mathbf{m}\otimes\mathbf{n})\subset(\complement S(\mathbf{m})\times S)\cup(T\times\complement S(\mathbf{n})) = \complement(S(\mathbf{m})\times S(\mathbf{n}))$$

de unde $S(\mathbf{m}\otimes\mathbf{n})\supset S(\mathbf{m})\times S(\mathbf{n})$ şi deci

$$S(\mathbf{m}\otimes\mathbf{n}) = S(\mathbf{m})\times S(\mathbf{n}).$$

Propoziţia 6. *Fie E, F şi G trei spaţii topologice şi $u : E\times F\to G$ o funcţie continuă. Dacă $\mathbf{g} : T\to E$ este o funcţie* **m***-măsurabilă şi $\mathbf{h} : S\to F$ este o funcţie* **n***-măsurabilă, atunci funcţia $(t, s)\to u(\mathbf{g}(t), \mathbf{h}(s))$ definită pe $T\times S$ cu valori în G este* $\mathbf{m}\otimes\mathbf{n}$*-măsurabilă.*

Să arătăm mai întîi că aplicaţia $(t, s)\to\mathbf{g}(t)$ a lui $T\times S$ în E este $\mathbf{m}\otimes\mathbf{n}$-măsurabilă.

Fie $C\subset T\times S$ o mulţime compactă şi fie $K\subset T$ şi $L\subset S$ două mulţimi compacte astfel încît $C\subset K\times L$. Deoarece funcţia $\mathbf{g} : T\to E$ este **m**-măsurabilă, există o partiţie a lui K formată dintr-o mulţime **m**-neglijabilă N şi dintr-un şir (K_n) de mulţimi compacte din T, astfel încît restricţia lui $\mathbf{g}$ la fiecare K_n să fie continuă. Atunci mulţimea $N\times L$ este $\mathbf{m}\otimes\mathbf{n}$-neglijabilă iar restricţia funcţiei $(t, s)\to\mathbf{g}(t)$ la fiecare mulţime compactă $K_n\times L$ este continuă. Mulţimile $N\times L$ şi $K_n\times L$ formează o partiţie a lui $K\times L$, deci mulţimile $C\cap(N\times L)$ şi $C\cap(K_n\times L)$ formează o partiţie a lui C. Cum mulţimea $C\cap(N\times L)$ este $\mathbf{m}\otimes\mathbf{n}$-neglijabilă şi mulţimile $C\cap(K_n\times L)$ sînt compacte iar restricţia funcţiei $(t, s)\to\mathbf{g}(t)$ la fiecare mulţime $C\cap(K_n\times L)$ este continuă, rezultă că funcţia $(t, s)\to\mathbf{g}(t)$ este $\mathbf{m}\otimes\mathbf{n}$-măsurabilă.

În mod asemănător deducem că aplicaţia $(t, s)\to\mathbf{h}(s)$ a lui $T\times S$ în F este $\mathbf{m}\otimes\mathbf{n}$-măsurabilă. Deoarece funcţia $u : E\times F\to G$ este continuă, urmează că aplicaţia $(t, s)\to u(\mathbf{g}(t), \mathbf{h}(s))$ a lui $T\times S$ în G este $\mu\otimes\nu$-măsurabilă.

În particular, propoziţia precedentă se aplică în următoarele cazuri :

1) E este o algebră Banach, $u(x, y) = xy$ (produsul din algebra E), $\mathbf{g} : T\to E$ şi $\mathbf{h} : S\to E$.

2) E spaţiu Banach, $F = C$, $u(x, y) = xy$ (produsul cu scalari în E), $\mathbf{g} : T\to E$ şi $\mathbf{h} : S\to C$.

3) $F = E'$, $u(x, y) = \langle x, y\rangle$ pentru $x\in E$ şi $y\in E'$, $\mathbf{g} : T\to E$ şi $\mathbf{h} : S\to E'$.

4) $E = F = C$, $u(x, y) = xy$ (produsul numerelor), $\mathbf{g} : T\to C$ şi $\mathbf{h} : S\to C$.

5) $G = E\times F$. În acest caz aplicaţia $(t, s)\to(g(t), h(s))$ a lui $T\times S$ în $E\times F$ este $\mathbf{m}\otimes\mathbf{n}$-măsurabilă.

Corolar. *Dacă $A\subset T$ este o mulţime* **m***-măsurabilă iar $B\subset S$ este o mulţime* **n***-măsurabilă, atunci mulţimea $A\times B$ este* $\mathbf{m}\otimes\mathbf{n}$*-măsurabilă.*

c. *Proprietăţi ale funcţiilor integrabile în raport cu măsuri scalare*

Propoziţia 7. *Fie μ o măsură scalară pe T şi ν o măsură scalară pe S. Fie E, F şi G trei spaţii Banach şi $(x, y)\to xy$ o aplicaţie biliniară continuă a lui $E\times F$ în G. Dacă $\mathbf{g} : T\to E$ este o funcţie μ-integrabilă*

iar $\mathbf{h}: S \to F$ *este o funcţie* ν*-integrabilă, atunci funcţia* $\mathbf{g}(t)\,\mathbf{h}(s)$ *definită pe* $T \times S$ *cu valori în* G *este* $\mu \otimes \nu$*-integrabilă şi*

$$\iint \mathbf{g}(t)\,\mathbf{h}(s)\,d\mu(t)\,d\nu(s) = \left(\int \mathbf{g}(t)\,d\mu(t)\right)\left(\int \mathbf{h}(s)\,d\nu(s)\right)$$

Funcţia $\mathbf{g}(t)\ \mathbf{h}(s)$ este $\mu \otimes \nu$-măsurabilă deoarece $\mathbf{g}$ este μ-măsurabilă iar $\mathbf{h}$ este ν-măsurabilă. Fie $a > 0$ un număr astfel încît să avem $|xy| \leqslant a\,|x|\ |y|$ pentru orice $x \in E$ şi $y \in F$. Avem

$$\iint^{*} |\mathbf{g}(t)\,\mathbf{h}(s)|\,d|\mu|(t)\,d|\nu|(s) \leqslant a \iint |\mathbf{g}(t)|\,|\mathbf{h}(s)|\,d|\mu|(t)\,d|\nu|(s) =$$

$$= a\left(\int^{*} |\mathbf{g}(t)|\,d|\mu|(t)\right)\left(\int^{*} |h(s)|\,d|\nu|(s)\right) < +\infty.$$

Conform criteriului de integrabilitate rezultă că $\mathbf{g}(t)\,\mathbf{h}(s)$ este $|\mu| \otimes |\nu|$-integrabilă. Din inegalitatea $|\mu \otimes \nu| \leqslant |\mu| \otimes |\nu|$ deducem că $\mathbf{g}(t)\,\mathbf{h}(s)$ este $|\mu \otimes \nu|$-integrabilă, deci $\mu \otimes \nu$-integrabilă. Egalitatea din enunţ rezultă atunci din teorema lui Lebesgue-Fubini:

$$\iint \mathbf{g}(t)\,\mathbf{h}(s)\,d\mu(t)\,d\nu(s) = \int d\mu(t) \int \mathbf{g}(t)\,\mathbf{h}(s)\,d\nu(s) =$$

$$= \int\left(\int \mathbf{g}(t)\,\mathbf{h}(s)\,d\nu(s)\right) d\mu(t) = \int \mathbf{g}(t)\left(\int \mathbf{h}(s)\,d\nu(s)\right) d\mu(t) =$$

$$= \left(\int \mathbf{g}(t)\ d\mu(t)\right)\left(\int \mathbf{h}(s)\,d\nu(s)\right)$$

unde s-a ţinut seama că pentru fiecare $t \in T$, $\mathbf{g}(t) \in E$ este o aplicaţie liniară continuă a lui F în G, iar $\int \mathbf{h}(s)\,d\nu(s) \in F$ este o aplicaţie liniară continuă a lui E în G.

Corolar. *Dacă* $A \subset T$ *este o mulţime* μ*-integrabilă, iar* $B \subset S$ *este o mulţime* ν*-integrabilă, atunci mulţimea* $A \times B \subset T \times S$ *este* $\mu \otimes \nu$*-integrabilă şi*

$$(\mu \otimes \nu)(A \times B) = \mu(A)\,\nu(B).$$

Propoziţia 8. *Fie* μ *o măsură scalară pe* T *şi* ν *o măsură scalară pe* S. *Fie* E, F *şi* G *trei spaţii Banach şi* $(x, y) \to xy$ *o aplicaţie biliniară şi continuă a lui* $E \times F$ *în* G.

Dacă $\mathbf{g}: T \to E$ *este o funcţie local* μ*-integrabilă iar* $\mathbf{h}: S \to F$ *este o funcţie local* ν*-integrabilă, atunci funcţia* $\mathbf{g}(t)\,\mathbf{h}(s)$ *definită pe* $T \times S$ *cu valori în* G *este local* $\mu \otimes \nu$*-integrabilă şi*

$$(\mathbf{g}\mu) \otimes (\mathbf{h}\nu) = (\mathbf{gh})(\mu \otimes \nu).$$

Deoarece $\mathbf{g}$ este μ-măsurabilă iar $\mathbf{h}$ este ν-măsurabilă, funcţia $\mathbf{g}(t)\mathbf{h}(s)$ este $\mu\otimes\nu$-măsurabilă.

Fie $C\subset T\times S$ o mulţime compactă. Fie $K\subset T$ şi $L\subset S$ două mulţimi compacte astfel încît $C\subset K\times L$. Deoarece funcţia $\mathbf{g}\varphi_K$ este μ-integrabilă, iar funcţia $\mathbf{h}\varphi_L$ este ν-integrabilă, funcţia $\mathbf{g}(t)\,\varphi_K(t)\,\mathbf{h}(s)\varphi_L(s)$ este $\mu\otimes\nu$-integrabilă, deci $\mathbf{g}(t)\mathbf{h}(s)\varphi_C(t,s)$ este de asemenea $\mu\otimes\nu$-integrabilă. Urmează că funcţia $\mathbf{g}(t)\,\mathbf{h}(s)$ este local $\mu\otimes\nu$-integrabilă.

Pentru orice funcţie $\varphi\in\mathcal{K}(T)$ şi orice funcţie $\psi\in\mathcal{K}(S)$ avem

$$\int\varphi(t)\,\psi(s)\,\mathrm{d}\,((\mathbf{gh})(\mu\otimes\nu))=\int\varphi(t)\,\psi(s)\,\mathbf{g}(t)\,\mathbf{h}(s)\,\mathrm{d}\,\mu\otimes\nu=$$

$$=\iint\varphi(t)\,\mathbf{g}(t)\,\psi(s)\,\mathbf{h}(s)\,\mathrm{d}\mu(t)\,\mathrm{d}\nu(s)=$$

$$\left(\int\varphi(t)\,\mathbf{g}(t)\,\mathrm{d}\mu(t)\right)\left(\psi(s)\,\mathbf{h}(s)\,\mathbf{d}\nu(s)\right)=$$

$$=\left(\int\varphi\,\mathrm{d}\,(\mathbf{g}\mu)\right)\left(\int\psi\,\mathrm{d}\,(\mathbf{h}\nu)\right)$$

de unde

$$(\mathbf{gh})(\mu\otimes\nu)=(\mathbf{g}\mu)\otimes(\mathbf{h}\nu).$$

Corolarul 1. *Pentru orice măsură scalară μ pe T şi orice măsură scalară ν pe S avem*

$$|\mu\otimes\nu|=|\mu|\otimes|\nu|.$$

Există o funcţie scalară local $|\mu|$-integrabilă φ definită pe T astfel încît $|\varphi(t)|\equiv 1$ şi $\mu=\varphi|\mu|$.

Există de asemenea o funcţie scalară local $|\nu|$-integrabilă ψ definită pe S astfel încît $|\psi(s)|\equiv 1$ şi $\nu=\psi|\nu|$. Atunci funcţia $\varphi(t)\,\psi(s)$ este local $|\mu|\otimes|\nu|$-integrabilă şi avem $|\varphi(t)\,\psi(s)|\equiv 1$ deci

$$|(\varphi\psi)(|\mu|\otimes|\nu|)|=|\mu|\otimes|\nu|.$$

Urmează că

$$|\mu\otimes\nu|=|(\varphi|\mu|)\otimes(\psi|\nu|)|=|(\varphi\psi(|\mu|\otimes|\nu|)|=|\mu|\otimes|\nu|.$$

Corolarul 2. *Avem* $S(\mu\otimes\nu)=S(\mu)\times S(\nu)$.

Corolarul 3. *Dacă μ este o măsură reală pe T şi ν este o măsură reală pe S, atunci*

$$(\mu\otimes\nu)_+=\mu_+\otimes\nu_++\mu_-\otimes\nu_-,$$

$$(\mu\otimes\nu)_-=\mu_+\otimes\nu_-+\mu_-\otimes\nu_+.$$

Într-adevăr,

$$\mu\otimes\nu=(\mu_+-\mu_-)\otimes(\nu_+-\nu_-)=(\mu_+\otimes\nu_++\mu_-\otimes\nu_-)-(\mu_+\otimes\nu_-+\mu_-\otimes\nu_+)$$

și

$$|\mu\otimes\nu|=|\mu|\otimes|\nu|=(\mu_++\mu_-)\otimes(\nu_++\nu_-)=$$
$$=(\mu_+\otimes\nu_++\mu_-\otimes\nu_-)+(\mu_+\otimes\nu_-+\mu_-\otimes\nu_+)$$

de unde

$$(\mu\otimes\nu)_+=\frac{1}{2}(|\mu\otimes\nu|+\mu\otimes\nu)=\mu_+\otimes\nu_++\mu_-\otimes\nu_-$$

$$(\mu\otimes\nu)_-=\frac{1}{2}(|\mu\otimes\nu)-\mu\otimes\nu)=\mu_+\otimes\nu_-+\mu_-\otimes_+\nu.$$

Propoziția 9. *Fie μ o măsură scalară pe T, ν o măsură scalară pe S, E un spațiu Banach, F și G două spații Banach astfel încît $E\subset\mathcal{L}(F, G)$ și $H\subset G'$ un subspațiu vectorial astfel încît $<x, z>=0$ pentru orice $z'\in H$ să implice $x=0$.*

Dacă $\mathbf{g}: T\to E$ este o funcție H-slab local μ-integrabilă (respectiv simplu local μ-integrabilă) iar h este o funcție scalară local ν-integrabilă definită pe S, atunci funcția $\mathbf{g}(t)\,h(s)$ definită pe $T\times S$ cu valori în E este H-slab local $\mu\otimes\nu$-integrabilă (respectiv simplu local $\mu\otimes\nu$-integrabilă) și

$$(\mathbf{g}\mu)\otimes(h\nu)=(\mathbf{g}h)\,(\mu\otimes\nu).$$

Într-adevăr, $|\mathbf{g}|$ este local μ-integrabilă și $|h|$ este local ν-integrabilă, deci $|\mathbf{g}h|=|\mathbf{g}|\,|h|$ este local $\mu\otimes\nu$-integrabilă. Pe de altă parte, dacă $\mathbf{g}$ este H-slab local μ-integrabilă, pentru fiecare $x\in F$ și $z'\in H$, funcția $<\mathbf{g}(t)x, z'>$ este μ-măsurabilă, deci funcția $<\mathbf{g}(t)\,h(s), z'>=<\mathbf{g}(t)x, z'>h(s)$ este $\mu\otimes\nu$-măsurabilă, adică funcția $\mathbf{g}(t)\,h(s)$ este H-slab $\mu\otimes\nu$-măsurabilă și deci H-slab local $\mu\otimes\nu$-integrabilă. Afirmația relativă la integrabilitatea locală simplă se demonstrează la fel.

Să presupunem că $\mathbf{g}$ este H-slab local μ-integrabilă. Există atunci o măsură majorată $\mathbf{g}\mu: \mathcal{K}_F(T)\to H'$ astfel încît să avem

$$<\int\mathbf{f}\,\mathrm{d}(\mathbf{g}\mu), z'>=\int<\mathbf{g}(t)\,\mathbf{f}(t), z'>\mathrm{d}\mu(t)$$

pentru $\mathbf{f}\in\mathcal{K}_F(T)$ și $z'\in H$.

Deoarece $\mathbf{g}(t)\,h(s)$ este H-slab local $\mu\otimes\nu$-integrabilă, există o măsură $(\mathbf{g}h)\,(\mu\otimes\nu): \mathcal{K}_F(T\times S)\to H'$ astfel încît

$$<\int\mathbf{f}\,\mathrm{d}((\mathbf{g}h)\,(\mu\otimes\nu)), z'>=\int<\mathbf{f}(t, s)\,\mathbf{g}(t)\,h(s), z'>\mathrm{d}\mu\otimes\nu$$

pentru $\mathbf{f}\in\mathcal{K}_F(T\times S)$ și $z'\in H$.

Pentru orice funcţii $\varphi \in \mathcal{K}(T)$, $\psi \in \mathcal{K}(S)$, orice $x \in F$, şi orice $z' \in H$, avem

$$< \int \varphi\, x\, \psi \, \mathrm{d}((\mathbf{g}h)(\mu \otimes \nu)), z' > = \int < \mathbf{g}h\, \varphi x\, \psi, z' > \mathrm{d}\mu \otimes \nu =$$

$$= \iint < \mathbf{g}(t) \varphi(t)\, x, z' > h(s)\, \psi(s)\, \mathrm{d}\mu(t)\, \mathrm{d}\nu(s) =$$

$$= \left(\int < \mathbf{g}(t) \varphi(t)\, x, z' > \mathrm{d}\mu(t) \right) \left(\int h(s)\, \psi(s)\, \mathrm{d}\nu(s) \right) =$$

$$= \left(< \int \varphi(t)\, x\, \mathrm{d}(\mathbf{g}\mu), z' > \right) \left(\int \psi(s)\, \mathrm{d}(h\nu) \right) =$$

$$= < z', \left(\int \varphi(t)\, x (\mathrm{d}\mathbf{g}\mu) \right) \left(\int \psi(s)\, \mathrm{d}(h\nu) \right) >$$

de unde

$$\int \varphi\, x\, \psi\, \mathrm{d}((\mathbf{g}h)(\mu \otimes \nu)) = \left(\int \varphi\, x\, \mathrm{d}(\mathbf{g}\mu) \right) \left(\int \psi\, \mathrm{d}(h\nu) \right)$$

pentru orice $x \in F$. Deoarece

$$\int \varphi\, x\, \psi\, \mathrm{d}((\mathbf{g}h)(\mu \otimes \nu)) = x \int \varphi\, \psi\, \mathrm{d}((\mathbf{g}h)(\mu \otimes \nu))$$

şi

$$\int \varphi\, x\, \mathrm{d}(\mathbf{g}\mu) = x \int \varphi\, \mathrm{d}(\mathbf{g}\mu),$$

urmează

$$\int \varphi\, \psi\, \mathrm{d}((\mathbf{g}h)(\mu \otimes \nu)) = \left(\int \varphi\, \mathrm{d}(\mathbf{g}\mu) \right) \left(\int \psi\, \mathrm{d}(h\nu) \right)$$

pentru orice $\varphi \in \mathcal{K}(T)$ şi $\psi \in \mathcal{K}(S)$, deci

$$(\mathbf{g}h)(\mu \otimes \nu) = (\mathbf{g}\mu) \otimes (h\nu).$$

Corolarul 1. *Fie μ o măsură scalară pe T, ν o măsură scalară pe S, E un spaţiu Banach, F şi G două spaţii Banach astfel încît $E \subset \mathcal{L}(F, G)$ şi $H \subset G'$ un subspaţiu normant pentru G.*

Fie $\mathbf{g} : T \to E$ o funcţie H-slab local μ-integrabilă şi $h : S \to C$ o funcţie scalară local ν-integrabilă. Avem

$$|(\mathbf{g}\mu) \otimes (h\nu)| = |\mathbf{g}\mu| \otimes |h\nu|$$

în fiecare din următoarele cazuri:

1) *F este de tip numărabil şi există o mulţime numărabilă $Z \subset H$ normantă pentru G.*

2) *F este de tip numărabil și $\mathbf{g}$ este simplu local μ-integrabilă.*
3) *$\mathbf{g}$ este local μ-integrabilă.*
În adevăr, în fiecare din aceste cazuri avem

$$(\mathbf{g}\mu)\otimes(h\nu) = (\mathbf{g}h)(\mu\otimes\nu).$$

Folosind teorema 4, § 18, deducem

$$|(\mathbf{g}\mu)\otimes(h\nu)| = |(\mathbf{g}h)(\mu\otimes\nu)| = |\mathbf{g}h|\,|\mu\otimes\nu| =$$

$$= (|\mathbf{g}|\,|h|)(|\mu|\otimes|\nu|) = (|\mathbf{g}|\,|\mu|)\otimes(|h|\,|\nu|) = |\mathbf{g}\mu|\otimes|h\nu|.$$

Corolarul 2. *În fiecare din cazurile de la colorarul 1 avem*

$$S((\mathbf{g}\mu)\otimes(h\nu)) = S(\mathbf{g}\mu)\times S(h\nu).$$

Teorema 6. *Fie μ o măsură scalară pe T și ν o măsură scalară pe S. Dacă $\mathbf{f}$ este o funcție definită pe $T\times S$ cu valori într-un spațiu Banach E sau în $\bar{R}$, $\mu\otimes\nu$-integrabilă și nulă pe complementara reuniunii unui șir de mulțimi deschise $\mu\otimes\nu$-integrabile, atunci:*
1) *există o mulțime μ-neglijabilă $A\subset T$ astfel încît pentru $t\in A$, funcția $s\to\mathbf{f}(t, s)$ este ν-integrabilă;*
2) *funcția $t\to\int\mathbf{f}(t, s)\,\mathrm{d}\nu(s)$ definită μ-aproape peste tot pe T este μ-integrabilă și*

$$\iint\mathbf{f}(t,s)\,\mathrm{d}\mu(t)\,\mathrm{d}\nu(s) = \int\mathrm{d}\mu(t)\int\mathbf{f}(t,s)\,\mathrm{d}\nu(s).$$

Într-adevăr, $|\mu\otimes\nu| = |\mu|\otimes|\nu|$; se aplică apoi teorema 4.

d. *Proprietăți ale funcțiilor integrabile în raport cu măsuri vectoriale*

Fie X, Y și Z trei spații Banach și $(x, y)\to xy$ o aplicație biliniară continuă a lui $X\times Y$ în Z.
Fie $\mathbf{m}$ o măsură majorată pe T cu valori în X, $\mathbf{n}$ o măsură majorată pe S cu valori în Y și $\mathbf{m}\otimes\mathbf{n}$ produsul măsurilor $\mathbf{m}$ și $\mathbf{n}$, relativ la aplicația biliniară xy.
Propoziția 10. *Dacă g este o funcție scalară $\mathbf{m}$-integrabilă definită pe T iar h este o funcție scalară $\mathbf{n}$-integrabilă definită pe S, atunci funcția scalară $g(t)h(s)$ definită pe $T\times S$ este $\mathbf{m}\otimes\mathbf{n}$-integrabilă și*

$$\iint g(t)\,h(s)\,\mathrm{d}\mathbf{m}(t)\,\mathrm{d}\mathbf{m}(s) = \left(\int g(t)\,\mathrm{d}\mathbf{m}(t)\right)\left(\int h(s)\,\mathrm{d}\mathbf{n}(s)\right).$$

Deoarece g este $|\mathbf{m}|$-integrabilă iar h este $|\mathbf{n}|$-integrabilă, din propoziția 7 rezultă că $g(t)\,h(s)$ este $|\mathbf{m}|\otimes|\mathbf{n}|$-integrabilă. Urmează că $g(t)\,h(s)$ este $|\mathbf{m}\otimes\mathbf{n}|$-integrabilă, adică $\mathbf{m}\otimes\mathbf{n}$-integrabilă.
Egalitatea din enunțul propoziției rezultă imediat, ca în demonstrația propoziției 7.

Corolar. *Dacă $A \subset T$ este o mulțime* $\mathbf{m}$*-integrabilă iar $B \subset S$ este o mulțime* $\mathbf{n}$*-integrabilă, atunci mulțimea $A \times B$ este* $\mathbf{m} \otimes \mathbf{n}$*-integrabilă și*

$$(\mathbf{m} \otimes \mathbf{n})\,(A \times B) = \mathbf{m}(A)\,\mathbf{n}(B).$$

Propoziția 11. *Dacă g este o funcție scalară local* $\mathbf{m}$*-integrabilă definită pe T iar h este o funcție scalară local* $\mathbf{n}$*-integrabilă definită pe S, atunci funcția scalară $g(t)\,h(s)$ definită pe $T \times S$ este local* $\mathbf{m} \otimes \mathbf{n}$*-integrabilă și*

$$(g\mathbf{m}) \otimes (h\,\mathbf{n}) = (gh)\,(\mathbf{m} \otimes \mathbf{n}).$$

Demonstrația este aceeași ca a propoziției 8.

Corolar. *Dacă* $|\mathbf{m} \otimes \mathbf{n}| = |\mathbf{m}| \otimes |\mathbf{n}|$, *atunci*

$$|(g\mathbf{m}) \otimes (h\mathbf{n})| = |g\mathbf{m}| \otimes |h\mathbf{n}|.$$

Într-adevăr, folosind teorema 4, § 18, avem

$$|(gh)\,(\mathbf{m} \otimes \mathbf{n})| = |gh|\,|\mathbf{m} \otimes \mathbf{n}|$$

și de asemenea

$$|g\mathbf{m}| = |g|\,|\mathbf{m}| \text{ și } |h\mathbf{n}| = |h|\,|\mathbf{n}|.$$

Atunci

$$|(g\mathbf{m}) \otimes (h\mathbf{n})| = |(gh)\,(\mathbf{m} \otimes \mathbf{n})| = |gh|\,|\mathbf{m} \otimes \mathbf{n}| =$$
$$= (|g|\,|h|)\,(|\mathbf{m}| \otimes |\mathbf{n}|) = (|g|\,|\mathbf{m}|) \otimes (|h|\,|\mathbf{n}|) = |g\mathbf{m}| \otimes |h\mathbf{n}|.$$

e. *Proprietăți ale produsului dintre o măsură vectorială și o măsură scalară*

Fie X un spațiu Banach $\mathbf{m}$ o măsură majorată definită pe T cu valori în X și ν o măsură scalară definită pe S.

Fie F și G două spații Banach și $(x, y) \to xy$ o aplicație biliniară continuă a lui $X \times F$ în G.

Propoziția 12. *Dacă g este o funcție scalară* $\mathbf{m}$*-integrabilă definită pe T, iar $\mathbf{h} : S \to F$ este o funcție* ν*-integrabilă, atunci funcția $g(t)\,\mathbf{h}(s)$ definită pe $T \times S$ cu valori în F este* $\mathbf{m} \otimes \nu$*-integrabilă și*

$$\iint g(t)\,\mathbf{h}(s)\,d\mathbf{m}(t)\,d\nu(s) = \left(\int g(t)\,d\mathbf{m}(t)\right)\left(\int \mathbf{h}(s)\,d\nu(s)\right).$$

Demonstrația este aceeași ca a propoziției 7.

Propoziția 13. *Dacă g este o funcție scalară local* $\mathbf{m}$*-integrabilă definită pe T iar $\mathbf{h} : S \to F$ este o funcție local* ν*-integrabilă, atunci funcția $g(t)\,\mathbf{h}(s)$ definită pe $T \times S$ cu valori în F este local* $\mathbf{m} \otimes \nu$*-integrabilă și*

$$(g\mathbf{m}) \otimes (\mathbf{h}\nu) = (g\mathbf{h})\,(\mathbf{m} \otimes \nu).$$

Demonstrația este aceeași ca a propoziției 8.

Propoziția 14. *Fie X, F și G trei spații Banach astfel încît $X \subset \mathcal{L}(F, G)$, $\mathbf{m} : \mathcal{K}(T) \to X$ o măsură majorată pe T și ν o măsură scalară pe S.*

Dacă F este de tip numărabil și dacă există o mulțime numărabilă $Z \subset G'$ normantă pentru G, atunci

$$|\mathbf{m} \otimes \nu| = |\mathbf{m}| \otimes |\nu|.$$

Într-adevăr, notînd $\mu = |\mathbf{m}|$, există o funcție $\mathbf{g} : T \to \mathcal{L}(F, Z')$ slab local μ-integrabilă astfel încît $\mathbf{m} = \mathbf{g}\mu$ și $|\mathbf{m}| = |\mathbf{g}|\mu$ (teorema 2, §18). Folosind corolarul 1 al propoziției 9, deducem atunci

$$|\mathbf{m} \otimes \nu| = |(\mathbf{g}\mu) \otimes \nu| = |\mathbf{g}\mu| \otimes |\nu| = |\mathbf{m}| \otimes |\nu|.$$

Corolarul 1. *În condițiile propoziției 14 avem*

$$S(\mathbf{m} \otimes \nu) = S(\mathbf{m}) \times S(\nu).$$

Corolarul 2. *Fie g o funcție scalară local $\mathbf{m}$-integrabilă și h o funcție scalară local ν-integrabilă. În condițiile propoziției 14 avem*

$$|(g\mathbf{m}) \otimes (h\nu)| = |g\mathbf{m}| \otimes |h\nu|.$$

Într-adevăr, în acest caz avem $|\mathbf{m} \otimes \nu| = |\mathbf{m}| \otimes |\nu|$, $|g\mathbf{m}| = |g||\mathbf{m}|$, $|h\nu| = |h||\nu|$ și $|(gh)(\mathbf{m} \otimes \nu)| = |gh||\mathbf{m} \otimes \nu|$ deci

$$|(g\mathbf{m}) \otimes (h\nu)| = |(gh)(\mathbf{m} \otimes \nu)| = |gh||\mathbf{m} \otimes \nu| = (|g||h|)(|\mathbf{m}| \otimes |\nu|) =$$
$$= (|g||\mathbf{m}|) \otimes (|h||\nu|) = |g\mathbf{m}| \otimes |h\nu|.$$

Teorema 7. *În condițiile propoziției* 14, *dacă $\mathbf{f} : T \times S \to F$ este o funcție $\mathbf{m} \otimes \nu$-integrabilă și nulă pe complementara reuniunii unui șir de mulțimi deschise $\mathbf{m} \otimes \nu$-integrabile, atunci :*

1) *există o mulțime $\mathbf{m}$-neglijabilă $A \subset T$ astfel încît pentru $t \in A$, funcția $s \to \mathbf{f}(t, s)$ este ν-integrabilă ;*

2) *funcția $t \to \int \mathbf{f}(t, s)\, d\nu(t)$ definită $\mathbf{m}$-aproape peste tot pe T, cu valori în F, este $\mathbf{m}$-integrabilă și*

$$\iint \mathbf{f}(t, s)\, d\mathbf{m}(t)\, d\nu(s) = \int d\mathbf{m}(t) \int \mathbf{f}(t, s)\, d\nu(s).$$

Într-adevăr,

$$|\mathbf{m} \otimes \nu| = |\mathbf{m}| \otimes |\nu|.$$

În condițiile teoremei sînt valabile și următoarele afirmații :

1') *există o mulțime ν-neglijabilă $B \subset S$ astfel încît pentru $s \in B$, funcția $t \to \mathbf{f}(t, s)$ este $\mathbf{m}$-integrabilă ;*

2') *funcția $s \to \int \mathbf{f}(t, s)\, d\mathbf{m}(t)$ definită ν-aproape peste tot pe S cu valori în F este ν-integrabilă și*

$$\iint \mathbf{f}(t, s)\, d\mathbf{m}(t)\, d\nu(s) = \int d\nu(s) \int \mathbf{f}(t, s)\, d\mathbf{m}(t).$$

f. *Proprietăți ale măsurilor cu valori într-o algebră*

Fie E o algebră Banach, $\mathbf{m}$ o măsură majorată pe T cu valori în E și $\mathbf{n}$ o măsură majorată pe S cu valori în E și $\mathbf{m}\otimes\mathbf{n}$ produsul măsurilor $\mathbf{m}$ și $\mathbf{n}$ relativ la înmulțirea xy din algebra E.

Se demonstrează ca mai sus următoarele propoziții:

Propoziția 15. *Dacă funcția* $\mathbf{g}: T \to E$ *este* $\mathbf{m}$-*integrabilă și funcția* $\mathbf{h}: S \to E$ *este* $\mathbf{n}$-*integrabilă, atunci funcția* $\mathbf{gh}: T \times S \to E$ *este* $\mathbf{m}\otimes\mathbf{n}$-*integrabilă și*

$$\iint \mathbf{g}(t)\,\mathbf{h}(s)\,\mathbf{dm}(t)\,\mathbf{dn}(s) = \left(\int \mathbf{g}(t)\,\mathbf{dm}(t)\right)\left(\int \mathbf{h}(s)\,\mathbf{dn}(s)\right).$$

Propoziția 16. *Dacă* $\mathbf{g}: T \to E$ *este local* $\mathbf{m}$-*integrabilă iar* $\mathbf{h}: S \to E$ *este local* $\mathbf{n}$-*integrabilă, atunci* $\mathbf{gh}: T \times S \to E$ *este local* $\mathbf{m}\otimes\mathbf{n}$-*integrabilă și*

$$(\mathbf{gm})\otimes(\mathbf{hn}) = (\mathbf{gh})(\mathbf{m}\otimes\mathbf{n}).$$

Teorema 8. *Dacă* E *este de tip numărabil, dacă una din măsurile* $\mathbf{m}$ *sau* $\mathbf{n}$ *este scalară și dacă* $\mathbf{f}: T \times S \to E$ *este o funcție* $\mathbf{m}\otimes\mathbf{n}$-*integrabilă, nulă pe complementara reuniunii unui șir de mulțimi deschise* $\mathbf{m}\otimes\mathbf{n}$-*integrabile, atunci*:

1) *există o mulțime* $\mathbf{m}$-*integrabilă* $A \subset T$ *astfel încît pentru* $t \in A$, *funcția* $s \to \mathbf{f}(t, s)$ *este* $\mathbf{n}$-*integrabilă*;

2) *funcția* $t \to \int \mathbf{f}(t, s)\,\mathbf{dn}(t)$ *definită* $\mathbf{m}$-*aproape peste tot pe* T *este* $\mathbf{m}$-*integrabilă și*

$$\iint \mathbf{f}(t, s)\,\mathbf{dm}(t)\,\mathbf{dn}(s) = \int \mathbf{dm}(t) \int \mathbf{f}(t, s)\,\mathbf{dn}(t).$$

g. *Proprietăți ale imaginilor și restricțiilor de măsuri*

Fie X, Y și Z trei spații Banach, $(x, y) \to xy$ o aplicație biliniară continuă a lui $X \times Y$ în Z, $\mathbf{m}$ o măsură majorată pe T cu valori în X, $\mathbf{n}$ o măsură majorată pe S cu valori în Y și $\mathbf{m}\otimes\mathbf{n}$ produsul măsurilor $\mathbf{m}$ și $\mathbf{n}$ relativ la aplicația biliniară xy.

Propoziția 17. *Fie* T' *și* S' *două spații local compacte. Dacă* $\alpha: T \to T'$ *este o funcție* $\mathbf{m}$-*proprie iar* $\beta: S \to S'$ *este o funcție* $\mathbf{n}$-*proprie, atunci funcția* $\alpha \times \beta: T \times S \to T' \times S'$ *este* $\mathbf{m}\otimes\mathbf{n}$-*proprie și*

$$(\alpha \times \beta)(\mathbf{m}\otimes\mathbf{n}) = \alpha(\mathbf{m})\otimes\beta(\mathbf{n}).$$

Deoarece α este $\mathbf{m}$-măsurabilă și β este $\mathbf{n}$-măsurabilă, aplicația $(t, s) \to (\alpha(t), \beta(s))$ a lui $T \times S$ în $T' \times S'$ este $\mathbf{m}\otimes\mathbf{n}$-măsurabilă, adică aplicația $(t, s) \to (\alpha \times \beta)(t, s)$ este $\mathbf{m}\otimes\mathbf{n}$-măsurabilă.

Fie $K' \subset T'$ şi $L' \subset S'$ două mulţimi compacte. Atunci $\alpha^{-1}(K') \subset T$ este $\mathbf{m}$-integrabilă şi $\beta^{-1}(L') \subset S$ este $\mathbf{n}$-integrabilă, deci mulţimea $\alpha^{-1}(K') \times \beta^{-1}(L') = (\alpha \times \beta)^{-1}(K' \times L')$ este $\mathbf{m} \otimes \mathbf{n}$-integrabilă. Urmează că pentru orice mulţime compactă $C' \subset T' \times S'$, mulţimea $(\alpha \times \beta)^{-1}(C')$ este $\mathbf{m} \otimes \mathbf{n}$-integrabilă, deci $\alpha \times \beta$ este $\mathbf{m} \otimes \mathbf{n}$-proprie.

Pentru orice funcţii $g' \in \mathcal{K}(T')$ şi $h' \in \mathcal{K}(S')$ avem

$$\int f'(t')\, g'(s')\, \mathrm{d}(\alpha \times \beta)(\mathbf{m} \otimes \mathbf{n}) = \int f'(\alpha(t))\, g'(\beta(s))\, \mathbf{dm} \otimes \mathbf{n} =$$

$$= \iint f'(\alpha(t))\, g'(\beta(s))\, \mathbf{dm}(t)\, \mathbf{dn}(s) = \left(\int f'(\alpha(t))\, \mathbf{dm}(t)\right)\left(\int g'(\beta(s))\, \mathbf{dn}(s)\right) =$$

$$= \left(\int f'\, \mathrm{d}\alpha(\mathbf{m})\right)\left(\int g'\, \mathrm{d}\beta(\mathbf{n})\right)$$

de unde

$$(\alpha \times \beta)(\mathbf{m} \otimes \mathbf{n}) = \alpha(\mathbf{m}) \otimes \beta(\mathbf{n}).$$

Propoziţia 18. *Dacă T' este un subspaţiu local compact al lui T iar S' este un subspaţiu local compact al lui S, atunci*

$$(\mathbf{m} \otimes \mathbf{n})_{S' \times T'} = \mathbf{m}_{T'} \otimes \mathbf{n}_{S'}.$$

Fie $g' \in \mathcal{K}(T')$ şi $h' \in \mathcal{K}(S')$ şi fie g (respectiv h) funcţia obţinută din g' (respectiv h') prelungind-o cu 0 pe $T - T'$ (respectiv $S - S'$). Funcţia g este $\mathbf{m}$-integrabilă, funcţia h este $\mathbf{n}$-integrabilă şi

$$\int g'\, \mathbf{dm}_{T'} = \int g\, \mathbf{dm}, \quad \int h'\, \mathbf{dn}_{S'} = \int h\, \mathbf{dn}.$$

Funcţia obţinută din $g'(t)\, h'(s)$ prin prelungire cu 0 pe $T \times S - T' \times S'$ este funcţia $g(t)\, h(t)$, deci

$$\int g'(t)\, h'(s)\, \mathrm{d}(\mathbf{m} \otimes \mathbf{n})_{T' \times S'} = \int g(t)\, h(s)\, \mathrm{d}(\mathbf{m} \otimes \mathbf{n}).$$

Atunci

$$\int g'(t)\, h'(s)\, \mathrm{d}(\mathbf{m} \otimes \mathbf{n})_{S' \times T'} = \iint g(t)\, h(s)\, \mathbf{dm}(t)\, \mathbf{dn}(s) =$$

$$= \left(\int g(t)\, \mathbf{dm}(t)\right)\left(\int h(s)\, \mathbf{dn}(s)\right) = \left(\int g'(t)\, \mathbf{dm}_{T'}(t)\right)\left(\int h'(s)\, \mathbf{dn}_{S'}(s)\right) =$$

$$= \iint g'(t)\, h'(s)\, \mathbf{dm}_{T'}(t)\, \mathbf{dn}_{S'}(s) = \int g'(t)\, h'(s)\, \mathrm{d}(\mathbf{m}_{T'} \otimes \mathbf{n}_{S'})$$

de unde

$$(\mathbf{m} \otimes \mathbf{n})_{T' \times S'} = \mathbf{m}_{T'} \otimes \mathbf{n}_{S'}.$$

5. Integrarea în raport cu un produs finit de măsuri

Fie $(T_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ o familie finită de spații local compacte și $T=\prod_{i=1}^{n} T_i$ produsul lor.

Folosind lema 1 și principiul inducției complete, rezultă că mulțimea combinațiilor liniare de funcții de forma $(t_1, t_2, \ldots, t_n) \to f_1(t_1)f_2(t_2)\ldots \ldots f_n(t_n)$, cu $f_i \in \mathcal{K}(T_i)$ pentru fiecare i, este bogată în $\mathcal{K}(T)$.

Fie $(E_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ o familie de spații Banach și $(u_1, u_2, \ldots, u_n) \to u_1 u_2 \ldots u_n$ o aplicație multiliniară și continuă pe ΠE_i cu valori într-un spațiu Banach E.

Pentru fiecare i fie $\mathbf{m}_i$ o măsură majorată pe T_i cu valori în E_i.

Există atunci o măsură majorată $\mathbf{m}$ pe T cu valori în E, și numai una, care verifică egalitatea

$$\mathbf{m}\left(\prod_{i=1}^{n} f_i\right) = \prod_{i=1}^{n} \mathbf{m}(f_i), \text{ pentru } f_i \in \mathcal{K}(T_i), \qquad 1 \leqslant i \leqslant n.$$

Unicitatea măsurii rezultă din faptul că spațiul vectorial generat de funcțiile $\prod_{i=1}^{n} f_i$ este bogat în $\mathcal{K}(T)$. Existența măsurii $\mathbf{m}$ se demonstrează prin recurență asupra lui n, luînd

$$\mathbf{m} = (\mathbf{m}_1 \otimes \mathbf{m}_2 \otimes \ldots \otimes \mathbf{m}_{n-1}) \otimes \mathbf{m}_n .$$

Măsura $\mathbf{m}$ se numește produsul măsurilor $\mathbf{m}_i$, $1 \leqslant i \leqslant n$, și se notează $\mathbf{m}_1 \otimes \mathbf{m}_2 \otimes \ldots \otimes \mathbf{m}_n$ sau $\bigotimes_{i=1}^{n} \mathbf{m}_i$. Avem

$$\left|\bigotimes_{i=1}^{n} \mathbf{m}_i\right| \leqslant \bigotimes_{i=1}^{n} |\mathbf{m}_i| .$$

Din egalitatea

$$\left(\bigotimes_{i=1}^{n} \mathbf{m}_i\right)\left(\prod_{i=1}^{n} f_i\right) = \prod_{i=1}^{n} \mathbf{m}_i(f_i)$$

rezultă următoarea formulă de asociativitate a produsului de măsuri:

$$\bigotimes_{k=1}^{p}\left(\bigotimes_{i\in I_k} \mathbf{m}_i\right) = \bigotimes_{i=1}^{n} \mathbf{m}_i$$

oricare ar fi partiția $(I_k)_{1\leqslant k\leqslant p}$ a mulțimii $\{1, 2, \ldots, n\}$.

Integrala unei funcții $f \in \mathcal{K}(T)$ în raport cu măsura produsă $\bigotimes_{i=1}^{n} \mathbf{m}_i$ se notează

$$\int f \, d\mathbf{m}_1 \, d\mathbf{m}_2 \ldots d\mathbf{m}_n \quad \text{sau} \quad \iint \ldots \int f \, d\mathbf{m}_1 \, d\mathbf{m}_2 \ldots d\mathbf{m}_n$$

sau încă

$$\iint \ldots \int f(t_1, t_2, \ldots, t_n) \, d\mathbf{m}_1(t_1) \, d\mathbf{m}_2(t_2) \ldots d\mathbf{m}_n(t_n) .$$

Pentru aceste notații se folosește denumirea de *integrală multiplă de ordinul n.*

Pentru orice permutare σ a mulțimii $\{1, 2, \ldots, n\}$ și pentru orice funcție $f \in \mathcal{K}(T)$ avem egalitatea

$$\iint \ldots \int f \, \mathrm{dm}_1 \, \mathrm{dm}_2 \ldots \mathrm{dm}_n = \int \mathrm{dm}_{\sigma(1)} \int \mathrm{dm}_{\sigma(2)} \ldots \int f \, \mathrm{dm}_{\sigma(n)} .$$

Această egalitate rezultă din formula de asociativitate și din proprietatea de schimbare a ordinei de integrare.

Rezultatele privind produsul a două măsuri se extind fără dificultate la produsul unui număr finit de măsuri.

Ne mărginim să enunțăm teorema lui Fubini pentru $n = 3$ și măsuri pozitive μ_i .

Propoziția 19. *Dacă* $f : T \to E$ *este integrabilă pentru* $\mu = \mu_1 \otimes \mu_2 \otimes \mu_3$ *și nulă pe complementara reuniunii unui șir de mulțimi deschise* μ*-integrabile din* T*, atunci integralele iterate ale lui* f *există și avem egalitățile*

$$\iiint \mathrm{f}(t_1, t_2, t_3) \, \mathrm{d}\mu_1(t_1) \, \mathrm{d}\mu_2(t_2) \, \mathrm{d}\mu_3(t_3) = \iint \mathrm{d}\mu_1(t_1) \, \mathrm{d}\mu_2(t_2) \int \mathrm{f}(t_1, t_2, t_3) \, \mathrm{d}\mu_3(t_3) =$$

$$= \int \mathrm{d}\mu_1(t_1) \iint \mathrm{f}(t_1, t_2, t_3) \, \mathrm{d}\mu_2(t_2) \, \mathrm{d}\mu_3(t_3) = \int \mathrm{d}\mu_1(t_1) \int \mathrm{d}\mu_2(t_2) \int \mathrm{f}(t_1, t_2, t_3) \, \mathrm{d}\mu_3(t_3) .$$

Într-adevăr, aplicînd teorema lui Fubini deducem că funcția $(t_1, t_2) \to$ $\to \int \mathrm{f}(t_1, t_2, t_3) \, \mathrm{d}\mu_3(t_3)$ este definită $\mu_1 \otimes \mu_2$-aproape peste tot pe $T_1 \times T_2$, este nulă pe complementara reuniunii unui șir de mulțimi deschise $\mu_1 \otimes \mu_2$-integrabile din $T_1 \times T_2$ (observația 2° după teorema 2), este $\mu_1 \otimes \mu_2$-integrabila și avem

$$\iiint \mathrm{f}(t_1, t_2, t_3) \, \mathrm{d}\mu_1(t_1) \, \mathrm{d}\mu_2(t_2) \, \mathrm{d}\mu_3(t_3) = \iint \mathrm{d}\mu_1(t_1) \, \mathrm{d}\mu_2(t_2) \int \mathrm{f}(t_1, t_2, t_3) \, \mathrm{d}\mu_3(t_3) .$$

Aplicînd încă o dată teorema lui Fubini funcției $(t_1, t_2) \to$ $\to \int \mathrm{f}(t_1, t_2, t_3) \, \mathrm{d}\mu_3(t_3)$ deducem că funcția $t_1 \to \int \mathrm{d}\mu_2(t_2) \int \mathrm{f}(t_1, t_2, t_3) \, \mathrm{d}\mu_3(t_3)$ este definită μ_1-aproape peste tot, este μ_1-integrabilă și

$$\iint \mathrm{d}\mu_1(t_1) \, \mathrm{d}\mu_2(t_2) \int \mathrm{f}(t_1, t_2, t_3) \, \mathrm{d}\mu_3(t_3) = \int \mathrm{d}\mu_1(t_1) \int \mathrm{d}\mu_2(t_2) \int \mathrm{f}(t_1, t_2, t_3) \, \mathrm{d}\mu_3(t_3) .$$

La fel rezultă că funcția $t_1 \to \iint \mathrm{f}(t_1, t_2, t_3) \, \mathrm{d}\mu_2(t_2) \, \mathrm{d}\mu_3(t_3)$ este definită μ_1-aproape peste tot, este μ_1-integrabilă și

$$\iiint \mathrm{f}(t_1, t_2, t_3) \, \mathrm{d}\mu_1(t_1) \, \mathrm{d}\mu_2(t_2) \, \mathrm{d}\mu_3(t_3) = \int \mathrm{d}\mu_1(t_1) \iint \mathrm{f}(t_1, t_2, t_3) \, \mathrm{d}\mu_2(t_2) \, \mathrm{d}\mu_3(t_3) .$$

PARTEA A TREIA

MĂSURI PE GRUPURI LOCAL COMPACTE

§ 23. MĂSURA HAAR

1. Grupuri topologice

În cele ce urmează, operația de compunere dintr-un grup G va fi notată multiplicativ, $x \cdot y$ sau xy, iar elementul unitate va fi notat cu e.

Dacă $A \subset G$, $B \subset G$ și $x \in G$, folosim următoarele notații:

$$AB = \{xy \mid x \in A,\ y \in B\},\quad xA = \{xy \mid y \in A\},\quad Ax = \{yx \mid y \in A\},$$
$$A^{-1} = \{x^{-1} \mid x \in A\}.$$

Definiția 1. *Se numește grup topologic, o mulțime G înzestrată cu o structură de grup și o structură topologică, verificînd următoarele două condiții:*

1) *aplicația $(x, y) \to xy$ a lui $G \times G$ în G este continuă;*

2) *aplicația $x \to x^{-1}$ a lui G în G este continuă.*

Aceste două condiții sînt echivalente cu condiția următoare:

aplicația $(x, y) \to xy^{-1}$ a lui $G \times G$ în G este continuă.

Condițiile 1) și 2) exprimă compatibilitatea dintre structura de grup și structura topologică pe G.

Fie G un grup topologic.

Pentru orice element $a \in G$ translația la stînga $x \to ax$, translația la dreapta $x \to xa$ și simetria $x \to x^{-1}$ sînt omeomorfisme ale lui G pe G.

Rezultă că dacă $a \in G$ și A este o mulțime deschisă (respectiv închisă) din G, atunci aA, Aa și A^{-1} sînt deschise (respectiv închise).

Dacă A este o mulțime oarecare din G iar B este deschisă, atunci AB și BA sînt deschise. Dacă însă A și B sînt închise, nu rezultă că AB este închisă.

Dacă G este separat, și dacă A este o mulțime compactă în G, iar $a \in G$, atunci mulțimile aA, Aa și A^{-1} sînt compacte. Dacă, în plus, B este o mulțime închisă, atunci AB este închisă, iar dacă B este compactă, atunci AB este compactă.

Dacă $\mathcal{V}$ este filtrul vecinătăților lui e, atunci pentru orice element $a \in G$, filtrul vecinătăților lui a coincide cu familia $a\mathcal{V} = \{aV \mid V \in \mathcal{V}\}$ și cu familia $\mathcal{V}a = \{Va \mid V \in \mathcal{V}\}$.

Filtrul $\mathcal{V}$ al vecinătăţilor lui e este caracterizat de următoarele patru proprietăţi :

1) *pentru orice* $U \in \mathcal{V}$ *există* $V \in \mathcal{V}$ *cu* $V \cdot V \subset U$;

2) *pentru orice* $U \in \mathcal{V}$ *avem* $U^{-1} \in \mathcal{V}$.

Aceste două proprietăţi sînt echivalente cu proprietatea următoare : *pentru orice* $U \in \mathcal{V}$, *există* $V \in \mathcal{V}$ *cu* $VV^{-1} \subset U$;

3) *pentru orice* $U \in \mathcal{V}$ *avem* $e \in U$;

4) *pentru orice* $a \in G$ *şi orice* $V \in \mathcal{V}$ *avem* $aVa^{-1} \in \mathcal{V}$.

Proprietăţile 1), 2) şi 4) exprimă continuitatea aplicaţiilor $(x, y) \to x \cdot y$, $x \to x^{-1}$ şi $x \to axa^{-1}$. Dacă G este comutativ, avem $aVa^{-1} = V$, deci proprietatea 4) este verificată de la sine chiar dacă structura topologică nu este compatibilă cu structura de grup.

O mulţime $\mathcal{U}$ de vecinătăţi ale lui e este un sistem fundamental de vecinătăţi ale lui e, dacă şi numai dacă îndeplineşte următoarele condiţii :

1') pentru orice $U \in \mathcal{U}$ există $V \in \mathcal{U}$ cu $V \cdot V \subset U$;

2') pentru orice $U \in \mathcal{U}$ există $V \in \mathcal{U}$ cu $V \subset U^{-1}$;

3') pentru orice $U \in \mathcal{U}$ avem $e \in U$;

4') pentru orice $a \in G$ şi orice $U \in \mathcal{U}$ există $V \in \mathcal{U}$ cu $V \subset aUa^{-1}$.

Dacă $\mathcal{U}$ este un sistem fundamental de vecinătăţi ale lui e, atunci $a\mathcal{U}$ şi $\mathcal{U}a$ sînt sisteme fundamentale de vecinătăţi ale lui a. O vecinătate V a lui e este simetrică dacă $V = V^{-1}$. Dacă $V \in \mathcal{V}$, atunci $V \cup V^{-1}$, $V \cap V^{-1}$, VV^{-1} sînt simetrice. Mulţimea vecinătăţilor simetrice ale lui e formează un sistem fundamental de vecinătăţi ale lui e.

Dacă $\mathcal{U}$ este un sistem fundamental de vecinătăţi ale lui e, atunci pentru fiecare număr natural n, familia $\{ V^n \mid V \in \mathcal{U} \}$ este un sistem fundamental de vecinătăţi ale lui e.

Un grup topologic G este separat dacă şi numai dacă mulţimea $\{e\}$ este închisă.

Spunem că o funcţie f definită pe G cu valori într-un spaţiu Banach E este *uniform continuă la stînga* (respectiv la dreapta) pe o mulţime $A \subset G$ dacă :

pentru orice $\varepsilon > 0$ *există o vecinătate* V *a lui* e *astfel încît să avem*

$$|\mathbf{f}(x) - \mathbf{f}(y)| < \varepsilon, \text{ pentru orice } x \in G \text{ şi } y \in A \text{ cu } xy^{-1} \in V$$

(respectiv pentru orice $x \in A$ şi $y \in G$ cu $x^{-1}y \in V$).

Se constată uşor că f *este uniform continuă la stînga pe* A *dacă şi numai dacă, pentru orice* $\varepsilon > 0$, *există o vecinătate* V *a lui* e *astfel încît*

$$|\mathbf{f}(sx) - \mathbf{f}(x)| < \varepsilon, \text{ pentru orice } x \in A \text{ şi orice } s \in V$$

şi că f *este uniform continuă la dreapta pe* A *dacă şi numai dacă, pentru orice* $\varepsilon > 0$, *există o vecinătate* V *a lui* e *astfel încît*

$$|\mathbf{f}(xs) - \mathbf{f}(x)| < \varepsilon, \text{ pentru orice } x \in A \text{ şi orice } s \in V.$$

O funcţie uniform continuă (la stînga, la dreapta) pe G va fi numită funcţie uniform continuă (la stînga, la dreapta), fără altă specificaţie.

Dacă grupul G este comutativ, continuitatea uniformă la stînga este echivalentă cu continuitatea uniformă la dreapta. În acest caz vom spune, simplu, continuitate uniformă.

2. Grupuri local compacte

În cele ce urmează vom nota cu G un grup topologic local compact.

Un grup topologic este local compact dacă şi numai dacă elementul unitate e are o vecinătate compactă.

Vom arăta că funcţiile continue cu suport compact definite pe G sînt uniform continue. Pentru aceasta vom demonstra mai întîi lema următoare.

Lema 1. *Fie S, T şi E trei spaţii topologice şi $f: S \times T \to E$ o funcţie continuă. Dacă W este o mulţime deschisă în E iar K este o mulţime compactă în T, atunci mulţimea*

$$L = \{s \mid f(s, t) \in W \text{ pentru orice } t \in K\}$$

este deschisă în S.

Fie $s_0 \in L$ fix. Pentru fiecare $t \in K$, funcţia f este continuă în (s_0, t) şi avem $f(s_0, t) \in W$. Există deci o mulţime deschisă $U \times V$ în $S \times T$ care conţine pe (s_0, t) astfel încît

$$f(s, t) \in W \quad \text{pentru} \quad (s, t) \in U \times V.$$

Dar K este compactă. Există deci o familie finită $(U_i \times V_i)$ de mulţimi deschise, astfel încît $s_0 \in U_i$ pentru $1 \leqslant i \leqslant n$, $K \subset \bigcup_{i=1}^{n} V_i$ şi pentru fiecare i

$$f(s, t) \in W, \quad \text{pentru} \quad (s, t) \in U_i \times V_i .$$

Mulţimea $V = \bigcap_{i=1}^{n} V_i$ este o vecinătate a lui s_0. Pentru $(s, t) \in V \times K$ avem $f(s, t) \in W$ deci $V \subset L$. Urmează că s_0 este punct interior al lui L. Cum s_0 a fost ales arbitrar, rezultă că L este o mulţime deschisă.

Propoziţia 1. *Fie E un spaţiu Banach. Orice funcţie $\mathbf{f} \in \mathcal{K}_E(G)$ este uniform continuă la stînga şi la dreapta.*

Fie $\mathbf{f} \in \mathcal{K}_E(G)$, fie K suportul lui $\mathbf{f}$ şi fie U o vecinătate simetrică compactă a lui e. Conform lemei precedente, mulţimea

$$L = \{y \mid |\mathbf{f}(yx) - \mathbf{f}(x)| < \varepsilon \text{ pentru orice } x \in UK\}$$

este deschisă şi conţine pe e. Pe de altă parte, dacă $y \in U$ şi $x \notin UK$ avem $\mathbf{f}(x) = 0$ şi $\mathbf{f}(yx) = 0$. Punînd $V = L \cap U$, pentru orice $y \in V$ şi orice $x \in G$ avem

$$|\mathbf{f}(yx) - \mathbf{f}(x)| < \varepsilon$$

deci $\mathbf{f}$ este uniform continuă la stînga.

Luînd

$$L' = \{y \mid |\mathbf{f}(xy) - \mathbf{f}(x)| < \varepsilon \text{ pentru orice } x \in KU\}$$

şi notînd $V' = L' \cap U$, deducem că pentru orice $y \in V'$ şi orice $x \in G$ avem

$$|\mathrm{f}(xy) - \mathrm{f}(x)| < \varepsilon,$$

deci f este uniform continuă la dreapta şi propoziţia este demonstrată.

Dacă f este o funcţie definită pe G cu valori într-un spaţiu Banach E, vom nota cu $\check{\mathrm{f}}$ funcţia definită pe G prin egalitatea

$$\check{\mathrm{f}}(x) = \mathrm{f}(x^{-1}).$$

Dacă $s \in G$ vom nota cu f_s şi f^s funcţiile definite pe G prin egalităţile

$$\mathrm{f}_s(x) = \mathrm{f}(sx), \quad \mathrm{f}^s(x) = \mathrm{f}(xs^{-1}).$$

Avem $\mathrm{f}_e = \mathrm{f}^e = \mathrm{f}$.

Pentru orice mulţime $A \subset G$ avem $(\varphi_A)_s = \varphi_{s^{-1}A}$ şi $(\varphi_A)^s = \varphi_{As}$. Dacă G este comutativ avem $f^s = f_{s^{-1}}$.

Dacă $\mathrm{f} \in \mathcal{K}_E(G)$, atunci funcţiile f_s, f^s şi $\check{\mathrm{f}}$ aparţin de asemenea lui $\mathcal{K}_E(G)$; urmează că dacă μ este o măsură pozitivă pe G şi $1 \leqslant p \leqslant +\infty$ şi dacă $\mathrm{f} \in \mathcal{K}_E(G)$, atunci funcţiile f_s, f^s şi $\check{\mathrm{f}}$ aparţin spaţiului $\mathcal{L}^p_E(\mu)$.

Propoziţia 2. *Dacă* $\mathrm{f} \in \mathcal{K}_E(G)$, *atunci aplicaţiile* $s \to \mathrm{f}_s$ şi $s \to \mathrm{f}^s$ *ale lui* G *în* $\mathcal{K}_E(G)$ *sînt uniform continue la stînga.*

Fie $\varepsilon > 0$. Deoarece f este uniform continuă la stînga, există o vecinătate V a lui e astfel încît să avem

$$|\mathrm{f}(y) - \mathrm{f}(z)| < \varepsilon \quad \text{dacă} \quad yz^{-1} \in V.$$

Fie $x \in G$ şi $st^{-1} \in V$. Luînd $y = sx$ şi $z = tx$ avem $yz^{-1} = st^{-1} \in V$ deci

$$|\mathrm{f}(sx) - \mathrm{f}(tx)| < \varepsilon,$$

adică

$$|\mathrm{f}_s(x) - \mathrm{f}_t(x)| < \varepsilon.$$

Urmează că

$$\|\mathrm{f}_s - \mathrm{f}_t\| = \sup_{x \in G} |\mathrm{f}_s(x) - \mathrm{f}_t(x)| < \varepsilon \quad \text{dacă} \quad st^{-1} \in V,$$

deci aplicaţia $s \to \mathrm{f}_s$ a lui G în $\mathcal{K}_E(G)$ este uniform continuă la stînga.

Deoarece f este uniform continuă la dreapta, există o vecinătate W a lui e astfel încît

$$|\mathrm{f}(y) - \mathrm{f}(z)| < \varepsilon, \quad \text{dacă} \quad y^{-1}z \in W.$$

Fie $x \in G$ şi $st^{-1} \in V$. Luînd $y = xs^{-1}$ şi $z = xt^{-1}$ avem $y^{-1}z = st^{-1} \in V$ deci

$$|\mathrm{f}(xs^{-1}) - \mathrm{f}(xt^{-1})| < \varepsilon,$$

adică

$$|\mathrm{f}^s(x) - \mathrm{f}^t(x)| < \varepsilon.$$

Urmează că

$$\|\mathbf{f}^s - \mathbf{f}^t\| < \varepsilon, \quad \text{dacă} \quad st^{-1} \in W,$$

deci aplicația $s \to \mathbf{f}^s$ a lui G în $\mathcal{K}_E(G)$ este uniform continuă la dreapta.

Propoziția 3. *Fie E un spațiu Banach, μ o măsură pozitivă pe G și $1 \leqslant p < +\infty$. Dacă $\mathbf{f} \in \mathcal{K}_E(G)$, atunci aplicațiile $s \to \mathbf{f}_s$ și $s \to \mathbf{f}^s$ ale lui G în $\mathcal{L}_E^p(\mu)$ sînt continue în e.*

Fie K suportul lui $\mathbf{f}$ și U o vecinătate compactă a lui e. Mulțimea $C = UKU$ este o vecinătate compactă a lui K. Fie $\varepsilon > 0$ și V o vecinătate simetrică a lui e, conținută în U astfel încît să avem

$$\|\mathbf{f}_s - \mathbf{f}_t\| < \varepsilon\mu(C)^{-\frac{1}{p}} \text{ și } \|\mathbf{f}^s - \mathbf{f}^t\| < \varepsilon\mu(C)^{-\frac{1}{p}} \text{ dacă } st^{-1} \in V.$$

În particular, luînd $t = e$, avem

$$\|\mathbf{f}_s - \mathbf{f}\| < \varepsilon\mu(C)^{-\frac{1}{p}} \text{ și } \|\mathbf{f}^s - \mathbf{f}\| < \varepsilon\mu(C)^{-\frac{1}{p}} \text{ dacă } s \in V.$$

Fie $s \in V$. Dacă $s^{-1}x \in K$, atunci $x \in sK \subset VK \subset UKU$. De asemenea, dacă $xs \in K$, atunci $x \in Ks^{-1} \subset KU \subset UKU$. Așadar, dacă $x \notin UKU$, atunci $x \notin K$, $s^{-1}x \notin K$ și $xs \notin K$, deci $\mathbf{f}(s^{-1}x) = \mathbf{f}(x, s) = \mathbf{f}(x) = 0$.

Urmează că funcțiile $\mathbf{f}_s$, $\mathbf{f}^s$ și $\mathbf{f}$ au suporturile conținute în mulțimea $C = UKU$, deci

$$N_p(\mathbf{f}_s - \mathbf{f}, \mu) = \left(\int |\mathbf{f}_s(x) - \mathbf{f}(x)|^p \, d\mu\right)^{\frac{1}{p}} \leqslant \|\mathbf{f}_s - \mathbf{f}\| \mu(C)^{-\frac{1}{p}} < \varepsilon$$

și

$$N_p(\mathbf{f}^s - \mathbf{f}, \mu) = \left(\int |\mathbf{f}^s(x) - \mathbf{f}(x)|^p \, dx\right)^{\frac{1}{p}} \leqslant \|\mathbf{f}^s - \mathbf{f}\| \mu(C)^{\frac{1}{p}} < \varepsilon.$$

Aceasta înseamnă că funcțiile $s \to \mathbf{f}_s$ și $s \to \mathbf{f}^s$ sînt continue în e.

3. Măsuri invariante. Măsura Haar

Fie X un spațiu Banach și $\mathbf{m} : \mathcal{K}(G) \to X$ o măsură.

Spunem că măsura $\mathbf{m}$ este *invariantă la stînga dacă*

$$\mathbf{m}(f_s) = \mathbf{m}(f), \text{ adică } \int f(sx) \, d\mathbf{m}(x) = \int f(x) \, d\mathbf{m}(x)$$

oricare ar fi $f \in \mathcal{K}(G)$ și $s \in G$.

Măsura $\mathbf{m}$ este *invariantă la dreapta* dacă

$$\mathbf{m}(f^s) = \mathbf{m}(f), \text{ adică } \int f(xs) \, d\mathbf{m}(x) = \int f(x) \, d\mathbf{m}(x)$$

oricare ar fi $f \in \mathcal{K}(G)$ și $s \in G$.

Măsurile invariante, pozitive și *neidentic nule* vor fi numite *măsuri Haar*.

Dacă grupul este comutativ, măsurile invariante la stînga coincid cu măsurile invariante la dreapta. Se va arăta că această proprietate o au şi grupurile compacte.

Vom demonstra mai întîi existenţa măsurilor Haar. Vom arăta apoi că orice măsură invariantă cu variaţie finită se obţine dintr-o măsură Haar prin înmulţire cu o constantă (vectorială).

Teorema 1 (Haar). *Există o măsură Haar pozitivă, invariantă la stînga (dreapta) pe G şi — cu aproximaţia unei constante multiplicative — numai una.*

Vom face demonstraţia în mai multe etape şi numai pentru măsura invariantă la stînga.

a) Fie f şi $g \neq 0$ două funcţii din $\mathcal{K}_+(G)$. Există o familie finită $(c_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ de numere pozitive şi o familie finită $(s_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ de elemente din G, astfel încît să avem

$$f(x) \leqslant \sum_{i=1}^{n} c_i\, g(s_i x), \text{ pentru } x \in G.$$

Într-adevăr, dacă $f(x) \equiv 0$, luăm $c = 0$ şi avem $f(x) \leqslant cg(sx)$ pentru $x \in G$. Dacă $f \neq 0$, există o mulţime deschisă relativ compactă V astfel încît pe $\overline{V}$ funcţia f este strict pozitivă. Funcţia g este mărginită pe $\overline{V}$ şi-şi atinge marginea inferioară m pe $\overline{V}$. Urmează că $m > 0$. Fie K suportul lui f. Deoarece pentru orice $s \in G$ mulţimea sV este deschisă şi familia $(s^{-1}V)_{s\in G}$ acoperă pe G deci şi pe K, există o familie finită $(s_i^{-1}V)_{1\leqslant i\leqslant n}$ care acoperă pe K.

Fie M marginea superioară a funcţiei f. Dacă $f(x) = 0$, atunci $f(x) \leqslant \frac{M}{m} \sum_{i=1}^{n} g(s_i x)$. Dacă $f(x) \neq 0$, atunci $x \in K$, deci există i cu $x \in s_i^{-1}V$, de unde $s_i x \in V$ deci $m \leqslant g(s_i x) \leqslant \sum_{i=1}^{n} g(s_i x)$ de unde $f(x) \leqslant \frac{M}{m} \sum_{i=1}^{n} g(s_i x)$.

Aşadar, luînd $c_i = \frac{M}{m}$ pentru $1 \leqslant i \leqslant n$, avem

$$f(x) \leqslant \sum_{i=1}^{n} c_i g(s_i x), \text{ pentru orice } x \in G.$$

şi în cazul cînd $f \neq 0$.

Să notăm cu $(f; g)$ marginea inferioară a tuturor sumelor $\sum_{i=1}^{n} c_i$ de familii finite $(c_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ de numere pozitive, pentru care există familii finite $(s_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ de elemente din G care verifică inegalitatea

$$f(x) \leqslant \sum_{i=1}^{n} c_i\, g(s_i x), \text{ pentru orice } x \in G,$$

Dacă $f(x) \equiv 0$, avem, evident, $(f; g) = 0$.

Funcţia $(f; g)$ are proprietăţile următoare:

1) $(f_s; g) = (f, g)$ pentru orice $s \in G$;

2) $(cf;\ g) = c(f;\ g)$ pentru orice număr $c > 0$;

3) $(f_1 + f_2;\ g) \leq (f_1;\ g) + (f_2;\ g)$;

4) dacă $f_1 \leqslant f_2$, atunci $(f_1;\ g) \leqslant (f_2;\ g)$.

Aceste proprietăţi se deduc imediat din definiţia funcţiei $(f;\ g)$.

5) $(f;\ h) \leqslant (f;\ g)(g;\ h)$ dacă $h \neq 0$ şi $g \neq 0$.

Într-adevăr, dacă $f(x) \leqslant \sum_i c_i\, g(s_i\, x)$ şi $g(x) \leqslant \sum_j d_j\, h(t_j\, x)$, atunci $f(x) \leqslant \sum_{ij} c_i\, d_j\, h(t_j\, s_i\, x)$ de unde

$$(f;\ h) \leqslant \inf \sum_{ij} c_i\, d_j = \inf \sum_j c_i \inf \sum d_j = (f;\ g)(g;\ h).$$

6) Dacă M_f şi M_g sînt marginile superioare ale lui f şi g, atunci

$$(f;\ g) \geqslant \frac{M_f}{M_g}.$$

Într-adevăr, există $x_0 \in G$ cu $f(x_0) = M_f$. Atunci

$M_f = f(x_0) \leqslant \sum_i c_i g(s_i\, x_0) \leqslant (\sum_i c_i)\, M_g$, de unde $\sum_i c_i \geqslant \dfrac{M_f}{M_g}$.

În particular, din proprietatea 6) rezultă că

dacă $f \neq 0$ *şi* $g \neq 0$, *atunci* $(f;\ g) > 0$.

b) Să alegem o funcţie $f_0 \neq 0$ din $\mathcal{K}_+(G)$ şi să notăm

$$I_\varphi(f) = \frac{(f;\ \varphi)}{(f_0;\ \varphi)}\ ,\quad f,\ \varphi \in \mathcal{K}_+(G),\ \varphi \neq 0.$$

Din proprietatea 5) deducem că dacă $f \neq 0$, atunci

$$0 < \frac{1}{(f_0;\ f)} \leqslant I_\varphi(f) \leqslant (f;\ f_0) < +\infty$$

deci pentru fiecare funcţie $f \neq 0$ fixată, mulţimea $\{I_\varphi(f) \mid \varphi \in \mathcal{K}_+(G),\ \varphi \neq 0\}$ este mărginită.

Din primele trei proprietăţi ale funcţiei $(f;\ g)$ deducem că I_φ este o funcţională invariantă:

$$I_\varphi(f_s) = I_\varphi(f),$$

omogenă:

$$I_\varphi(cf) = cI_\varphi(f),$$

şi subaditivă:

$$I_\varphi(f_1 + f_2) \leqslant I_\varphi(f_1) + I_\varphi(f_2).$$

c) Vom arăta că I_φ este aproape aditivă, pentru funcţii $\varphi \neq 0$ cu suportul destul de mic. Mai precis:

Pentru orice funcţii f_1 şi f_2 din $\mathcal{K}_+(G)$ şi pentru orice $\varepsilon > 0$ există o vecinătate V a unităţii astfel încît pentru orice funcţie $\varphi \in \mathcal{K}_+(G, V)$ să avem

$$I_\varphi(f_1) + I_\varphi(f_2) \leqslant I_\varphi(f_1 + f_2) + \varepsilon.$$

Fie $f_1 f_2 \in \mathcal{K}_+(G)$ şi $\varepsilon > 0$. Dacă $f_1 + f_2 = 0$, inegalitatea este verificată. Să presupunem atunci că $f_1 + f_2 \neq 0$. Să alegem o funcţie $f' \in \mathcal{K}_+(G)$, egală cu 1 pe suportul funcţiei $f_1 + f_2$. Să alegem un număr $\varepsilon' > 0$ astfel încît

$$2\varepsilon'(f_1 + f_2;\, f_0) \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$$

şi un număr $\delta > 0$ astfel încît

$$\delta(1 + 2\varepsilon')(f';\, f_0) < \varepsilon.$$

Să notăm $f = f_1 + f_2 + \delta f'$ şi să punem pentru $i = 1, 2,$

$$h_i(t) = \begin{cases} \dfrac{f_i(t)}{f(t)} & \text{dacă } f(t) \neq 0, \\ 0 & \text{dacă } f(t) = 0. \end{cases}$$

Funcţiile h_1 şi h_2 aparţin lui $\mathcal{K}_+(G)$. Deoarece funcţiile h_i sînt uniform continue, există o vecinătate V a lui e, astfel încît

$$|h_i(x) - h_i(y)| < \varepsilon' \text{ pentru } y^{-1}x \in V.$$

Fie $\varphi \neq 0$ o funcţie din $\mathcal{K}_+(G, V)$ şi $f(x) \leqslant \sum_j c_j \varphi(s, x)$. Dacă $\varphi(s_j x) \neq 0$, atunci $s_j x \in V$ deci $|h_i(x) - h_i(s_j^{-1})| < \varepsilon'$, de unde

$$f_i(x) = f(x)h_i(x) \leqslant \sum_j c_j \varphi(s_j x)h_j(x) \leqslant \sum_j c_j \varphi(s_j x)[h_i(s_j^{-1}) + \varepsilon']$$

deci

$$(f_i;\, \varphi) \leqslant \sum_j c_j [h_i(s_j^{-1}) + \varepsilon']$$

şi deci

$$(f_1;\, \varphi) + (f_2;\, \varphi) \leqslant \sum_j c_j (1 + 2\varepsilon').$$

pentru că $h_1 + h_2 \leqslant 1$. Deoarece $\sum_j c_j$ poate fi ales oricît de apropiat de $(f;\, \varphi)$, avem

$$\begin{aligned} I_\varphi(f_1) + I_\varphi(f_2) &\leqslant I_\varphi(f)(1 + 2\varepsilon') \leqslant [I_\varphi(f_1 + f_2) + \delta I_\varphi(f')](1 + 2\varepsilon') = \\ &= I_\varphi(f_1 + f_2) + 2\varepsilon' I_\varphi(f_1 + f_2) + \delta(1 + 2\varepsilon') I_\varphi(f') \leqslant \\ &\leqslant I_\varphi(f_1 + f_2) + \varepsilon. \end{aligned}$$

d) Pentru orice funcţie $f \neq 0$ din $\mathcal{K}_+(G)$ să notăm cu S_f segmentul $\left[\frac{1}{(f_0 : f)}, (f : f_0)\right]$ şi cu S spaţiul produs al spaţiilor compacte S_f, cînd f parcurge $\mathcal{K}_+(G)$. Pentru fiecare funcţie $\varphi \neq 0$ din $\mathcal{K}_+(G)$ avem $I_\varphi(f) \in S_f$ deci I_φ poate fi considerat un punct din spaţiul produs S a cărui proiecţie pe S_f este $I_\varphi(f)$.

Pentru fiecare vecinătate V a unităţii în G să notăm cu C_V închiderea mulţimii $\{I_\varphi \mid \varphi \in \mathcal{K}_+(G, V)\}$. Mulţimea C_V este compactă în S. Dacă $V_1, V_2, \ldots, V_n$ sînt vecinătăţi ale unităţii în G, atunci

$$\bigcap_{i=1}^{n} C_{V_i} = C_{\bigcap_{i=1}^{n} V_i} \neq \emptyset.$$

Urmează că intersecţia mulţimilor C_V cînd V parcurge filtrul vecinătăţilor lui e este nevidă. Fie μ un punct care aparţine tuturor mulţimilor C_V. Pentru orice V, orice funcţii $f_1, \ldots, f_n$ din $\mathcal{K}_+(G)$ şi orice $\varepsilon > 0$, există o funcţie $\varphi \neq 0$ din $\mathcal{K}_+(G)$ astfel încît să avem $|\mu(f_i) - I_\varphi(f_i)| < \varepsilon$ pentru $1 \leqslant i \leqslant n$. Folosind proprietăţile lui I_φ, de aici se deduce cu uşurinţă că μ este o funcţională pozitivă, aditivă, omogenă şi invariantă pe $\mathcal{K}_+(G)$ şi că

$$\frac{1}{(f_0 : f)} \leqslant \mu(f) \leqslant (f : f_0)$$

deci μ nu este identic nulă. Mai mult, dacă $f \neq 0$, atunci $\mu(f) > 0$.

Prelungind pe μ la $\mathcal{K}(G)$ prin egalitatea

$$\mu(f_1 - f_2) = \mu(f_1) - \mu(f_2),$$

μ este o măsură pozitivă invariantă la stînga şi neidentic nulă pe G.

Unicitatea lui μ rezultă din următoarea propoziţie, mai generală.

Observaţie. Măsura μ construită în demonstraţia acestei teoreme are proprietatea că $\mu(f) > 0$ pentru orice funcţie $f \neq 0$ din $\mathcal{K}_+(G)$.

Propoziţia 4. *Fie ν o măsură Haar pozitivă invariantă la stînga. Orice măsură invariantă la stînga este de forma*

$$\mathfrak{m} = a\nu.$$

Să presupunem întîi că m este o măsură scalară invariantă la stînga. Să considerăm măsura μ construită în demonstraţia teoremei, cu proprietatea că $\mu(f) > 0$ pentru orice funcţie $f \neq 0$ din $\mathcal{K}_+(G)$.

Fie $f \geqslant 0$ o funcţie din $\mathcal{K}_+(G)$, fie C suportul lui f şi U interiorul lui C. Fie $f' : G \to [0, 1]$ o funcţie continuă cu suport compact, egală cu 1 pe C. Fie $\varepsilon > 0$ .Să alegem o vecinătate simetrică V a lui e, astfel încît să avem

$$|f(yx) - f(xz^{-1})| < \varepsilon \text{ pentru } y, z \in V$$

şi astfel încît $CV \cup VC \subset U$. Din această incluziune deducem

$$f(xy) = f(xy)f'(x) \text{ şi } f(yx) = f(yx)f'(x)$$

pentru $y \in V$ şi $x \in G$, şi deci, luînd în inegalitatea precedentă $z = y^{-1}$, avem

$$|f(xy) - f(yx)| < \varepsilon f'(x) \text{ pentru orice } y \in V \text{ şi } x \in G.$$

Fie $h \neq 0$ o funcţie din $\mathcal{K}_+(G, V)$ cu $h(x) = h(x^{-1})$ pentru orice $x \in G$. Deducem atunci

$$\mu(h)m(f) = \int h(y)\,\mathrm{d}\mu(y) \cdot \int f(x)\,\mathrm{d}m(x) = \int \mathrm{d}\mu(y) \int h(y) f(x)\,\mathrm{d}m(x) =$$

$$= \int \mathrm{d}\mu(y) \int h(y) f(yx)\,\mathrm{d}m(x)$$

şi

$$m(h)\,\mu(f) = \int h(x)\,\mathrm{d}m(x) \int f(y)\,\mathrm{d}\mu(y) = \int \mathrm{d}\mu(y) \int h(x) f(y)\,\mathrm{d}m(x) =$$

$$= \int \mathrm{d}\mu(y) \int h(y^{-1}x) f(y)\,\mathrm{d}m(x) = \int \mathrm{d}m(x) \int h(x^{-1}y) f(y)\,\mathrm{d}\mu(y) =$$

$$= \int \mathrm{d}m(x) \int h(y) f(xy)\,\mathrm{d}\mu(y) = \int \mathrm{d}\mu(y) \int h(y) f(xy)\,\mathrm{d}m(x)$$

deci

$$|\mu(h)\,m(f) - m(h)\,\mu(f)| \leqslant \int \mathrm{d}\mu(y) \int h(y) |f(yx) - f(xy)|\,\mathrm{d}m(x) \leqslant$$

$$\leqslant \varepsilon \int \mathrm{d}\mu(y) \int h(y) f'(x)\,\mathrm{d}|m|(x) = \varepsilon\mu(h)|m|(f').$$

În mod analog, luînd o funcţie $g \neq 0$ din $\mathcal{K}_+(G)$ şi o funcţie $g' : G \to [0, 1]$ continuă cu suport compact, egală cu 1 pe suportul lui g, deducem

$$|\mu(h)\,m(g) - m(h)\,\mu(g)| \leqslant \varepsilon\mu(h)|m|(g').$$

Deoarece $\mu(f) > 0$, $\mu(h) > 0$ şi $\mu(g) > 0$. avem

$$\left| \frac{m(f)}{\mu(f)} - \frac{m(h)}{\mu(h)} \right| \leqslant \varepsilon \frac{|m|(f')}{\mu(f)}$$

şi

$$\left| \frac{m(g)}{\mu(g)} - \frac{m(h)}{\mu(h)} \right| \leqslant \varepsilon \frac{|m|(g')}{\mu(g)},$$

de unde

$$\left| \frac{m(f)}{\mu(f)} - \frac{m(g)}{\mu(g)} \right| \leqslant \varepsilon \left(\frac{|m|(f')}{\mu(f)} + \frac{|m|(g')}{\mu(g)} \right)$$

iar f' şi g' nu depind de ε. Deoarece ε este arbitrar, deducem

$$\frac{m(f)}{\mu(f)} - \frac{m(g)}{\mu(g)} = 0.$$

Fixînd o funcţie $g_0 \neq 0$ din $\mathcal{K}_+(G)$ şi notînd $b = \dfrac{m(g_0)}{\mu(g_0)}$ obţinem

$$m(f) = b\mu(f).$$

pentru orice funcţie $f \in \mathcal{K}^{\cdot}(G)$, deci pentru orice funcţie $f \in \mathcal{K}(G)$. Deducem că $m(f) \neq 0$ pentru orice funcţie $f \neq 0$ din $\mathcal{K}_+(G)$.

Rezultă că pentru măsura Haar pozitivă ν invariantă la stînga, avem $\nu = \alpha\mu$ cu $\alpha > 0$. Atunci

$$\mu = \frac{1}{\alpha}\,\nu \text{ deci notînd } a = \frac{b}{\alpha} \text{ avem}$$

$$m = a\nu.$$

Fie acum $\mathbf{m} : \mathcal{K}(G) \to X$ o măsură vectorială invariantă la stînga. Pentru orice $x' \in X'$, funcţionala $\mathbf{m}_{x'}$ definită pe $\mathcal{K}(G)$ prin egalitatea

$$\mathbf{m}_{x'}(f) = < \mathbf{m}(f),\ x' >$$

este o măsură scalară, invariantă la stînga, deci după prima parte a demonstraţiei este de forma

$$\mathbf{m}_{x'}(f) = a(x')\,\nu(f), \quad f \in \mathcal{K}(G),$$

unde $a(x')$ este un număr ce nu depinde de f. Se verifică uşor că a este o funcţională liniară pe X'.

Luînd $f \in \mathcal{K}(G)$ cu $\nu(f) \neq 0$, deducem

$$|a(x')| = \frac{|\mathbf{m}_{x'}(f)|}{|\nu(f)|} \leqslant \frac{|\mathbf{m}(f)|}{|\nu(f)|}\,|x'|$$

deci a este continuă, $a \in X''$. Pentru fiecare $f \in \mathcal{K}(G)$ şi $x' \in X'$ avem

$$< \mathbf{m}(f),\ x' > = a(x')\,\nu(f)$$

deci, pentru orice $f \in \mathcal{K}(G)$, avem

$$\mathbf{m}(f) = a\,\nu(f).$$

Rezultă că $a \in X$ şi $\mathbf{m} = a\nu$. Cu aceasta propoziţia este demonstrată.

Corolar. *Orice măsură* $\mathbf{m} : \mathcal{K}(G) \to X$ *invariantă la stînga este majorată iar* $|\mathbf{m}|$ *este o măsură Haar invariantă la stînga.*

Într-adevăr, dacă ν este o măsură Haar invariantă la stînga, există $a \in X$ cu $\mathbf{m} = a\nu$. Atunci $|\mathbf{m}| = |a|\,\nu$.

Observații. 1° Dacă măsura μ, construită în demonstrația teoremei lui Haar este invariantă și la dreapta (de exemplu dacă G este comutativ), demonstrația invarianței măsurii complexe m se face mai simplu:

Fie f și h două funcții din $\mathcal{K}_+(G)$ cu $h \neq 0$. Avem

$$m(h)\,\mu(f) = \int \mathrm{d}m(y) \int h(y) f(x)\,\mathrm{d}\mu(x) = \int \mathrm{d}m(y) \int h(y) f(xy)\,\mathrm{d}\mu(x) =$$

$$= \int \mathrm{d}\mu(x) \int h(y) f(xy)\,\mathrm{d}m(y) = \int \mathrm{d}\mu(x) \int h(x^{-1}y) f(y)\,\mathrm{d}m(y) =$$

$$= \int \mathrm{d}m(y) \int \check{h}(y^{-1}x) f(y)\,\mathrm{d}\mu(x) = \int \mathrm{d}m(y) \int \check{h}(x) f(y)\,\mathrm{d}\mu(x) = \mu(\check{h})\, m(f).$$

de unde, notînd $b = \dfrac{m(h)}{\mu(\check{h})}$, obținem

$$m(f) = b\mu(f)$$

și apoi, ca mai sus, $m = a\nu$.

2° Dacă $\mathbf{m}$ este o măsură neidentic nulă, invariantă la stînga, atunci avem $\mathbf{m}(f) \neq 0$ pentru orice funcție $f \neq 0$ din $\mathcal{K}_+(G)$.

3° Deoarece toate măsurile invariante la stînga se obțin dintr-o măsură Haar pozitivă μ invariantă la stînga, prin înmulțire cu o constantă (vectorială sau scalară), vom studia în continuare numai măsura μ pe care o vom numi măsura Haar invariantă la stînga, fără altă specificare.

4. Proprietățile măsurii Haar

Fie μ măsura Haar invariantă la stînga.

Propoziția 5. *Pentru orice funcție $f \geqslant 0$ definită pe G și orice $s \in G$ avem*

$$\mu^*(f_s) = \mu^*(f).$$

Funcția $\alpha(x) = sx$ este un omeomorfism al lui G pe G și $f \circ \alpha = f_s$. Dacă $f \in \mathcal{K}_+$, atunci $f \circ \alpha \in \mathcal{K}(G)$ deci α este μ-proprie și $\alpha(\mu) = \mu$. Urmează atunci că pentru orice funcție $f \geqslant 0$ avem

$$\int^* f_s\,\mathrm{d}\mu = \int^* f \circ \alpha \mathrm{d}\mu = \int^* f \mathrm{d}\,\alpha(\mu) = \int^* f \mathrm{d}\mu,$$

adică

$$\mu^*(f_s) = \mu^*(f).$$

Corolarul 1. *Pentru orice mulțime $A \subset G$ și orice $s \in G$ avem*

$$\mu^*(sA) = \mu^*(A).$$

Corolarul 2. *Pentru orice mulțime deschisă nevidă* $U \subset G$ *avem*

$$\mu^*(U) > 0.$$

Într-adevăr, dacă ar exista o mulțime deschisă nevidă $V \subset G$ cu $\mu^*(V) = 0$, atunci orice mulțime compactă $K \subset G$ ar putea fi acoperită de o familie finită de mulțimi deschise de forma sV și, deoarece $\mu^*(sV) = \mu^*(V) = 0$, ar urma că $\mu^*(K) = 0$, de unde ar rezulta că μ este identic nulă.

Corolarul 3. *Măsura Haar* μ *are suportul egal cu* G.

Corolarul 4. *Dacă* G *este discret, există un număr* $a > 0$ *astfel încît să avem* $\mu(\{x\}) = a$ *oricare ar fi* $x \in G$.

Într-adevăr, $\{e\}$ este o mulțime deschisă deci $a = \mu(\{e\}) > 0$. Atunci

$$\mu(\{x\}) = \mu(x\{e\}) = \mu(\{e\}) = a.$$

Observație. Dacă G este discret, se alege, de obicei, măsura Haar μ, astfel încît să avem $\mu(\{x\}) = 1$ pentru orice $x \in G$.

Propoziția 6. *Grupul* G *este compact, dacă și numai dacă măsura Haar* μ *este mărginită.*

Dacă G este compact, orice măsură pozitivă pe G este mărginită; în particular, măsura Haar μ este mărginită.

Reciproc, să presupunem că G nu este compact, și să arătăm că μ este nemărginită. Fie V o vecinătate relativ compactă a lui e. Familia $(xV)_{x \in G}$ acoperă pe G, dar deoarece G nu este compact, nici o subfamilie finită nu acoperă pe G. Atunci putem găsi prin recurență un șir (x_n) de puncte din G astfel încît pentru fiecare n să avem $x_n \notin \bigcup_{i<n} x_i V$. Fie U o vecinătate deschisă *simetrică* a lui e cu $U^2 \subset V$. Mulțimile deschise $x_n U$ sînt disjuncte două cîte două. Într-adevăr, să presupunem, prin absurd, că există doi indici $n < m$ cu $x_n U \cap x_m U \neq \emptyset$. Fie $x \in x_n U \cap x_m U$. Atunci $x \in x_n U$ și $x \in x_m U$ deci $x_m \in xU^{-1} = xU \subset x_n U^2 \subset x_n V$ ceea ce este în contradicție cu modul în care a fost ales șirul (x_n).

Pentru fiecare n avem $\mu^*(x_n U) = \mu^*(U) > 0$. Urmează că

$$\mu^*(G) \geqslant \mu^*\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} x_n U\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(x_n U) = +\infty$$

deci μ este nemărginită.

Așadar, dacă μ este mărginită, atunci G este compact.

Observație. În cazul cînd G este compact, se alege, de obicei, măsura Haar μ așa fel încît să avem $\mu(G) = 1$.

În cele ce urmează, dacă în anumite proprietăți nu se specifică măsura la care se referă, se va subînțelege că se referă la măsura Haar, invariantă la stînga. Această măsură va fi notată cu dx. Vom însemna cu $\mathcal{L}_E^p$ spațiile construite cu această măsură.

Propoziția 7. *Fie E un spațiu Banach, $s \in G$ și $\mathbf{f} : G \to E$ o funcție.*
1) *funcția $\mathbf{f}$ este neglijabilă dacă și numai dacă $\mathbf{f}_s$ este neglijabilă;*
2) *funcția $\mathbf{f}$ este măsurabilă dacă și numai dacă $\mathbf{f}_s$ este măsurabilă;*
3) *funcția $\mathbf{f}$ este integrabilă dacă și numai dacă $\mathbf{f}_s$ este integrabilă. În acest caz avem*

$$\int \mathbf{f}(sx)\,dx = \int \mathbf{f}(x)\,dx.$$

Primele două proprietăți rezultă din propoziția 5.

Dacă $\mathbf{f} \in \mathcal{K}_E(G)$, atunci $\mathbf{f}_s \in \mathcal{K}_E(G)$ și pentru orice $z \in E'$, funcțiile $< \mathbf{f}, z >$ și $< \mathbf{f}_s, z > = (< \mathbf{f}, z >)_s$ aparțin lui $\mathcal{K}(G)$, deci

$$< \int \mathbf{f}(sx)\,dx, z > = \int < \mathbf{f}(sx), z > dx = \int < \mathbf{f}(x), z > dx =$$

$$= < \int \mathbf{f}(x)\,dx,\ z >,$$

de unde

$$\int \mathbf{f}(sx)\,dx = \int \mathbf{f}(x)\,dx.$$

Fie acum $\mathbf{f} \in \mathcal{L}^1_E$ o funcție oarecare. Există un șir $(\mathbf{f}_n)$ de funcții din $\mathcal{K}_E(G)$, convergent în medie către $\mathbf{f}$. Atunci

$$\int^* |\mathbf{f}_n(sx) - \mathbf{f}(sx)|\,dx = \int^* |\mathbf{f}_n(x) - \mathbf{f}(x)|\,dx$$

deci șirul $(\mathbf{f}_n)_s$ de funcții din $\mathcal{K}_E(G)$ converge în medie către $\mathbf{f}_s$. Urmează că $\mathbf{f}_s \in \mathcal{L}^1_E$ și

$$\int \mathbf{f}(sx)\,dx = \lim_{n\to\infty} \int \mathbf{f}_n(sx)\,dx = \lim_{n\to\infty} \int \mathbf{f}_n(x)\,dx = \int \mathbf{f}(x)\,dx.$$

Dacă $\mathbf{f}_s \in \mathcal{L}^1_E$, atunci $\mathbf{f} = (\mathbf{f}_s)_{s^{-1}} \in \mathcal{L}^1_E$ și astfel propoziția este demonstrată.

Corolarul 1. *Dacă $\mathbf{f} : G \to E$ este local integrabilă și $s \in G$ atunci $\mathbf{f}_s$ este local integrabilă și pentru orice $\varphi \in \mathcal{K}(G)$ avem*

$$\int \varphi(x)\,\mathbf{f}_s(x)\,dx = \int \varphi(s^{-1}x)\,\mathbf{f}(x)\,dx.$$

Într-adevăr, dacă $\varphi \in \mathcal{K}(G)$, funcția $x \to \varphi(s^{-1}x)$ aparține lui $\mathcal{K}(G)$ deci funcția $x \to \varphi(s^{-1}x)\,\mathbf{f}_x(x)$ este integrabilă. Urmează atunci că funcția $x \to \varphi(x)\,\mathbf{f}(sx)$ este integrabilă, deci funcția $\mathbf{f}_s$ este local integrabilă și

$$\int \varphi(s^{-1}x)\,\mathbf{f}(x)\,dx = \int \varphi(x)\,\mathbf{f}(sx)\,dx = \int \varphi(x)\,\mathbf{f}_s(x)\,dx.$$

Corolarul 2. *Dacă* $\mathbf{f} \in \mathcal{L}_E^p$, $1 \leqslant p \leqslant +\infty$ *și* $s \in G$, *atunci* $\mathbf{f}_s \in \mathcal{L}_E^p$ *și*

$$N_p(\mathbf{f}_s) = N_p(\mathbf{f}).$$

Într-adevăr, dacă $\in \mathcal{L}_E^p$, atunci $\mathbf{f}$ este măsurabilă și $N_p(\mathbf{f}) < +\infty$. Urmează că $\mathbf{f}_s$ este măsurabilă.

Dacă $p = +\infty$, din punctul 1) al propoziției deducem că $N_\infty(\mathbf{f}_s) = N_\infty(\mathbf{f}) < +\infty$, deci $\mathbf{f}_s \in \mathcal{L}_E^\infty$.

Dacă $p < +\infty$, avem

$$N_p(\mathbf{f}_s) = \left(\int^* |\mathbf{f}(sx)|^p \, dx\right)^{\frac{1}{p}} = \left(\int^* |\mathbf{f}(x)|^p \, dx\right)^{\frac{1}{p}} = N_p(\mathbf{f}) < +\infty$$

deci $\mathbf{f}_s \in \mathcal{L}_E^p$.

Propoziția 8. *Fie* E *un spațiu Banach și* $1 \leqslant p < +\infty$. *Pentru orice funcție* $\mathbf{f} \in \mathcal{L}_E^p$, *aplicația* $s \to \mathbf{f}_s$ *a lui* G *în* $\mathcal{L}_E^p$ *este uniform continuă la stînga.*

Fie $\mathbf{f} \in \mathcal{L}_E^p$ și $\varepsilon > 0$. Există o funcție $\mathbf{g} \in \mathcal{K}_E(G)$ cu $N_p(\mathbf{f}-\mathbf{g}) < \frac{\varepsilon}{3}$.

Pentru orice $s \in G$ avem

$$N_p(\mathbf{f}_s-\mathbf{g}_s) = N_p(\mathbf{f}-\mathbf{g}) < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Deoarece $\mathbf{g}_s \in \mathcal{K}_E(G)$ deducem că $\mathbf{f}_s \in \mathcal{L}_E^p$ oricare ar fi $s \in G$.

Din propoziția 3 deducem că există o vecinătate V a lui e, astfel încît să avem

$$N_p(\mathbf{g}_s-\mathbf{g}) < \frac{\varepsilon}{3}, \text{ dacă } s \in V.$$

Dacă $st^{-1} \in V$, atunci

$$N_p(\mathbf{g}_s-\mathbf{g}_t) = N_p(\mathbf{g}_{st^{-1}} - \mathbf{g}) < \frac{\varepsilon}{3},$$

deci

$$N_p(\mathbf{f}_s-\mathbf{f}_t) \leqslant N_p(\mathbf{f}_s-\mathbf{g}_s) + N_p(\mathbf{g}_s-\mathbf{g}_t) + N_p(\mathbf{f}_t-\mathbf{g}_t) < \varepsilon$$

și deci aplicația $s \to \mathbf{f}_s$ a lui G în $\mathcal{L}_E^p$ este uniform continuă la stînga.

Corolar. *Dacă pentru fiecare* $s \in G$ *punem*

$$U_s \mathbf{f} = \mathbf{f}_{s^{-1}}, \text{ penru } \mathbf{f} \in \mathcal{L}_E^p, \ 1 \leqslant p < +\infty,$$

atunci aplicația $U : s \to U_s$ *este o reprezentate simplu continuă a lui* G *în grupul multiplicativ al operatorilor liniari ai spațiului* $\mathcal{L}_E^p$ *și* $\|U_s\| \equiv 1$.

Faptul că U_s este liniară, este imediat. Avem apoi

$$N_p(U_s\mathbf{f}) = N_p(\mathbf{f}_{s^{-1}}) = N_p(\mathbf{f})$$

deci $\|U_s\| = 1$. Pentru $s, t \in G$ avem

$$U_{st}\mathbf{f} = \mathbf{f}_{(st)^{-1}} = \mathbf{f}_{t^{-1}s^{-1}} = U_s\mathbf{f}_{t^{-1}} = U_s U_t \mathbf{f}$$

deci $U_{st} = U_s U_t$. Avem apoi $U_e \mathbf{f} = \mathbf{f}_e = \mathbf{f}$, deci $U_e = I$ şi deci U este o reprezentare. Pentru fiecare $\mathbf{f} \in \mathcal{L}_E^p$, aplicaţia $s \to \mathbf{f}_{s^{-1}}$ a lui G în $\mathcal{L}_E^p$ este continuă (prop. 8), deci U este simplu continuă.

Observaţie. Reprezentarea $U_s \mathbf{f} = \mathbf{f}_{s^{-1}}$ se numeşte reprezentare regulată la stînga a grupului G în $\mathcal{L}(\mathcal{L}_E^p)$.

Propoziţia 9. *Pentru orice funcţie* $f(x, y) \geqslant 0$ *definită pe* $G \times G$ *avem*

$$\iint^* f(x, y)\, dx\, dy = \iint^* f(x, x^{-1}y)\, dx\, dy.$$

Aplicaţia $\alpha(x, y) = (x, x^{-1}y)$ a lui $G \times G$ pe $G \times G$ este proprie în raport cu măsura produs $dx\,dy = dx \otimes dy$.

Fie $f \in \mathcal{K}(G \times G)$. Avem

$$\iint f(x, y)\, dx\, dy = \int dy \int f(x, y)\, dx = \int dy \int f(x, x^{-1}y)\, dx =$$

$$= \iint f(x, x^{-1}y)\, dx\, dy = \iint f(\alpha(x, y))\, dx\, dy,$$

deci $\alpha(dx\, dy) = dx\, dy$. Atunci, pentru orice funcţie $f(x, y) \geqslant 0$, avem (prop. 1, § 20)

$$\iint^* f(x, y)\, dx\, dy = \iint^* f(x, y)\, \alpha(dx\, dy) = \iint^* f(\alpha(x, y))\, dx\, dy =$$

$$= \iint^* f(x, x^{-1}y)\, dx\, dy.$$

Propoziţia 10. *Fie* $\mathbf{f}(x, y)$ *o funcţie definită pe* $G \times G$ *cu valori într-un spaţiu Banach sau în* $\bar{R}$.

1) $\mathbf{f}(x, y)$ *este neglijabilă (pentru* $dxdy$*) dacă şi numai dacă* $\mathbf{f}(x, x^{-1}y)$ *este neglijabilă*;

2) $\mathbf{f}(x, y)$ *este măsurabilă (pentru* $dxdy$*) dacă şi numai dacă* $\mathbf{f}(x, x^{-1}y)$ *este măsurabilă*;

3) $\mathbf{f}(x, y)$ *este integrabilă (pentru* $dxdy$*) dacă şi numai dacă* $\mathbf{f}(x, x^{-1}y)$ *este integrabilă. În acest caz*

$$\iint \mathbf{f}(x, y)\, dx\, dy = \iint \mathbf{f}(x, x^{-1}y)\, dx\, dy.$$

Se ţine seama de proprietăţile 2 şi 3 şi teorema 1 din § 20.

Corolar. *Fie* X, Y *şi* Z *trei spaţii Banach,* $(u, v) \to uv$ *o aplicaţie biliniară şi continuă a lui* $X \times Y$ *în* Z *şi două funcţii* $\mathbf{f} : G \to X$ *şi* $\mathbf{g} : G \to Y$.

1) *Dacă* $\mathbf{f}$ *şi* $\mathbf{g}$ *sînt neglijabile, atunci funcţia* $\mathbf{f}(x)\mathbf{g}(x^{-1}y)$ *este neglijabilă (pentru* $dxdy$*)*;

2) *Dacă* $\mathbf{f}$ *şi* $\mathbf{g}$ *sînt măsurabile, atunci funcţia* $\mathbf{f}(x)\, \mathbf{g}(x^{-1}y)$ *este măsurabilă (pentru* $dxdy$*)*;

3) *Dacă* $\mathfrak{f}$ *și* $\mathfrak{g}$ *sînt integrabile, atunci funcția* $\mathfrak{f}(x)\,\mathfrak{g}(x^{-1}y)$ *este integrabilă* (*pentru* $\mathrm{d}x\mathrm{d}y$) *și*

$$\iint \mathfrak{f}(x)\,\mathfrak{g}(y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \iint \mathfrak{f}(x)\,\mathfrak{g}(x^{-1}y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$

Observație. Aplicațiile $(x, y) \to (y^{-1}x, y)$, $(x, y) \to (x, xy)$ și $(x, y) \to (yx, y)$ lui $G \times G$ pe $G \times G$ sînt proprii. Raționînd ca mai sus, deducem că pentru orice funcție $f(x, y) \geqslant 0$ avem

$$\iint^{*} f(x, y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \iint^{*} f(y^{-1}x, y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \iint^{*} f(x, xy)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y =$$

$$= \iint^{*} f(yx, y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$

Fie $\mathfrak{f}(x, y)$ o funcție definită pe $G \times G$ cu valori într-un spațiu Banach E sau în $\bar{R}$:

1) *Dacă* $\mathfrak{f}(x, y)$ *este neglijabilă* (*pentru* $\mathrm{d}x\mathrm{d}y$), *atunci funcțiile* $\mathfrak{f}(y^{-1}x, y)$, $\mathfrak{f}(x, xy)$ *și* $\mathfrak{f}(yx, y)$ *sînt neglijabile*;

2) *Dacă* $\mathfrak{f}(x, y)$ *este măsurabilă* (*pentru* $\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$), *atunci funcțiile* $\mathfrak{f}(y^{-1}x, y)$, $\mathfrak{f}(x, xy)$ *și* $\mathfrak{f}(yx, y)$ *sînt măsurabile*;

3) *Dacă* $\mathfrak{f}(x, y)$ *este integrabilă* (*pentru* $\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$), *atunci funcțiile* $\mathfrak{f}(y^{-1}x, y)$, $\mathfrak{f}(x, yx)$ *și* $\mathfrak{f}(yx, y)$ *sînt integrabile și avem*

$$\iint \mathfrak{f}(x, y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \iint \mathfrak{f}(y^{-1}x, y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \iint \mathfrak{f}(x, xy)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y =$$

$$= \iint \mathfrak{f}(yx, y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$

5. Funcția modulară

Fie μ o măsură Haar invariantă la stînga. În general, această măsură nu este invariantă și la dreapta. Pentru fiecare punct $t \in G$ să definim funcționala μ^t pe $\mathcal{K}(G)$ prin egalitatea

$$\mu^t(f) = \mu(f^t), \text{ pentru } f \in \mathcal{K}(G).$$

Se verifică ușor că μ^t este o măsură pozitivă pe G, invariantă la stînga:

$$\mu^t(f_s) = \mu((f_s)^t) = \mu((f^t)_s) = \mu(f^t) = \mu^t(f)$$

și deci μ^t se obține din μ prin înmulțire cu un număr pozitiv $\Delta(t)$:

$$\mu^t(f) = \Delta(t)\,\mu(f).$$

Această egalitate se scrie de asemenea

$$\mu(f^t) = \Delta(t)\,\mu(f),$$

adică

$$\int f(xt^{-1})\,dx = \Delta(t)\int f(x)\,dx,$$

sau

$$\int f(xt)\,dx = \Delta(t^{-1})\int f(x)\,dx.$$

Funcția $t \to \Delta(t)$ definită pe G se numește *funcția modulară* a grupului G.

Spunem că grupul G este *unimodular*, dacă $\Delta(t) \equiv 1$, adică dacă măsura Haar invariantă la stînga este invariantă și la dreapta.

Propoziția 11. *Grupurile comutative, grupurile compacte și grupurile discrete sînt unimodulare.*

Afirmația relativă la grupurile comutative este imediată.

Să presupunem că G este compact. Atunci funcția $f(x) \equiv 1$ este integrabilă în raport cu măsura μ iar $f^s = f$, deci

$$\mu(f) = \mu(f^s) = \Delta(s)\,\mu(f).$$

Deoarece $\mu(f) > 0$, deducem $\Delta(s) = 1$ pentru orice $s \in G$.

Să presupunem acum că G este discret. Fie $f \neq 0$ o funcție pozitivă din $\mathcal{K}(G)$. Funcția f are suportul finit $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ în care ia valorile $\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ diferite de 0. Pentru orice $t \in G$ funcția f^t are suportul $\{x_1 t, x_2 t, \ldots, x_n t\}$ în care ia valorile $\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ diferite de 0. Atunci

$$\mu(f^t) = \sum_{i=1}^{n} a_i = \mu(f) > 0$$

și deci

$$\mu(f^t) = \Delta(t)\,\mu(f) = \Delta(t)\,\mu(f^t) > 0$$

de unde

$$\Delta(t) = 1.$$

Propoziția 12. *Funcția $\Delta(t)$ este un omomorfism continuu al lui G în grupul multiplicativ R_+ al numerelor strict pozitive.*

Într-adevăr, fie $f \neq 0$ o funcție din $\mathcal{K}_+(G)$. Pentru orice $t \in G$ funcția f^t aparține lui $\mathcal{K}_+(G)$ și nu este identic nulă deci $\mu(f) > 0$ și $\mu(f^t) > 0$. Urmează că

1) $$\Delta(t) = \frac{\mu(f^t)}{\mu(f)} > 0.$$

Avem apoi

$$\Delta(st)\,\mu(f) = \mu(f^{st}) = \mu((f^s)^t) = \Delta(t)\,\mu(f^s) = \Delta(t)\,\Delta(s)\,\mu(f)$$

de unde

2) $$\Delta(st) = \Delta(s)\,\Delta(t).$$

Luînd $s = e$ obţinem $\Delta(t) = \Delta(e)\,\Delta(t)$ deci

3) $$\Delta(e) = 1.$$

Deducem apoi

$$1 = \Delta(e) = \Delta(s s^{-1}) = \Delta(s)\,\Delta(s^{-1})$$

de unde

4) $$\Delta(s^{-1}) = \Delta(s)^{-1}.$$

Să arătăm că $\Delta(s)$ este continuă pe G. Fie $f \in \mathcal{K}_+(G)$ cu $\mu(f) > 0$. Atunci

$$\Delta(t) = \frac{\mu(f^t)}{\mu(f)}.$$

Conform propoziţiei 3, aplicaţia $t \to f^t$ a lui G în $\mathcal{L}^1$ este continuă în e. Deoarece μ este continuă pe $\mathcal{L}^1$, rezultă că aplicaţia $t \to \mu(f^t)$ a lui G în $\mathcal{L}^1$ este continuă în e şi deci $\Delta(t)$ este continuă în e.

Fie acum $s \in G$ un punct arbitrar şi $\varepsilon > 0$.

Deoarece Δ este continuă în e, există o vecinătate V a lui e astfel încît să avem

$$|\Delta(z) - \Delta(e)| < \frac{\varepsilon}{\Delta(s)}, \quad \text{pentru } z \in V.$$

Mulţimea sV este o vecinătate a lui s şi pentru $t \in sV$ avem $s^{-1}t \in V$ deci

$$|\Delta(s^{-1}t) - \Delta(e)| < \frac{\varepsilon}{\Delta(s)}$$

de unde, înmulţind cu $\Delta(s)$, deducem

$$|\Delta(t) - \Delta(s)| < \varepsilon.$$

Aşadar, Δ este continuă în s, şi cum s a fost ales arbitrar, urmează că Δ este continuă pe G.

Propoziţia 13. *Pentru orice funcţie $f \geqslant 0$ definită pe G şi orice $s \in G$ avem*

$$\int^* f(x s^{-1})\,\mathrm{d}x = \Delta(s) \int^* f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Într-adevăr, funcţia $\alpha(x) = xs^{-1}$ este un omeomorfism al lui G pe G deci este proprie în raport cu măsura Haar $\mathrm{d}x = \mathrm{d}\mu$. Avem apoi $f \circ \alpha = f^s$ şi $\alpha(\mu) = \mu^s = \Delta(s)\,\mu$. Conform propoziţiei 1, §20, avem

$$\int^* f(x s^{-1})\,\mathrm{d}x = \int^* f^s(x)\,\mathrm{d}x = \int^* f \circ \alpha\,\mathrm{d}\mu = \int^* f\,\mathrm{d}\alpha(\mu) =$$

$$= \int^* f(x)\,\mathrm{d}\mu^s(x) = \Delta(s) \int^* f(x)\,\mathrm{d}\mu(x) = \Delta(s) \int^* f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Corolarul 1. *Pentru orice mulțime* $A \subset G$ *și orice* $s \in G$ *avem*

$$\mu^*(As) = \Delta(s)\, \mu^*(A).$$

Corolarul 2. *Pentru orice funcție* $f \geqslant 0$ *definită pe* G *și orice* $s \in G$ *avem*

$$\int^* f(xs)\, \Delta(x^{-1})\, dx = \int f(x)\, \Delta(x^{-1})\, dx.$$

Într-adevăr, notînd $g(x) = f(x)\, \Delta(x^{-1})$ avem

$$f(xs)\, \Delta(x^{-1}) = f(xs)\, \Delta(s^{-1}x^{-1})\, \Delta(s) = g(xs)\, \Delta(s).$$

deci

$$\int^* f(xs)\, \Delta(x^{-1})\, dx = \Delta(s) \int^* g(xs)\, dx = \Delta(s)\, \Delta(s^{-1}) \int^* g(x)\, dx =$$

$$= \int^* f(x)\, \Delta(x^{-1})\, dx.$$

Observație. Corolarul 2 arată că măsura $\Delta(x^{-1})dx$ este invariantă la dreapta pe G.

Corolarul 3. *Orice măsură Haar invariantă la stînga este echivalentă cu orice măsură Haar invariantă la dreapta.*

Într-adevăr, deoarece funcția $\Delta(x)$ nu se anulează, măsurile dx și $\Delta(x^{-1})dx$ sînt echivalente. Orice măsură invariantă la stînga este echivalentă cu dx și orice măsură Haar invariantă la dreapta este echivalentă cu $\Delta(x^{-1})\, dx$, de unde rezultă corolarul.

Urmează că funcțiile neglijabile și funcțiile măsurabile sînt aceleași pentru măsurile Haar invariante la stînga ca și pentru cele invariante la dreapta.

Propoziția 14. *Fie* $\mathfrak{f}$ *o funcție definită pe* G *cu valori într-un spațiu Banach* E *sau în* $\overline{R}$.

1) *Funcția* $\mathfrak{f}^s$ *este neglijabilă dacă și numai dacă* $\mathfrak{f}$ *este neglijabilă*;

2) *Funcția* $\mathfrak{f}^s$ *este măsurabilă dacă și numai dacă* $\mathfrak{f}$ *este măsurabilă*;

3) *Funcția* $\mathfrak{f}^s$ *este integrabilă dacă și numai dacă* $\mathfrak{f}$ *este integrabilă. În acest caz avem*

$$\int \mathfrak{f}(xs^{-1})\, dx = \Delta(s) \int \mathfrak{f}(x)\, dx.$$

Se ține seama de propoziția precedentă și de propozițiile 2 și 3 și teorema 1 din § 20.

Corolarul 1. *Dacă* $\mathfrak{f} \in \mathcal{L}_E^p$, $1 \leqslant p \leqslant +\infty$ *și* $s \in G$, *atunci* $\mathfrak{f}^s \in \mathcal{L}_E^p$ *și*

$$N_p(\mathfrak{f}^s) = \Delta(s)^{\frac{1}{p}}\, N_p(\mathfrak{f}).$$

Într-adevăr, dacă $\mathbf{f} \in \mathcal{L}_E^p$, atunci $\mathbf{f}$ este măsurabilă şi $N_p(\mathbf{f}) < +\infty$. Urmează că $\mathbf{f}^s$ este măsurabilă. Dacă $p < +\infty$ avem

$$N_p(\mathbf{f}^s) = \left(\int^* |\mathbf{f}(xs^{-1})|^p \, dx\right)^{\frac{1}{p}} = \left(\Delta(s) \int^* |\mathbf{f}(x)|^p \, dx\right)^{\frac{1}{p}} = \Delta(s)^{\frac{1}{p}} N_p(\mathbf{f})$$

deci $\mathbf{f}^s \in \mathcal{L}_E^p$.

Dacă $p = +\infty$, există o mulţime neglijabilă $N \subset G$ astfel încît pentru $x \in N$ să avem $|\mathbf{f}(x)| \leqslant N_\infty(\mathbf{f})$. Atunci Ns este neglijabilă şi pentru $x \in Ns$ avem $xs^{-1} \in N$ deci $|\mathbf{f}(xs^{-1})| \leqslant N_\infty(\mathbf{f})$, adică $|\mathbf{f}^s(x)| \leqslant N_\infty(\mathbf{f})$. Urmează că $N_\infty(\mathbf{f}^s) \leqslant N_\infty(\mathbf{f}) < +\infty$, deci $\mathbf{f} \in \mathcal{L}_E^\infty$. Cum avem de asemenea $\mathbf{f} = (\mathbf{f}^s)^{s^{-1}}$, rezultă că $N_\infty(\mathbf{f}) \leqslant N_\infty(\mathbf{f}^s)$ şi deci $N_\infty(\mathbf{f}^s) = N_\infty(\mathbf{f})$.

Deoarece, în acest caz, $\Delta(s)^{\frac{1}{p}} \equiv 1$, rezultă că egalitatea $N_p(\mathbf{f}^s) = \Delta(s)^{\frac{1}{p}} N_p(\mathbf{f})$ este verificată pentru orice p.

Corolarul 2. *Dacă* $\mathbf{f} \in \mathcal{L}_E^\infty$ *şi* $s \in G$, *atunci* $\mathbf{f}^s \in \mathcal{L}_E^\infty$ *şi* $N_\infty(\mathbf{f}^s) = N_\infty(\mathbf{f})$.

Corolarul 3. *Dacă* G *este unimodular, pentru orice funcţie* $\mathbf{f} \in \mathcal{L}_E^p$, $1 \leqslant p \leqslant +\infty$, *şi* $s \in G$ *avem* $\mathbf{f}^s \in \mathcal{L}_E^p$ *şi*

$$N_p(\mathbf{f}^s) = N_p(\mathbf{f}).$$

Dacă $\mathbf{f} \in \mathcal{L}_E^1$, *atunci*

$$\int \mathbf{f}(xs) \, dx = \int \mathbf{f}(x) \, dx.$$

Propoziţia 15. *Fie* E *un spaţiu Banach şi* $1 \leqslant p < +\infty$. *Dacă* $\mathbf{f} \in \mathcal{L}_E^p$, *aplicaţia* $s \to \mathbf{f}^s$ *a lui* G *în* $\mathcal{L}_E^p$ *este continuă.*

Fie $\mathbf{f} \in \mathcal{L}_E^p$ şi $\varepsilon > 0$. Să alegem $\mathbf{g} \in \mathcal{K}_E(G)$ astfel încît

$$N_p(\mathbf{f} - \mathbf{g}) < \frac{\varepsilon}{6}.$$

Deoarece, conform propoziţiei 3, aplicaţia $s \to \mathbf{g}^s$ a lui G în $\mathcal{L}_E^p$ este continuă în e, iar funcţia modulară Δ este de asemenea continuă în e, există o vecinătate V a lui e astfel încît să avem

$$N_p(\mathbf{g}^s - \mathbf{g}) < \frac{\varepsilon}{3} \text{ şi } |\Delta(s) - \Delta(e)| < 1 \text{ pentru } s \in V.$$

Urmează că pentru $s \in V$ avem

$$\Delta(s) < \Delta(e) + 1 = 2$$

deci

$$N_p(\mathbf{f}^s - \mathbf{g}^s) = \Delta(s)^{\frac{1}{p}} N_p(\mathbf{f} - \mathbf{g}) < \frac{\varepsilon}{3}$$

şi deci

$$N_p(\mathbf{f}^s - \mathbf{f}) \leqslant N_p(\mathbf{f}^s - \mathbf{g}^s) + N_p(\mathbf{g}^s - \mathbf{g}) + N_p(\mathbf{g} - \mathbf{f}) < \varepsilon.$$

Deducem că aplicația $s \to \mathbf{f}^s$ a lui G în $\mathcal{L}_E^p$ este continuă în e.

Fie acum $a \in G$ și să arătăm că aplicația $s \to \mathbf{f}^s$ este continuă în a. Fie $\varepsilon > 0$ și fie V o vecinătate a lui e astfel încît să avem

$$N_p(\mathbf{f}^s - \mathbf{f}) < \varepsilon\, \Delta(a)^{-\frac{1}{p}}, \text{ pentru } s \in V.$$

Pentru orice punct $t \in Va$ avem atunci $ta^{-1} \in V$, deci

$$N_p(\mathbf{f}^t - \mathbf{f}^a) = N_p(\mathbf{f}^{ta^{-1}a} - \mathbf{f}^a) = \Delta(a)^{\frac{1}{p}} N_p(\mathbf{f}^{ta^{-1}} - \mathbf{f}) < \varepsilon$$

și deci aplicația $t \to \mathbf{f}^t$ a lui G în $\mathcal{L}_E^p$ este continuă în a. Deoarece a a fost ales arbitrar în G, deducem că această aplicație este continuă pe G și astfel propoziția este complet demonstrată.

Corolar. *Dacă pentru fiecare $s \in G$ punem*

$$V_s\, \mathbf{f} = \mathbf{f}^{s^{-1}}, \text{ pentru } \mathbf{f} \in \mathcal{L}_E^p,\ 1 \leqslant p < +\infty,$$

atunci $V : s \to V_s$ este o reprezentare simplu continuă a lui G în grupul multiplicativ al operatorilor liniari și continui ai spațiului $\mathcal{L}_E^p$.

Se verifică imediat că $V_{st} = V_s\, V_t$ și $V_e = I$. Avem apoi

$$N_p(V_s\, \mathbf{f}) = N_p(\mathbf{f}^{s^{-1}}) = \Delta(s^{-1})^{\frac{1}{p}}\, N_p(\mathbf{f})$$

deci $\| V_s \| = \Delta(s^{-1})^{\frac{1}{p}} < +\infty$ și deci V_s este continuu. Continuitatea simplă a reprezentării V rezultă din continuitatea aplicației $s \to \mathbf{f}^{s^{-1}}$.

Observație. Reprezentarea V se numește *reprezentarea regulată* la dreaptă a grupului G.

Propoziția 16. *Fie E un spațiu Banach. Dacă $\mathbf{f} \in \mathcal{K}_E(G)$, atunci $\check{\mathbf{f}}\check{\Delta} \in \mathcal{K}_E(G)$ și*

$$\int \mathbf{f}(x^{-1})\, \Delta(x^{-1})\, dx = \int \mathbf{f}(x)\, dx.$$

Pentru orice funcție $\mathbf{f} \in \mathcal{K}_E(G)$ aplicația $x \to \mathbf{f}(x^{-1})\, \Delta(x^{-1})$ a lui G în E aparține lui $\mathcal{K}_E(G)$. Să considerăm funcționala ν definită pe $\mathcal{K}(G)$ prin egalitatea

$$\nu(f) = \int \check{f}(x)\, \check{\Delta}(x)\, dx = \int f(x^{-1})\, \Delta(x^{-1})\, dx, \text{ pentru } f \in \mathcal{K}(G).$$

Se verifică ușor că ν este o funcțională liniară pozitivă, deci o măsură pozitivă pe G. Această măsură este invariantă la stînga :

$$\nu(f_s) = \int f_s(x^{-1})\, \Delta(x^{-1})\, dx = \int f(s\, x^{-1})\, \Delta(x^{-1})\, dx =$$

$$\int \check{f}(x s^{-1})\, \check{\Delta}(x s^{-1})\, \Delta(s^{-1})\, dx = \int \check{f}(x)\, \check{\Delta}(x)\, dx.$$

Urmează că există un număr $c \geqslant 0$ astfel încît să avem

$$\nu(f) = c \int f(x)\, dx, \text{ pentru } f \in \mathcal{K}(G).$$

Să arătăm că $c = 1$. Fie $\varepsilon > 0$. Deoarece Δ este continuă în e iar $\Delta(e) = 1$, există o vecinătate *simetrică* V a lui e astfel încît să avem

$$|1 - \Delta(x)| < \varepsilon, \text{ pentru } x \in V.$$

Să alegem o funcție $f \in \mathcal{K}_E(G)$ *simetrică* ($f(x^{-1}) = f(x)$) și cu suportul conținut în V, cu

$$\int f(x)\, dx = 1.$$

Atunci

$$|1 - c| = \left| (1 - c) \int f(x)\, dx \right| = \left| \int f(x)\, dx - \nu(f) \right| =$$

$$= \left| \int (1 - \Delta(x^{-1}))\, f(x)\, dx \right| < \varepsilon \int f(x)\, dx = \varepsilon.$$

Deoarece $\varepsilon > 0$ este arbitrar, deducem că $c = 1$ și deci

$$\nu(f) = \int f(x)\, dx$$

pentru orice funcție $f \in \mathcal{K}(G)$,

Dacă $\mathbf{f} \in \mathcal{K}_E(G)$, pentru orice $z \in E'$ avem $< \mathbf{f}, z > \in \mathcal{K}(G)$, deci

$$< \int \mathbf{f}(x^{-1})\, \Delta(x^{-1})\, dx, z > = \int < \mathbf{f}(x^{-1})\, \Delta(x^{-1}), z > dx =$$

$$= \int < \mathbf{f}(x^{-1}, z > \Delta(x^{-1})\, dx = \int < \mathbf{f}(x), z > dx = < \int \mathbf{f}(x)\, dx, z >,$$

de unde

$$\int \mathbf{f}(x^{-1})\, \Delta(x^{-1})\, dx = \int \mathbf{f}(x)\, dx$$

și propoziția este demonstrată.

Vom arăta mai departe că propoziția rămîne valabilă și pentru funcții din $\mathcal{L}_E^1$.

Propoziția 17. *Pentru orice funcție $f \geqslant 0$ definită pe G avem*

$$\int^* f(x^{-1})\, \Delta(x^{-1})\, dx = \int^* f(x)\, dx.$$

Să notăm $\nu = \Delta(x^{-1})\,dx$ și $\alpha(x) = x^{-1}$. Deoarece α este un omeomorfism al lui G pe G, este proprie în raport cu măsura ν. Conform propoziției 15 avem $\alpha(\nu) = dx$. Atunci (prop. 1, § 20).

$$\int^* f(x^{-1})\,\Delta(x^{-1})\,dx = \int^* f(\alpha(x))\,d\nu(x) = \int^* f(x)\,d\alpha(\nu) = \int^* f(x)\,dx.$$

Corolar. *Dacă G este unimodular (în particular, dacă G este comutativ, discret, sau compact), pentru orice funcție $f \geqslant 0$ definită pe G avem*

$$\int^* f(x^{-1})\,dx = \int^* f(x)\,dx$$

și pentru orice mulțime $A \subset G$ avem

$$\mu^*(A^{-1}) = \mu^*(A)$$

unde $d\mu = dx$.

Propoziția 18. *Fie $\mathfrak{f}$ o funcție definită pe G cu valori într-un spațiu Banach E sau în $\overline{R}$.*

1) *Funcția $\mathfrak{f}$ este neglijabilă dacă și numai dacă funcția $\check{\mathfrak{f}}$ este neglijabilă;*

2) *Funcția $\mathfrak{f}$ este măsurabilă dacă și numai dacă funcția $\check{\mathfrak{f}}$ este măsurabilă;*

3) *Funcția $\mathfrak{f}$ este integrabilă dacă și numai dacă funcția $\check{\mathfrak{f}}\,\check{\Delta}$ este integrabilă. În acest caz avem*

$$\int \mathfrak{f}(x^{-1})\,\Delta(x^{-1})\,dx = \int \mathfrak{f}(x)\,dx.$$

Într-adevăr, deoarece $\Delta(x^{-1})$ este continuă și nu se anulează, măsura $\Delta(x^{-1})dx$ este echivalentă cu măsura dx (prop. 6, §18). Pe de altă parte, notînd $\alpha(x) = x^{-1}$, avem $\alpha(\check{\Delta}\,dx) = dx$. Atunci $\mathfrak{f}$ este neglijabilă pentru $dx = \alpha(\check{\Delta}\,dx)$ dacă și numai dacă $\check{\mathfrak{f}} = \mathfrak{f} \circ \alpha$ este neglijabilă pentru $\check{\Delta}dx$ (prop. 2, § 20), iar funcția $\check{\mathfrak{f}}$ este neglijabilă pentru $\check{\Delta}\,dx$ dacă și numai dacă $\check{\mathfrak{f}}$ este neglijabilă pentru dx (definiția 1, § 18). Punctul 2) al propoziției se demonstrează la fel. Punctul 3) se demonstrează folosind rezultatele din § 16 și § 20.

Corolarul 1. *Dacă $\mathfrak{f} \in \mathcal{L}_E^p$, $1 \leqslant p \leqslant +\infty$, atunci $\check{\mathfrak{f}}\,\check{\Delta}^{\frac{1}{p}} \in \mathcal{L}_E^p$ și*

$$N_p(\mathfrak{f}) = N_p(\check{\mathfrak{f}}\,\check{\Delta}^{\frac{1}{p}}).$$

Dacă $p = +\infty$ și dacă $\mathfrak{f} \in \mathcal{L}_E^\infty$, atunci, ținînd seama de punctele 1) și 2) ale propoziției 18, deducem că $\check{\mathfrak{f}} \in \mathcal{L}_E^\infty$ și $N_\infty(\mathfrak{f}) = N_\infty(\check{\mathfrak{f}})$ și propoziția este demonstrată în acest caz.

Să presupunem că $1 \leqslant p < +\infty$ și fie $\mathbf{f} \in \mathcal{L}_E^p$. Atunci $\check{\mathbf{f}}$ este măsurabilă și $\check{\Delta}^{\frac{1}{p}}$ este continuă, deci $\check{\mathbf{f}}\,\check{\Delta}^{\frac{1}{p}}$ este măsurabilă. Avem apoi

$$N_p\left(\check{\mathbf{f}}\,\check{\Delta}^{\frac{1}{p}}\right) = \left(\int^* |\,\check{\mathbf{f}}\,\check{\Delta}^{\frac{1}{p}}\,|^p \mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p}} = \left(\int^* |\mathbf{f}(x^{-1})|^p \Delta(x^{-1})\,\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p}} =$$

$$= \left(\int^* |\mathbf{f}(x)|^p \mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p}} = N_p(\mathbf{f}) < +\infty$$

deci $\check{\mathbf{f}}\,\check{\Delta}^{\frac{1}{p}} \in \mathcal{L}_E^p$ și propoziția este complet demonstrată.

Corolar 2. *Dacă* $\mathbf{f} \in \mathcal{L}_E^\infty$, *atunci* $\check{\mathbf{f}} \in \mathcal{L}_E^\infty$ *și* $N_\infty(\mathbf{f}) = N_\infty(\check{\mathbf{f}})$.

Corolarul 3. *Să presupunem că* G *este unimodular. Dacă* $\mathbf{f} \in \mathcal{L}_E^p$, $1 \leqslant p \leqslant +\infty$, *atunci* $\check{\mathbf{f}} \in \mathcal{L}_E^p$ *și*

$$N_p(\mathbf{f}) = N_p(\check{\mathbf{f}}).$$

Dacă $\mathbf{f} \in \mathcal{L}_E^1$, *atunci*

$$\int \mathbf{f}(x^{-1})\,\mathrm{d}x = \int \mathbf{f}(x)\,\mathrm{d}x$$

§ 24. PRODUSUL DE CONVOLUȚIE

1. Convoluția a două măsuri

Fie X, Y, Z trei spații Banach și $(u, v) \to uv$ o aplicație biliniară și continuă a lui $X \times Y$ în Z cu $|uv| \leqslant |u|\,|v|$ pentru orice $u \in X$ și $v \in Y$.

Fie $\mathbf{m} : \mathcal{K}(G) \to X$ și $\mathbf{n} : \mathcal{K}(G) \to Y$ două măsuri majorate.

Să presupunem că pentru orice funcție $f \in \mathcal{K}(G)$, funcția de două variabile $f(xy)$ definită pe $G \times G$ este integrabilă în raport cu măsura pozitivă $|\mathbf{m}| \otimes |\mathbf{n}|$. Deoarece $|\mathbf{m} \otimes \mathbf{n}| \leqslant |\mathbf{m}| \otimes |\mathbf{n}|$, rezultă că funcția $f(xy)$ este integrabilă în raport cu $\mathbf{m} \otimes \mathbf{n}$. Să notăm atunci

$$\mathbf{l}(f) = \iint f(xy)\,\mathbf{dm}(x)\,\mathbf{dn}(y)\cdot \tag{1}$$

Se verifică ușor că $\mathbf{l}$ este o aplicație liniară a lui $\mathcal{K}(G)$ în Z.

Să notăm de asemenea

$$\lambda(f) = \iint f(xy)\,\mathrm{d}|\mathbf{m}|(x)\,\mathrm{d}|\mathbf{n}|(y). \tag{1'}$$

Se verifică uşor că λ este o funcţională liniară pozitivă pe $\mathcal{K}(G)$ deci este o măsură pozitivă pe G. Aplicaţia liniară $\mathbf{l} : \mathcal{K}(G) \to Z$ este majorată de λ :

$$|\mathbf{l}(f)| = \left| \iint f(xy)\, \mathbf{dm} \otimes \mathbf{n}\,(x, y) \right| \leqslant \iint |f(xy)|\, |\mathbf{d}|\, \mathbf{m} \otimes \mathbf{n}|\,(x, y) \leqslant$$

$$\leqslant \iint |f(x, y)|\, \mathbf{d}\,|\mathbf{m}| \otimes |\mathbf{n}|\,(x, y) = \lambda(|f|).$$

Urmează că $\mathbf{l}$ este o măsură majorată pe G cu valori în Z.

Definiţia 1. *Să presupunem că pentru orice $f \in \mathcal{K}(G)$ funcţia $f(xy)$ este $|\mathbf{m}| \otimes |\mathbf{n}|$-integrabilă. Măsura $\mathbf{l}$ definită pe G prin egalitatea (1) se numeşte convoluţia măsurilor $\mathbf{m}$ şi $\mathbf{n}$ şi se notează $\mathbf{m} * \mathbf{n}$:*

$$(\mathbf{m} * \mathbf{n})(f) = \iint f(xy)\, \mathbf{dm}\,(x)\, \mathbf{dn}\,(y), \quad \textit{pentru } f \in \mathcal{K}(G).$$

Conform acestei definiţii, măsura λ definită de egalitatea (1′) este convoluţia măsurilor pozitive $|\mathbf{m}|$ şi $|\mathbf{n}|$. Inegalitatea $|\mathbf{l}| \leqslant \lambda$ se scrie acum astfel :

$$|\mathbf{m} * \mathbf{n}| \leqslant |\mathbf{m}| * |\mathbf{n}|.$$

Observaţii. 1° Dacă $f \in \mathcal{K}(G)$, atunci funcţia de două variabile $f(xy)$ este continuă şi mărginită pe $G \times G$ dar nu este neapărat integrabilă în raport cu măsura $|\mathbf{m}| \otimes |\mathbf{n}|$ dacă $\mathbf{m}$ şi $\mathbf{n}$ sînt arbitrare. Aşadar, pentru două măsuri arbitrare $\mathbf{m}$ şi $\mathbf{n}$, convoluţia lor $\mathbf{m} * \mathbf{n}$ poate să nu fie definită, să nu aibă sens.

2° Conform definiţiei 1, a spune că $\mathbf{m} * \mathbf{n}$ are sens, este acelaşi lucru cu a spune că $|\mathbf{m}| * |\mathbf{n}|$ are sens.

Propoziţia 1. *Dacă una din măsurile $\mathbf{m}$ şi $\mathbf{n}$ are suport compact, atunci $\mathbf{m} * \mathbf{n}$ are sens.*

Să presupunem că $\mathbf{m}$ este cu suport compact. Să notăm $\mu = |\mathbf{m}|$ şi $\nu = |\mathbf{n}|$. Fie C suportul compact al lui $\mathbf{m}$ deci şi al lui μ.

Fie $f \in \mathcal{K}(G)$ şi fie K suportul funcţiei f. Fie C' suportul măsurii $\mu \otimes \nu$ şi K' suportul funcţiei de două variabile $f(xy)$. Să notăm $I = C' \cap K' \subset G \times G$. Vom arăta că

$$I \subset C \times C^{-1} K.$$

Fie $(x, y) \in I$. Atunci $(x, y) \in C' \subset C \times G$, deci $x \in C$. Avem de asemenea $(x, y) \in K'$ deci $xy \in K$. De aici rezultă $y \in x^{-1} K$ şi cum $x \in C$, deducem $y \in C^{-1} K$. Urmează că $(x, y) \in C \times C^{-1} K$ şi incluziunea de mai sus este demonstrată. Rezultă că I este o mulţime relativ compactă. Funcţia $f(xy)$ este continuă şi mărginită pe $G \times G$ şi

$$\iint^{*} |f(xy)|\, \mathrm{d}\mu \otimes \nu \leqslant \|f\|\, \mu \otimes \nu(I) < +\infty.$$

Urmează că $f(xy)$ este $\mu \otimes \nu$-integrabilă, deci $\mu * \nu$ şi $\mathbf{m} * \mathbf{n}$ au sens.

Propoziția 2. *Pentru orice măsură majorată* $\mathbf{m} : \mathcal{K}(G) \to X$ *avem*

$$\mathbf{m} * \varepsilon_e = \varepsilon_e * \mathbf{m} = \mathbf{m}.$$

Într-adevăr, ε_e are suport compact deci convoluțiile $\mathbf{m} * \varepsilon_e$ și $\varepsilon_e * \mathbf{m}$ au sens. Pentru orice funcție $f \in \mathcal{K}(G)$ avem

$$\int f \mathrm{d}(\mathbf{m} * \varepsilon_e) = \iint f(xy)\, \mathrm{d}\mathbf{m}(x)\, \mathrm{d}\varepsilon_e(y) = \int \mathrm{d}\mathbf{m}(x) \int f(xy)\, \mathrm{d}\varepsilon_e(y) = \int f(x)\, \mathrm{d}\mathbf{m}(x)$$

și

$$\int f \mathrm{d}(\varepsilon_e * \mathbf{m}) = \iint f(xy)\, \mathrm{d}\varepsilon_e(x)\, \mathrm{d}\mathbf{m}(y) = \int \mathrm{d}\mathbf{m}(y) \int f(xy)\, \mathrm{d}\varepsilon_e(x) = \int f(y)\, \mathrm{d}\mathbf{m}(y)$$

deci $\mathbf{m} * \varepsilon_e = \mathbf{m}$ și $\varepsilon_e * \mathbf{m} = \mathbf{m}$.

Propoziția 3. *Dacă* $\mathbf{m}$ *și* $\mathbf{n}$ *sînt mărginite, atunci* $\mathbf{m} * \mathbf{n}$ *are sens. Măsura* $\mathbf{m} * \mathbf{n}$ *este mărginită și*

$$\|\mathbf{m} * \mathbf{n}\| \leqslant \|\mathbf{m}\|\, \|\mathbf{n}\|.$$

Să notăm $\mu = |\mathbf{m}|$ și $\nu = |\mathbf{n}|$. Din ipoteză rezultă că μ și ν sînt mărginite, deci $\mu \otimes \nu$ este mărginită. Dacă $f : G \to R$ este continuă și mărginită, atunci funcția $f(xy)$ este continuă și mărginită pe $G \times G$ deci este $\mu \otimes \nu$ -integrabilă. În particular, dacă $f \in \mathcal{K}(G)$, atunci $f(xy)$ este $\mu \otimes \nu$-integrabilă, deci $\mu \otimes \nu$ are sens și deci și $\mathbf{m} * \mathbf{n}$ are sens.

Pentru orice $f \in \mathcal{K}(G)$ avem

$$(\mu * \nu)(f) = \iint f(xy)\, \mathrm{d}\mu \otimes \nu,$$

deci

$$|(\mu * \nu)(f)| \leqslant \|f\|\, \|\mu \otimes \nu\|.$$

de unde

$$\|\mu * \nu\| \leqslant \|\mu \otimes \nu\| < +\infty.$$

Deducem de aici că $\mu * \nu$ este mărginită. Din inegalitatea

$$|\mathbf{m} * \mathbf{n}| \leqslant |\mathbf{m}| * |\mathbf{n}| = \mu * \nu$$

deducem că $|\mathbf{m} * \mathbf{n}|$ este mărginită, adică $\mathbf{m} * \mathbf{n}$ este mărginită.

Din egalitatea

$$(\mathbf{m} * \mathbf{n})(f) = \iint f(xy)\, \mathrm{d}\mathbf{m}\, \mathrm{d}\mathbf{n}, \text{ pentru } f \in \mathcal{K}(G)$$

deducem ca mai sus

$$\|\mathbf{m} * \mathbf{n}\| \leqslant \|\mathbf{m} \otimes \mathbf{n}\|.$$

Dar $\|\mathbf{m}\otimes\mathbf{n}\| \leqslant \|\mathbf{m}\|\,\|\mathbf{n}\|$ şi deci

$$\|\mathbf{m} * \mathbf{n}\| \leqslant \|\mathbf{m}\|\,\|\mathbf{n}\|.$$

Se verifică uşor că dacă $\mathbf{m} * \mathbf{n}$ şi $\mathbf{m}' * \mathbf{n}$ au sens iar α şi β sînt scalari, atunci $(\alpha\mathbf{m} + \beta\mathbf{m}') * \mathbf{n}$ are sens şi

$$(\alpha\mathbf{m} + \beta\mathbf{m}') * \mathbf{n} = \alpha(\mathbf{m} * \mathbf{n}) + \beta(\mathbf{m}' * \mathbf{n})$$

deci mulţimea măsurilor majorate $\mathbf{m}$ pentru care $\mathbf{m} * \mathbf{n}$ are sens este un spaţiu vectorial iar convoluţia $\mathbf{m} * \mathbf{n}$ este liniară în $\mathbf{m}$.

De asemenea, mulţimea măsurilor $\mathbf{n}$ pentru care convoluţia $\mathbf{m} * \mathbf{n}$ cu o măsură dată $\mathbf{m}$, are sens, este un spaţiu vectorial iar $\mathbf{m} * \mathbf{n}$ este liniară în $\mathbf{n}$.

În particular, $\mathbf{m} * \mathbf{n}$ este o aplicaţie biliniară a produsului $\mathscr{M}^1_X(G) \times \mathscr{M}^1_Y(G)$ în $\mathscr{M}^1_Z(G)$.

Propoziţia 4. *Convoluţia este comutativă dacă şi numai dacă grupul G este comutativ.*

Măsurile $\mathbf{m} * \mathbf{n}$ şi $\mathbf{n} * \mathbf{m}$ sînt definite prin egalităţile :

$$(\mathbf{m} * \mathbf{n})(f) = \iint f(xy)\,\mathrm{d}\mathbf{m}(x)\,\mathrm{d}\mathbf{n}(y),$$

$$(\mathbf{n} * \mathbf{m})(f) = \iint f(xy)\,\mathrm{d}\mathbf{n}(x)\,\mathrm{d}\mathbf{m}(y) = \iint f(xy)\,\mathrm{d}\mathbf{m}(y)\,\mathrm{d}\mathbf{n}(x) =$$

$$= \iint f(yx)\,\mathrm{d}\mathbf{m}(x)\,\mathrm{d}\mathbf{n}(y),$$

pentru $f \in \mathscr{K}(G)$.

Dacă G este comutativ, atunci $f(xy) = f(yx)$, deci $\mathbf{m} * \mathbf{n} = \mathbf{n} * \mathbf{m}$.

Reciproc, să presupunem că $\mathbf{m} * \mathbf{n} = \mathbf{n} * \mathbf{m}$, *oricare* ar fi măsurile $\mathbf{m}$ şi $\mathbf{n}$ pentru care $\mathbf{m} * \mathbf{n}$ şi $\mathbf{n} * \mathbf{m}$ au sens, şi să arătăm că G este comutativ. Pentru orice funcţii g, $h \in \mathscr{K}(G)$ considerăm măsurile reale μ şi ν definite prin egalităţile

$$\mathrm{d}\mu = g\,\mathrm{d}x, \qquad \mathrm{d}\nu = h\,\mathrm{d}x.$$

Pentru orice funcţie $f \in \mathscr{K}(G)$ avem

$$(\mu * \nu)(f) = \iint f(xy)\,g(x)\,h(y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$

$$(\nu * \mu)(f) = \iint f(xy)\,h(x)\,g(y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \iint f(yx)\,g(x)\,h(y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y,$$

deci

$$\iint [f(xy) - f(yx)]\,g(x)\,h(y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = (\mu * \nu)(f) - (\nu * \mu)(f) = 0.$$

Deoarece combinațiile liniare finite de forma $\sum_i g_i(x)\, h_i(y)$ cu $g_i, h_i \in \mathcal{K}(G)$ sînt dense în $\mathcal{K}(G\times G)$, pentru topologia convergenței uniforme (lema 1, § 22) deducem

$$\iint \Phi(x, y)\,[f(xy) - f(yx)]\,dx\,dy = 0$$

oricare ar fi $\Phi \in \mathcal{K}(G\times G)$ și $f \in \mathcal{K}(G)$.

Aceasta înseamnă că pentru fiecare funcție $f \in \mathcal{K}(G)$ măsura $[f(xy) - f(yx)]\,dx\,dy$ este nulă, deci $f(xy) - f(yx) = 0$ aproape peste tot în raport cu măsura $dx\,dy$. Deoarece funcția $f(xy) - f(yx)$ este continuă iar suportul măsurii $dx\,dy$ este $G\times G$, deducem că

$$f(xy) - f(yx) = 0$$

oricare ar fi $f \in \mathcal{K}(G)$.

Dacă ar exista două puncte $x, y \in G$ cu $xy \neq yx$, alegînd o vecinătate deschisă V a lui xy care să nu conțină pe yx, există o funcție $f \in \mathcal{K}(G)$ cu $f(xy) = 1$ și $f(z) = 0$ pentru $z \in V$, în particular $f(yx) = 0$, deci $f(xy) \neq f(yx)$ ceea ce contrazice concluzia de mai sus.

Așadar, avem $xy = yx$ oricare ar fi $x, y \in G$, deci G este comutativ.

Propoziția 5. *Pentru orice puncte s, $t \in G$ avem*

$$\varepsilon_s * \varepsilon_t = \varepsilon_{st}.$$

Dacă $s \neq t$ atunci $\| \varepsilon_s - \varepsilon_t \| = 2$.

Pentru $f \in \mathcal{K}(G)$ avem

$$(\varepsilon_s * \varepsilon_t)(f) = \iint f(xy)\,d\varepsilon_s(x)\,d\varepsilon_t(y) = \int d\varepsilon_s(x) \int f(xy)\,d\varepsilon_t(y) =$$

$$= \int f(xt)\,d\varepsilon_s(x) = f(st) = \varepsilon_{st}(f),$$

deci $\varepsilon_s * \varepsilon_t = \varepsilon_{st}$.

Dacă $s \neq t$, există o funcție $f \in \mathcal{K}(G)$ cu $f(s) = 1$, $f(t) = -1$ și $\|f\| = 1$. Avem atunci

$$\| \varepsilon_s - \varepsilon_t \| \geqslant | \varepsilon_s(f) - \varepsilon_t(f) | = 1 + 1 = 2.$$

Pe de altă parte

$$\| \varepsilon_s - \varepsilon_t \| \leqslant \| \varepsilon_s \| + \| \varepsilon_t \| = 2,$$

deci

$$\| \varepsilon_s - \varepsilon_t \| = 2.$$

2. Integrarea în raport cu convoluția a două măsuri

Fie μ și ν două măsuri *pozitive* pe G astfel încît $\mu * \nu$ are sens. Aceasta înseamnă că pentru orice funcție $\varphi \in \mathcal{K}(G)$, funcția $\varphi(xy)$ este $\mu \otimes \nu$ -integrabilă și

$$(\mu * \nu)(\varphi) = \iint \varphi(xy)\, d\mu(x)\, d\nu(y)$$

Să notăm cu $\alpha : G \times G \to G$ produsul în G : $\alpha(x, y) = xy$. Să observăm că α este continuă pe $G \times G$ deci $\mu \otimes \nu$ -măsurabilă, iar condiția ca $\varphi \circ \alpha$ să fie $\mu \otimes \nu$ -integrabilă, înseamnă că funcția compusă $\varphi \circ \alpha$ este $\mu \otimes \nu$ -integrabilă.

Așadar, a spune că $\mu * \nu$ are sens este echivalent cu a spune că funcția α este $\mu \otimes \nu$ -proprie, iar convoluția $\mu * \nu$ este imaginea măsurii $\mu \otimes \nu$ prin α :

$$\mu * \nu = \alpha(\mu \otimes \nu).$$

Rezultatele privind imaginile de măsuri din § 20 se transcriu pentru convoluția $\mu * \nu$ astfel :

Propoziția. 6 *Pentru orice funcție* $f \geqslant 0$ *definită pe* G *avem*

$$(\mu * \nu)^*(f) = \iint^* f(xy)\, d\mu(x)\, d\nu(y).$$

Se ține seama de propoziția 1, § 20.

Corolarul 1. *Pentru orice mulțime* $A \subset G$ *avem*

$$(\mu * \nu)^*(A) = (\mu \otimes \nu)^* \{(x, y) \mid xy \in A\}.$$

Corolarul 2. *Avem* $\|\mu * \nu\| = \|\mu \otimes \nu\| = \|\mu\|\, \|\nu\|$.

Într-adevăr, în corolarul 1 luăm $A = G$.

Propoziția 7. *O funcție* $\mathfrak{f}$ *definită pe* G *cu valori într-un spațiu Banach* E *sau în* $\overline{R}$ *este* $\mu * \nu$ *-neglijabilă, dacă și numai dacă funcția* $f(xy)$ *este* $\mu \otimes \nu$ *-neglijabilă.*

Se ține seama de propoziția 2, § 20.

Corolarul 1. *O mulțime* $A \subset G$ *este* $\mu * \nu$ *-neglijabilă dacă și numai dacă mulțimea* $\{(x, y) \mid xy \in A\} \subset G \times G$ *este* $\mu \otimes \nu$ *-neglijabilă.*

Corolarul 2. *Dacă* A *este suportul măsurii* μ *iar* B *este suportul măsurii* ν, *atunci* $\overline{AB}$ *este suportul măsurii* $\mu * \nu$.

Se ține seama de corolarul propoziției 5, § 22 și de corolarul 3 al propoziției 2, § 20.

Corolarul 3. *Dacă* μ *și* ν *au suport compact, atunci* $\mu * \nu$ *are suport compact.*

Propoziția 8. *O aplicație* f *a lui* G *într-un spațiu topologic este* $\mu * \nu$*-măsurabilă, dacă și numai dacă funcția* $f(xy)$ *este* $\mu \otimes \nu$ *-măsurabilă.*

Se ține seama de propoziția 3, § 20.

Corolar. *O mulțime* $A \subset G$ *este* $\mu * \nu$ *-măsurabilă, dacă și numai dacă mulțimea* $\{(x, y) \mid xy \in A\}$ *este* $\mu \otimes \nu$ *-măsurabilă.*

Propoziția 9. *O funcție* $\mathbf{f}$ *definită pe* G *cu valori într-un spațiu Banach* E *sau în* $\overline{R}$, *este* $\mu * \nu$ *-integrabilă, dacă și numai dacă* $\mathbf{f}(xy)$ *este* $\mu \otimes \nu$ *-integrabilă. În acest caz avem*

$$\int \mathbf{f}\, d(\mu * \nu) = \iint \mathbf{f}(xy)\, d\mu(x)\, d\nu(y).$$

Se ține seama de teorema 1, § 20.

Propoziția 10. *Convoluția* $\mu * \nu$ *are sens dacă și numai dacă, pentru orice mulțime compactă* $K \subset G$, *mulțimea* $\{(x, y) \mid xy \in K\} \subset G \times G$ *este* $\mu \otimes \nu$ *-integrabilă.*

Se ține seama de propoziția 4, § 20.

Fie $\mathbf{m} : \mathcal{K}(G) \to X$ și $\mathbf{n} : \mathcal{K}(G) \to Y$ două măsuri majorate astfel încît $|\mathbf{m}| * |\mathbf{n}|$ are sens. Atunci are sens de asemenea convoluția $\mathbf{m} * \mathbf{n} = \alpha(\mathbf{m} \otimes \mathbf{n})$.

Inegalitățile $|\alpha(\mathbf{m} \otimes \mathbf{n})| \leqslant \alpha(|\mathbf{m} \otimes \mathbf{n}|) \leqslant \alpha(|\mathbf{m}| \otimes |\mathbf{n}|)$ se scriu

$$|\mathbf{m} * \mathbf{n}| \leqslant \alpha(|\mathbf{m} \otimes \mathbf{n}|) \leqslant |\mathbf{m}| * |\mathbf{n}|,$$

de unde, pentru orice funcție $\varphi \geqslant 0$,

$$\int^* \varphi\, d|\mathbf{m} * \mathbf{n}| \leqslant \iint^* \varphi(xy)\, d|\mathbf{m} \otimes \mathbf{n}| \leqslant \int^* \varphi\, d(|\mathbf{m}| * |\mathbf{n}|).$$

Rezultă că

$$\|\mathbf{m} * \mathbf{n}\| \leqslant \| |\mathbf{m} * \mathbf{n}| \| \leqslant \| |\mathbf{m} \otimes \mathbf{n}| \| \leqslant \| |\mathbf{m}| * |\mathbf{n}| \| = \| |\mathbf{m}| \| \cdot \| |\mathbf{n}| \|.$$

Propoziția 11. *Fie* f *o funcție scalară definită pe* G.

1) *Dacă* $f(xy)$ *este* $\mathbf{m} \otimes \mathbf{n}$ *-neglijabilă, atunci* f *este* $\mathbf{m} * \mathbf{n}$ *-neglijabilă;*

2) *Dacă* $f(xy)$ *este* $\mathbf{m} \otimes \mathbf{n}$ *-măsurabilă, atunci* f *este* $\mathbf{m} * \mathbf{n}$ *-măsurabilă;*

3) *Dacă* $f(xy)$ *este* $\mathbf{m} \otimes \mathbf{n}$ *-integrabilă, atunci* f *este* $\mathbf{m} * \mathbf{n}$ *-integrabilă și*

$$\int f\, d(\mathbf{m} * \mathbf{n}) = \iint f(xy)\, d\mathbf{m}(x)\, d\mathbf{n}(y),$$

(a se vedea teorema 2, § 20).

Fie μ o măsură scalară pe G și $\mathbf{n} : \mathcal{K}(G) \to Y$ o măsură majorată astfel încît convoluția $|\mu| * |\mathbf{n}|$ să aibă sens; atunci are sens și convoluția $\mu * \mathbf{n} = \alpha(\mu \otimes \mathbf{n}) : \mathcal{K}(G) \to Y$.

Propoziția 12. *Fie* $\mathbf{f} : G \to X$ *o funcție.*

1) *Dacă* $\mathbf{f}(xy)$ *este* $\mu \otimes \mathbf{n}$ *-neglijabilă, atunci* $\mathbf{f}$ *este* $\mu * \mathbf{n}$ *-neglijabilă;*

2) *Dacă* $\mathbf{f}(xy)$ *este* $\mu \otimes \mathbf{n}$ *-măsurabilă, atunci* $\mathbf{f}$ *este* $\mu * \mathbf{n}$ *-măsurabilă;*

3) *Dacă* $\mathbf{f}(xy)$ *este* $\mu \otimes \mathbf{n}$ *-integrabilă, atunci* $\mathbf{f}$ *este* $\mu * \mathbf{n}$ *-integrabilă și*

$$\int \mathbf{f}\, d(\mu * \mathbf{n}) = \iint \mathbf{f}(xy)\, d\mu(x)\, d\mathbf{n}(y).$$

Se pot enunța propoziții analoge pentru $\mathbf{n} * \mu$ și $\mathbf{n} \otimes \mu$.

3. Convoluția unei măsuri cu o funcție

Fie $\mathbf{m} : \mathcal{K}(G) \to X$ o măsură majorată și $\mathbf{f}$ o funcție definită aproape peste tot pe G cu valori în Y.

Dacă $\mathbf{f}$ este local integrabilă, notînd $\mathbf{n} = \mathbf{f}dy$ se poate pune problema convoluțiilor $\mathbf{m} * \mathbf{n}$ și $\mathbf{n} * \mathbf{m}$. Vom arăta că, în anumite condiții, măsura $\mathbf{m} * \mathbf{f}dy$ este de bază dy, de forma $\mathbf{m} * \mathbf{f}dy = \mathbf{g}dy$, unde funcția $\mathbf{g}$ este definită de egalitatea

$$\mathbf{g}(y) = \int \mathbf{f}(x^{-1}y)\, d\mathbf{m}(x),$$

și că măsura $\mathbf{f}dy * \mathbf{m}$ este de bază dy, de forma $\mathbf{f}dy * \mathbf{m} = \mathbf{h}dy$, unde funcția $\mathbf{h}$ este definită de egalitatea

$$\mathbf{h}(y) = \int \mathbf{f}(y\, x^{-1})\, \Delta(x^{-1})\, d\mathbf{m}(x).$$

Să observăm că dacă $\mathbf{f}$ este definită aproape peste tot, atunci, pentru fiecare $y \in G$, funcțiile $x \to \mathbf{f}(x^{-1}y)$ și $x \to \mathbf{f}(yx^{-1})$ sînt definite de asemenea aproape peste tot.

Definiția 2. a) *Dacă mulțimea A a punctelor $y \in G$ pentru care funcția $x \to \mathbf{f}(x^{-1}y)$ este $\mathbf{m}$-integrabilă, nu este vidă, vom numi convoluția măsurii $\mathbf{m}$ cu funcția $\mathbf{f}$, funcția $\mathbf{m} * \mathbf{f} : A \to Z$ definită prin egalitatea*

$$(\mathbf{m} * \mathbf{f})(y) = \int \mathbf{f}(x^{-1}y)\, d\mathbf{m}(x), \quad \textit{pentru } y \in A.$$

b) *Dacă mulțimea B a punctelor $y \in G$ pentru care funcția $x \to \mathbf{f}(yx^{-1})\,\Delta(x^{-1})$ este $\mathbf{m}$-integrabilă, vom numi convoluția funcției $\mathbf{f}$ cu măsura $\mathbf{m}$, funcția $\mathbf{f} * \mathbf{m} : B \to Z$ definită prin egalitatea*

$$(\mathbf{f} * \mathbf{m})(y) = \int \mathbf{f}(yx^{-1})\, \Delta(x^{-1})\, d\mathbf{m}(x), \quad \textit{pentru } y \in B.$$

Observații. 1° A spune că funcția $x \to \mathbf{f}(x^{-1}y)$ este $\mathbf{m}$-integrabilă, înseamnă că această funcție este $|\mathbf{m}|$-integrabilă. Așadar funcțiile $\mathbf{m} * \mathbf{f}$ și $|\mathbf{m}| * \mathbf{f}$ sînt definite pe aceeași mulțime A.

De asemenea, funcțiile $\mathbf{f} * \mathbf{m}$ și $\mathbf{f} * |\mathbf{m}|$ sînt definite pe aceeași mulțime B.

2° Dacă funcția $x \to \mathbf{f}(x^{-1}y)$ este $\mathbf{m}$-măsurabilă oricare ar fi $y \in G$, în particular dacă $\mathbf{f}$ este boreliană, a spune că funcția $x \to \mathbf{f}(x^{-1}y)$ este $|\mathbf{m}|$-integrabilă, înseamnă că funcția $x \to |\mathbf{f}(x^{-1}y)|$ este $|\mathbf{m}|$-integrabilă. Așadar, în acest caz, funcțiile $\mathbf{m} * \mathbf{f}$, $|\mathbf{m}| * \mathbf{f}$ și $|\mathbf{m}| * |\mathbf{f}|$ sînt definite pe aceeași mulțime A.

În mod asemănător, dacă funcția $x \to \mathbf{f}(yx^{-1})$ este măsurabilă oricare ar fi $y \in G$, funcțiile $\mathbf{f} * \mathbf{m}$, $\mathbf{f} * |\mathbf{m}|$ și $|\mathbf{f}| * |\mathbf{m}|$ sînt definite pe aceeași mulțime B.

3° Dacă $\mathbf{m}$ este *mărginită* iar $\mathbf{f}$ este o funcție *boreliană și mărginită* definită peste tot, atunci convoluția $\mathbf{m} * \mathbf{f}$ este definită pe întreg grupul G,

deoarece pentru fiecare $y \in G$ funcția $x \to \mathbf{f}(x^{-1}y)$ este boreliană și mărginită, deci $\mathbf{m}$ -integrabilă.

Dacă, în plus, G este unimodular, atunci funcția $\mathbf{f} * \mathbf{m}$ este definită de asemenea pe G.

Funcția $\mathbf{f}$ este local integrabilă, dar este posibil ca $\mathbf{m} * \mathbf{f}dy$ sau $\mathbf{f}dy * \mathbf{m}$ să nu aibă sens.

4° Dacă $\mathbf{m}$ este cu suport compact iar $\mathbf{f}$ este boreliană și mărginită (sau mai general, mărginită pe suportul lui $\mathbf{m}$), atunci $\mathbf{m} * \mathbf{f}$ și $\mathbf{f} * \mathbf{m}$ sînt definite peste tot pe G (chiar dacă G nu este unimodular), și de asemenea măsurile $\mathbf{m} * \mathbf{f}dy$ și $\mathbf{f}dy * \mathbf{m}$ au sens.

Propoziția următoare dă legătura dintre măsurile $\mathbf{m} * \mathbf{f}dy$ și $\mathbf{f}dy * \mathbf{m}$ pe de o parte și funcțiile $\mathbf{m} * \mathbf{f}$ și $\mathbf{f} * \mathbf{m}$ pe de altă parte.

Propoziția 13. *Să presupunem că* $\mathbf{m}$ *este mărginită și că* $\mathbf{f}$ *este local integrabilă.*

1) *Dacă măsura* $\mathbf{m} * \mathbf{f}dy$ *are sens și dacă funcția* $(x, y) \to \mathbf{f}(x^{-1}y)$ *este* $|\mathbf{m}| \otimes dy$ *-măsurabilă (în particular dacă* $\mathbf{f}$ *este boreliană) atunci funcția* $x \to \mathbf{f}(x^{-1}y)$ *este* $\mathbf{m}$*-integrabilă aproape pentru orice* $y \in G$*, funcția*

$$(\mathbf{m} * \mathbf{f})(y) = \int \mathbf{f}(x^{-1}y)\, d\mathbf{m}(x)$$

definită aproape peste tot, este local integrabilă și

$$\mathbf{m} * (\mathbf{f}dy) = (\mathbf{m} * \mathbf{f})dy.$$

2) *Dacă măsura* $\mathbf{f}dy * \mathbf{m}$ *are sens și dacă funcția* $(x, y) \to \mathbf{f}(yx^{-1})$ *este* $dy \otimes |\mathbf{m}|$ *-măsurabilă (în particular dacă* $\mathbf{f}$ *este boreliană), atunci funcția* $x \to \mathbf{f}(yx^{-1})\Delta(x^{-1})$ *este* $\mathbf{m}$ *-integrabilă aproape pentru orice* $y \in G$*, funcția*

$$(\mathbf{f} * \mathbf{m})(y) = \int \mathbf{f}(yx^{-1})\Delta(x^{-1})\, d\mathbf{m}(x)$$

definită aproape peste tot, este local integrabilă și

$$(\mathbf{f}dy) * \mathbf{m} = (\mathbf{f} * \mathbf{m})\, dy.$$

Să notăm $\mathbf{n} = \mathbf{f}dy$, $\mu = |\mathbf{m}|$ și $\nu = |\mathbf{n}| = |\mathbf{f}|\, dy$. Să presupunem întîi că $\mathbf{m} * \mathbf{n}$ are sens. Aceasta înseamnă că $\mu * \nu$ are sens. Fie $\varphi \geqslant 0$ o funcție din $\mathcal{K}(G)$ Funcția $\varphi(xy)$ este $\mu \otimes \nu$ -integrabilă. Folosind teorema lui Fubini și invarianța la stînga a măsurii Haar, deducem

$$\int \varphi d(\mu * \nu) = \iint \varphi(xy)\, d\mu(x)\, |\mathbf{f}(y)|\, dy = \int d\mu(x) \int \varphi(xy)\, |\mathbf{f}|(y)\, dy =$$

$$= \int d\mu(x) \int \varphi(y)\, |\mathbf{f}(x^{-1}y)|\, dy = \int d\mu(x) \int |\mathbf{f}(x^{-1}y)|\, (\varphi(y)\, dy).$$

Deoarece, prin ipoteza 1), funcția $|\mathbf{f}(x^{-1}y)|$ este $\mu \otimes dy$ - măsurabilă, funcția $|\mathbf{f}(x^{-1}y)|\, \varphi(y)$ este de asemenea $\mu \otimes dy$ -măsurabilă și deci $|\mathbf{f}(x^{-1}y)|$ este măsurabilă în raport cu măsura mărginită $\varphi(y)(\mu \otimes dy) = \mu \otimes \varphi dy$.

Deoarece integrala iterată a funcției $|f(x^{-1}y)|$ în raport cu μ și φdy este finită, rezultă că $f(x^{-1}y)$ este $\mu\otimes\varphi dy$ -integrabilă și

$$\int d\mu(x)\int |f(x^{-1}y)|\,(\varphi(y)\,dy) = \int \varphi(y)\,dy\int |f(x^{-1}y)|\,d\mu(x).$$

Aceasta înseamnă că pentru fiecare funcție $\varphi\in\mathcal{K}(G)$ funcția $x\to f(x^{-1}y)$ este μ -integrabilă, cu excepția punctelor y dintr-o mulțime φdy -neglijabilă, iar funcția

$$y\to\int |f(x^{-1}y)|\,d\mu(x)$$

definită φdy -aproape peste tot, este φdy -integrabilă.

Mulțimea N a punctelor y în care integrala precedentă nu există, este independentă de φ și este φdy -neglijabilă pentru orice $\varphi\in\mathcal{K}(G)$. Urmează că N este neglijabilă pentru măsura Haar dy. Așadar funcția $(\mu*|f|)(y)=\int |f(x^{-1}y)|\,d\mu(x)$ este definită dy -aproape peste tot și este φdy -integrabilă pentru orice $\varphi\in\mathcal{K}(G)$, deci $(\mu*f)\varphi$ este dy -integrabilă pentru orice $\varphi\in\mathcal{K}(G)$, adică $\mu*|f|$ este local integrabilă pentru măsura Haar. Folosind teorema lui Fubini și rezultatele de mai sus, deducem că pentru orice funcție $\varphi\in\mathcal{K}(G)$ avem

$$\int \varphi d(m*n)=\iint \varphi(xy)\,dm(x)\,f(y)\,dy=\int dm(x)\int \varphi(xy)\,f(y)\,dy=$$

$$=\int dm(x)\int \varphi(y)\,f(x^{-1}y)\,dy=\int \varphi(y)\,dy\int f(x^{-1}y)\,dm(x)=$$

$$=\int \varphi(y)\,(m*f)(y)\,dy$$

deci $m*n=(m*f)\,dy$, adică $m*(f dy)=(m*f)\,dy$.

Să presupunem acum că $n*m$ are sens, adică $\nu*\mu$ are sens. Fie $\varphi\geqslant 0$ o funcție din $\mathcal{K}(G)$. Funcția $\varphi(xy)$ este $\mu\otimes\nu$ -integrabilă și ca mai sus,

$$\int \varphi d(\nu*\mu)=\iint \varphi(yx)\,d\mu(x)|f(y)|\,dy=\int d\mu(x)\int \varphi(yx)\,|f(y)|\,dy=$$

$$=\int d\mu(x)\int \varphi(y)\,|f(yx^{-1})|\,\Delta(x^{-1})\,dy=\int d\mu(x)\int |f(yx^{-1})|\,\Delta(x^{-1})(\varphi(y)\,dy).$$

Funcția $|f(yx^{-1})|\,\Delta(x^{-1})$ este măsurabilă în raport cu măsura mărginită $\mu\otimes\varphi dy$ și integrala iterată este finită. Urmează că funcția $|f(yx^{-1})|\,\Delta(x^{-1})$ este integrabilă în raport cu $m\otimes\varphi dy$ și

$$\int dm(x)\int f(yx^{-1})\,\Delta(x^{-1})\,(\varphi(y)\,dy)=\int \varphi(y)\,dy\int f(yx^{-1})\,\Delta(x^{-1})\,dm(x).$$

Ca mai sus, deducem că funcția $x \to \mathbf{f}(yx^{-1})\,\Delta(x^{-1})$ este $\mathbf{m}$-integrabilă, cu excepția punctelor y dintr-o mulțime neglijabilă iar funcția

$$y \to \int \mathbf{f}(yx^{-1})\,\Delta(x^{-1})\,\mathbf{dm}(x)$$

definită aproape peste tot este local integrabilă și deci funcția $\mathbf{f} * \mathbf{m}$ definită aproape peste tot de egalitatea $(\mathbf{f} * \mathbf{m})(y) = \int \mathbf{f}(yx^{-1})\,\Delta(x^{-1})\,dx$ este local integrabilă și

$$\int \varphi\,\mathbf{d}(\mathbf{n} * \mathbf{m}) = \iint \varphi(yx)\,\mathbf{dm}(x)\,\mathbf{f}(y)\,dy = \int \mathbf{dm}(x) \int \varphi(yx)\,\mathbf{f}(y)\,dy =$$

$$= \int \mathbf{dm}(x) \int \varphi(y)\,\mathbf{f}(yx^{-1})\,\Delta(x^{-1})\,dy = \int \varphi(y)\,dy \int \mathbf{f}(yx^{-1})\,\Delta(x^{-1})\,\mathbf{dm}(x) =$$

$$= \int \varphi(y)\,(\mathbf{f} * \mathbf{m})(y)\,dy$$

deci $\mathbf{n} * \mathbf{m} = (\mathbf{f} * \mathbf{m})\,dy$ adică $(\mathbf{f}dy) * \mathbf{m} = (\mathbf{f} * \mathbf{m})\,dy$.

Observații. 1° Propoziția rămîne adevărată dacă $\mathbf{m}$ nu este mărginită, dar G este reuniunea unui șir de mulțimi deschise $\mathbf{m}$-integrabile, deoarece și în acest caz se poate aplica corolarul propoziției 3, § 22.

2° Fie $\mathbf{f}' : G \to X$ o funcție egală aproape peste tot cu $\mathbf{f}$.

Dacă $\mathbf{f}$ și $\mathbf{f}'$ îndeplinesc condițiile punctului 1) din propoziția precedentă, atunci

$$\mathbf{m} * \mathbf{f} = \mathbf{m} * \mathbf{f}', \text{ aproape peste tot}$$

Dacă $\mathbf{f}$ și $\mathbf{f}'$ îndeplinesc condițiile punctului 2) din propoziția precedentă, atunci

$$\mathbf{f} * \mathbf{m} = \mathbf{f}' * \mathbf{m}, \text{ aproape peste tot.}$$

Într-adevăr, în primul caz, $\mathbf{m} * \mathbf{f}dy = \mathbf{m} * \mathbf{f}'dy$, $\mathbf{m} * \mathbf{f}dy = (\mathbf{m} * \mathbf{f})\,dy$ și $\mathbf{m} * \mathbf{f}'dy = (\mathbf{m} * \mathbf{f}')\,dy$ deci $(\mathbf{m} * \mathbf{f})\,dy = (\mathbf{m} * \mathbf{f}')\,dy$, deci $\mathbf{m} * \mathbf{f} = \mathbf{m} * \mathbf{f}'$ aproape peste tot (propoziția 4, § 17). La fel se raționează și în al doilea caz.

3° Dacă $\mathbf{m}$ are suport compact, sau dacă $\mathbf{f}$ are suport compact, atunci convoluțiile $\mathbf{m} * \mathbf{f}dy$ și $\mathbf{f}dy * \mathbf{m}$ au sens.

Dacă $\mathbf{m}$ este mărginită și $\mathbf{f} \in \mathcal{L}^1_Y$, atunci măsura $\mathbf{f}dy$ este mărginită, deci $\mathbf{m} * \mathbf{f}dy$ și $\mathbf{f}dy * \mathbf{m}$ au sens. Avem un rezultat mai general:

Propoziția 14. *Dacă* $\mathbf{m}$ *este mărginită și dacă* $\mathbf{f} \in \mathcal{L}^p_Y$, $1 \leqslant p \leqslant +\infty$, *atunci măsurile* $\mathbf{m} * \mathbf{f}dy$ *și* $\mathbf{f}dy * \mathbf{m}$ *au sens și avem*

$$\|\mathbf{m} * \mathbf{f}dy\| \leqslant \|\mathbf{m}\|\,N_p(\mathbf{f}), \quad \|\mathbf{f}dy * \mathbf{m}\| \leqslant \|\mathbf{m}\|\,N_p(\mathbf{f}).$$

Dacă în plus funcția $\mathbf{f}(x^{-1}y)$ (*respectiv* $\mathbf{f}(yx^{-1})$) *este* $|\mathbf{m}| \otimes dy$*-măsurabilă — în particular, dacă* $\mathbf{f}$ *este boreliană — atunci funcția* $\mathbf{m} * \mathbf{f}$ (*respectiv* $\mathbf{f} * \mathbf{m}$) *este definită aproape peste tot, avem* $\mathbf{m} * \mathbf{f} \in \mathcal{L}^p_Z$ (*respectiv* $\mathbf{f} * \mathbf{m} \in \mathcal{L}^p_Z$) *și*

$$N_p(\mathbf{m} * \mathbf{f}) \leqslant \|\mathbf{m}\|\,N_p(\mathbf{f}), \mathbf{m} * \quad (\mathbf{f}dy) = (\mathbf{m} * \mathbf{f})\,dy$$

(*respectiv* $N_p(\mathbf{f} * \mathbf{m}) \leqslant \|\mathbf{m}\|N_p(\mathbf{f})$, $(\mathbf{f}dy) * \mathbf{m} = (\mathbf{f} * \mathbf{m})\,dy$).

Dacă $\mathbf{g}$ *este egală aproape peste tot cu* $\mathbf{f}$ *și îndeplinește condițiile de mai sus, atunci* $\mathbf{m} * \mathbf{f} = \mathbf{m} * \mathbf{g}$ (*respectiv* $\mathbf{f} * \mathbf{m} = \mathbf{g} * \mathbf{m}$) *aproape peste tot.*

Să notăm $\mu = |\mathbf{m}|$ și să arătăm că $\mu * |\mathbf{f}|\,dy$ are sens. Fie $\varphi \geqslant 0$ o funcție din $\mathcal{K}(G)$. Să notăm $K_1 = \mathrm{pr}_1 C$, $K_2 = \mathrm{pr}_2 C$ și $K = K_1 K_2$. Mulțimea $K \subset G$ este compactă și pentru $(x, y) \in C$ avem $x \in K_1$, $y \in K_2$ deci $xy \in K_1 K_2$ și deci $\varphi_C(x, y) \leqslant \varphi_K(xy)$.

Funcția $\varphi(xy)\,\varphi_{K\times K}(x, y)$ are suport compact, conținut în $K \times K$ și restricția sa la $K \times K$ este continuă, deci este integrabilă pentru măsura $\mu \otimes |\mathbf{f}|\,dy$.

Să notăm

$$I_K = \iint_{K\times K} \varphi(xy)\,d\mu(x)\,|\mathbf{f}(y)|\,dy.$$

Teorema lui Fubini este aplicabilă și avem

$$I_K = \int_K d\mu(x) \int_K \varphi(xy)\,|\mathbf{f}(y)|\,dy.$$

Deoarece $\mathbf{f} \in \mathcal{L}^p_Y$, pentru fiecare $x \in G$, funcția $y \to \varphi(xy)\,|\mathbf{f}(y)|$ este integrabilă în raport cu măsura Haar dy și

$$\int \varphi(xy)\,|\mathbf{f}(y)|\,dy \leqslant N_q(\varphi)\,N_p(\mathbf{f}).$$

Urmează că

$$I_K \leqslant \int_K^* d\mu(x) \int \varphi(xy)\,|\mathbf{f}(y)|\,dy \leqslant N_q(\varphi)\,N_p(\mathbf{f})\,\|\mu\|,$$

de unde

$$\iint^* \varphi(xy)\,d\mu(x)\,|\mathbf{f}(y)|\,dy = \sup_C \iint_C \varphi(xy)\,d\mu(x)\,|\mathbf{f}(y)|\,dy \leqslant$$

$$\leqslant \sup_K I_K \leqslant N_q(\varphi)\,N_p(\mathbf{f})\,\|\mu\| < +\infty.$$

Funcția $\varphi(xy)$ este continuă și din inegalitatea precedentă deducem că este $\mu \otimes |\mathbf{f}|\,dy$ -integrabilă. Urmează că $\mu * |\mathbf{f}|\,dy$ are sens, deci $\mathbf{m} * \mathbf{f}dy$ are sens.

Pentru a demonstra că $\mathbf{f}dy * \mathbf{m}$ are sens, se înlocuiește în raționamentul de mai sus $\varphi(xy)$ cu $\varphi(yx)$.

Să presupunem acum că funcția $\mathbf{f}(x^{-1}y)$ este $|\mathbf{m}| \otimes dy$ -măsurabilă. Din propoziția 13 deducem că $\mathbf{m} * \mathbf{f}$ este definită aproape peste tot, este local integrabilă — deci măsurabilă — și că $\mathbf{m} * (\mathbf{f}dy) = (\mathbf{m} * \mathbf{f})\,dy$. Pe de altă parte, pentru $\varphi \in \mathcal{K}(G)$, avem

$$\int |\varphi|\,|\mathbf{m} * \mathbf{f}|\,dy = \int |\varphi(y)|\,dy \left| \int \mathbf{f}(x^{-1}y)\,d\mathbf{m}(x) \right| \leqslant$$

$$\leqslant \iint |\varphi(xy)|\,d\mu(x)\,|\mathbf{f}(y)|\,dy \leqslant N_q(\varphi)\,N_p(\mathbf{f})\,\|\mu\|$$

de unde

$$N_p(\mathbf{m} * \mathbf{f}) \leqslant N_p(\mathbf{f}) \|\mu\| < +\infty.$$

Urmează că $\mathbf{m} * \mathbf{f} \in \mathcal{L}_Z^p$.

Dacă funcția $\mathbf{f}(yx^{-1})$ este $|\mathbf{m}| \otimes dy$ -măsurabilă, deducem că $\mathbf{f} * \mathbf{m}$ este definită aproape peste tot, este măsurabilă și pentru $\varphi \in \mathcal{K}(G)$ avem

$$\int |\varphi| \, |\mathbf{f} * \mathbf{m}| \, dy = \int |\varphi(y)| \, dy \left| \int \mathbf{f}(yx^{-1}) \Delta(x^{-1}) \, d\mathbf{m}(x) \right| \leqslant$$

$$\leqslant \int |\varphi(y)| \, dy \int |\mathbf{f}(yx^{-1})| \, \Delta(x^{-1} \, d\mu(x) = \int d\mu(x) \int |\varphi(y)| \, |\mathbf{f}(yx^{-1})| \, \Delta(x^{-1}) \, dy =$$

$$= \int d\mu(x) \int |\varphi(yx)| \, |\mathbf{f}(y)| \, dy \leqslant N_q(\varphi) \, N_p(\mathbf{f}) \, \|\mu\|,$$

de unde

$$N_p(\mathbf{f} * \mathbf{m}) \leqslant N_p(\mathbf{f}) \, \|\mu\| < +\infty$$

și deci $\mathbf{f} * \mathbf{m} \in \mathcal{L}_Z^p$. Cu aceasta propoziția este demonstrată.

Propoziția 15. *Pentru orice* $s \in G$ avem

$$\varepsilon_s * \mathbf{f} = \mathbf{f}_{s^{-1}} \quad \textit{și} \quad \mathbf{f} * \varepsilon_s = \mathbf{f}^s \Delta(s^{-1}).$$

Dacă $\mathbf{f}$ *este local integrabilă, atunci funcțiile* $\varepsilon_s * \mathbf{f}$ *și* $\mathbf{f} * \varepsilon_s$ *sînt local integrabile și avem*

$$\varepsilon_s * (\mathbf{f} dy) = (\varepsilon_s * \mathbf{f}) \, dy, \quad (\mathbf{f} dy) * \varepsilon_s = (\mathbf{f} * \varepsilon_s) \, dy.$$

Pentru orice $y \in G$ funcțiile $x \to \mathbf{f}(x^{-1}y)$ și $x \to \mathbf{f}(yx^{-1}) \Delta(x^{-1})$ sînt ε_s-integrabile și

$$(\varepsilon_s * \mathbf{f})(y) = \int \mathbf{f}(x^{-1}y) \, d\varepsilon_s(x) = \mathbf{f}(s^{-1}y) = \mathbf{f}_{s^{-1}}(y),$$

$$(\mathbf{f} * \varepsilon_s)(y) = \int \mathbf{f}(yx^{-1}) \Delta(x^{-1}) \, d\varepsilon_s(x) = \mathbf{f}(yx^{-1}) \Delta(s^{-1}) = \mathbf{f}^s(y) \Delta(s^{-1}),$$

deci $\varepsilon_s * \mathbf{f} = \mathbf{f}_{s^{-1}}$ și $\mathbf{f} * \varepsilon_s = \mathbf{f}^s \Delta(s^{-1})$.

Să presupunem acum că $\mathbf{f}$ este local integrabilă. Deoarece măsura ε_s are suport compact, au sens convoluțiile $\varepsilon_s * \mathbf{f} dy$ și $\mathbf{f} dy * \varepsilon_s$. Deoarece funcția $\mathbf{f}(x)$ este măsurabilă, funcția $(x, y) \to \mathbf{f}(x^{-1}y)$ este $\varepsilon_s * dy$ -măsurabilă, iar funcția $(x, y) \to \mathbf{f}(yx^{-1})$ este $dy * \varepsilon_s$ -măsurabilă. Conform propoziției 13, funcțiile $\varepsilon_s * \mathbf{f}$ și $\mathbf{f} * \varepsilon_s$ sînt local integrabile și

$$\varepsilon_s * (\mathbf{f} dy) = (\varepsilon_s * \mathbf{f}) \, dy, \quad (\mathbf{f} dy) * \varepsilon_s = (\mathbf{f} * \varepsilon_s) \, dy.$$

Propoziția 16. *Pentru orice* $s \in G$ *avem*

$$(\mathbf{f} * \mathbf{m})_s = \mathbf{f}_s * \mathbf{m} \quad \textit{și} \quad (\mathbf{m} * \mathbf{f})^s = \mathbf{m} * \mathbf{f}^s.$$

Fie $y \in G$ astfel încît $(\mathbf{f}_s * \mathbf{m})(y)$ are sens; aceasta înseamnă că funcția $x \to \mathbf{f}_s(yx^{-1}) \Delta(x^{-1})$ este $\mathbf{m}$ -integrabilă, adică funcția $x \to \mathbf{f}(syx^{-1}) \Delta(x^{-1})$

este m-integrabilă, adică $(\mathbf{f} * \mathbf{m})(sy)$ are sens, adică $(\mathbf{f} * \mathbf{m})_s(y)$ are sens. Aşadar, funcţiile $\mathbf{f}_s * \mathbf{m}$ şi $(\mathbf{f} * \mathbf{m})_s$ sînt definite pe aceeaşi mulţime. Dacă $(\mathbf{f} * \mathbf{m})_s(y)$ are sens, atunci

$$(\mathbf{f} * \mathbf{m})_s(y) = (\mathbf{f} * \mathbf{m})(sy) = \int \mathbf{f}(syx^{-1})\,\Delta(x^{-1})\,\mathbf{dm}(x) =$$

$$= \int \mathbf{f}_s(yx^{-1})\,\Delta(x^{-1})\,\mathbf{dm}(x) = (\mathbf{f}_s * \mathbf{m})(y)$$

deci

$$(\mathbf{f} * \mathbf{m})_s = \mathbf{f}_s * \mathbf{m}.$$

La fel se demonstrează şi cealaltă egalitate.

Propoziţia 17. *Dacă A este suportul măsurii $\mathbf{m}$ şi B este suportul funcţiei $\mathbf{f}$, atunci suportul funcţiei $\mathbf{m} * \mathbf{f}$ este conţinut în $\overline{AB}$ iar suportul funcţiei $\mathbf{f} * \mathbf{m}$ este conţinut în $\overline{BA}$.*

Într-adevăr, fie y un punct pentru care există integrala

$$(\mathbf{m} * \mathbf{f})(y) = \int \mathbf{f}(x^{-1}y)\,\mathbf{dm}(x).$$

Dacă $y \notin AB$, atunci pentru orice $x \in A$ avem $x^{-1}y \notin B$ deci $\mathbf{f}(x^{-1}y) = 0$ şi deci $\int \mathbf{f}(x^{-1}y)\,\mathbf{dm}(x) = 0$, adică $(\mathbf{m} * \mathbf{f})(y) = 0$. Urmează că suportul funcţiei $\mathbf{m} * \mathbf{f}$ este conţinut în $\overline{AB}$.

De asemenea, fie y un punct în care există integrala

$$(\mathbf{f} * \mathbf{m})(y) = \int \mathbf{f}(yx^{-1})\,\Delta(x^{-1})\,\mathbf{dm}(x).$$

Dacă $y \notin BA$, atunci pentru orice $x \in A$ avem $yx^{-1} \notin B$ deci $\mathbf{f}(yx^{-1}) = 0$ şi deci $\int \mathbf{f}(yx^{-1})\,\Delta(x^{-1})\,\mathbf{dm}(x) = 0$ adică $(\mathbf{f} * \mathbf{m})(y) = 0$. Urmează că suportul funcţiei $\mathbf{f} * \mathbf{m}$ este conţinut în $\overline{BA}$.

Corolar. *Dacă $\mathbf{m}$ şi $\mathbf{f}$ au suporturi compacte, atunci funcţiile $\mathbf{m} * \mathbf{f}$ şi $\mathbf{f} * \mathbf{m}$ au suporturi compacte.*

4. Convoluţia unei măsuri mărginite cu funcţii mărginite

Fie $\mathbf{m} : \mathcal{K}(G) \to X$ o măsură *mărginită* şi $\mathbf{f} : G \to Y$ o funcţie *boreliană mărginită*.

După cum am remarcat, funcţia

$$(\mathbf{m} * \mathbf{f})(y) = \int \mathbf{f}(x^{-1}y)\,\mathbf{dm}(x)$$

este definită peste tot pe G, iar dacă G este unimodular, funcția

$$(\mathbf{f}*\mathbf{m})(y) = \int \mathbf{f}(yx^{-1})\,\Delta(x^{-1})\,\mathbf{dm}(x)$$

este de asemenea definită peste tot pe G.

Dacă $\mathbf{m}$ este cu *suport compact*, sau dacă $\mathbf{f}$ este cu *suport compact*, atunci funcția

$$(\mathbf{f}*\mathbf{m})(y) = \int \mathbf{f}(yx^{-1})\,\Delta(x^{-1})\,\mathbf{dm}(x)$$

este definită peste tot pe G (chiar dacă G nu este unimodular).

Vom impune acum condiții suplimentare funcției $\mathbf{f}$ și vom arăta că funcțiile $\mathbf{m}*\mathbf{f}$ și $\mathbf{f}*\mathbf{m}$ au proprietăți suplimentare.

Lema 1. *Dacă* $\mathbf{m}$ *este mărginită iar* $\mathbf{f}$ *este boreliană și mărginită, atunci pentru orice* $\varepsilon > 0$ *există o mulțime compactă* $K \subset G$ *astfel încît pentru orice* $y \in G$ *să avem*

$$\left| \int \mathbf{f}(x^{-1}y)\,\mathbf{dm}(x) - \int_K \mathbf{f}(x^{-1}y)\,\mathbf{dm}(x) \right| < \varepsilon$$

și

$$\left| \int \mathbf{f}(yx^{-1})\,\mathbf{dm}(x) - \int_K \mathbf{f}(yx^{-1})\,\mathbf{dm}(x) \right| < \varepsilon.$$

Într-adevăr, notînd $\mu = |\mathbf{m}|$, deoarece μ este mărginită, avem

$$\mu(G) = \sup_K \mu(K) < +\infty, \qquad K \text{ compact.}$$

Există deci o mulțime compactă $K \subset G$ astfel încît

$$\mu(G-K) < \frac{\varepsilon}{\|\mathbf{f}\|}.$$

Pentru orice $y \in G$ avem

$$\left| \int \mathbf{f}(x^{-1}y)\,\mathbf{dm}(x) - \int_K \mathbf{f}(x^{-1}y)\,\mathbf{dm}(x) \right| = \left| \int \mathbf{f}(x^{-1})\,\varphi_{G-K}(x)\,\mathbf{dm}(x) \right| \leqslant$$

$$\leqslant \int |\mathbf{f}(x^{-1}y)|\,\varphi_{G-K}(x)\,d\mu(x) \leqslant \|\mathbf{f}\|\,\mu(G-K) < \varepsilon$$

și de asemenea

$$\left| \int \mathbf{f}(yx^{-1})\,\mathbf{dm}(x) - \int_K \mathbf{f}(yx^{-1})\,\mathbf{dm}(x) \right| \leqslant \|\mathbf{f}\|\,\mu(G-K) < \varepsilon.$$

Corolar. *Dacă* $\mathbf{m}$ *este cu suport compact și dacă* $\mathbf{f}$ *este boreliană mărginită, atunci pentru orice* $\varepsilon > 0$ *există o mulțime compactă* $K \subset G$ *astfel încît pentru orice* $y \in G$ *să avem*

$$\left| \int \mathbf{f}(yx^{-1})\,\Delta(x^{-1})\,\mathbf{dm}(x) - \int_K \mathbf{f}(yx^{-1})\,\Delta(x^{-1})\,\mathbf{dm}(x) \right| < \varepsilon.$$

Într-adevăr, măsura $\mathbf{dn}(x) = \Delta(x^{-1})\,\mathbf{dm}(x)$ este mărginită, deci, conform lemei 1, pentru orice $\varepsilon > 0$ există o mulțime compactă $K \subset G$ astfel încît pentru orice $y \in G$ să avem

$$\left| \int \mathbf{f}(yx^{-1})\,\mathbf{dn}(x) - \int_K \mathbf{f}(yx^{-1})\,\mathbf{dn}(x) \right| < \varepsilon,$$

adică

$$\left| \int \mathbf{f}(yx^{-1})\,\Delta(x^{-1})\,\mathbf{dm}(x) - \int_K \mathbf{f}(yx^{-1})\,\Delta(x^{-1})\,\mathbf{dm}(x) \right| < \varepsilon.$$

Propoziția 18. *Dacă* $\mathbf{m}$ *este mărginită și dacă* $\mathbf{f}$ *este continuă și mărginită, atunci funcția* $\mathbf{m} * \mathbf{f}$ *este continuă și mărginită.*

Dacă, în plus, G *este unimodular, sau dacă* $\mathbf{m}$ *este cu suport compact, atunci* $\mathbf{f} * \mathbf{m}$ *este continuă și mărginită.*

Fie $x_0 \in G$ și $\varepsilon > 0$. Vom arăta că există o vecinătate V a lui x_0 astfel încît, notînd $\mathbf{g} = \mathbf{m} * \mathbf{f}$, să avem $|\mathbf{g}(x) - \mathbf{g}(x_0)| < \varepsilon$, pentru $x \in V$.

Conform lemei 1 există o mulțime compactă $K \subset G$ astfel încît pentru orice $y \in G$ să avem

$$\left| \mathbf{g}(y) - \int_K \mathbf{f}(x^{-1}y)\,\mathbf{dm}(x) \right| < \frac{\varepsilon}{4}.$$

Fie W o vecinătate compactă a lui e. Mulțimea $H = K^{-1}Wx_0$ este compactă, deci $\mathbf{f}$ este uniform continuă la dreapta pe H. Există deci o vecinătate U a lui e (pe care o putem alege conținută în W), astfel încît pentru $x \in K$ și $s \in U$ să avem

$$|\mathbf{f}(x^{-1}x_0) - \mathbf{f}(x^{-1}x_0 s)| \leqslant \frac{\varepsilon}{\mu(K)},$$

deoarece $x^{-1}x_0 = x^{-1}e\,x_0 \in K^{-1}Wx_0 = H$. Atunci, pentru orice $s \in U$, avem

$$\left| \int_K [\mathbf{f}(x^{-1}x_0) - \mathbf{f}(x^{-1}x_0 s)]\,\mathbf{dm}(x) \right| \leqslant \int_K |\mathbf{f}(x^{-1}x_0) - \mathbf{f}(x^{-1}x_0 s)|\,d\mu(x) \leqslant \varepsilon$$

deci

$$|\mathbf{g}(x_0) - \mathbf{g}(x_0 s)| \leqslant \left| \mathbf{g}(x_0) - \mathbf{g}(x_0 s) - \int_K [\mathbf{f}(x^{-1}x_0) - \mathbf{f}(x^{-1}x_0 s)]\,\mathbf{dm}(x) \right| +$$

$$+ \left| \int_K [\mathbf{f}(x^{-1}x_0) - \mathbf{f}(x^{-1}x_0 s)]\,\mathbf{dm}(x) \right| \leqslant 2\,\frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Notînd $V = x_0 U$, orice $y \in V$ este de forma $y = x_0 s$ cu $s \in V$, deci pentru orice $y \in V$ avem $|\mathbf{g}(x_0) - \mathbf{g}(y)| < \varepsilon$, adică $\mathbf{g} = \mathbf{m} * \mathbf{f}$ este continuă în x_0. Cum x_0 este arbitrar, rezultă că $\mathbf{m} * \mathbf{f}$ este continuă pe G. Deoarece $\mathbf{m} * \mathbf{f} \in \mathcal{L}_Z^\infty$ și este continuă rezultă că $\mathbf{m} * \mathbf{f}$ este mărginită.

Dacă G este unimodular, se demonstrează în același fel că $\mathbf{f} * \mathbf{m}$ este continuă, luînd $\mathbf{g} = \mathbf{f} * \mathbf{m}$ și $H = x_0 W K^{-1}$ și folosind cealaltă inegalitate a lemei 2. Dacă $\mathbf{m}$ este cu suport compact, se procedează în același mod, folosind corolarul lemei 2.

Propoziția 19. *Dacă* $\mathbf{m}$ *este mărginită iar* $\mathbf{f}$ *este uniform continuă la dreapta și mărginită, atunci* $\mathbf{m}*\mathbf{f}$ *este uniform continuă la dreapta și mărginită.*

Dacă $\mathbf{m}$ *este mărginită iar* $\mathbf{f}$ *este uniform continuă la stînga și mărginită și dacă* G *este unimodular sau dacă* $\mathbf{m}$ *este cu suport compact, atunci* $\mathbf{f}*\mathbf{m}$ *este uniform continuă la stînga și mărginită.*

Într-adevăr, în condițiile propoziției, funcția $\mathbf{g} = \mathbf{f}*\mathbf{m}$ sau funcția $\mathbf{h} = \mathbf{f}*\mathbf{m}$ este continuă și mărginită, conform propoziției 18.

Să presupunem că $\mathbf{f}$ este uniform continuă la dreapta și fie $\varepsilon > 0$. Există o vecinătate V a lui e astfel încît să avem

$$|\mathbf{f}(x^{-1}ys) - \mathbf{f}(x^{-1}y)| < \frac{\varepsilon}{\|\mu\|}, \quad \text{pentru } s \in V \text{ și } x, y \in G.$$

Urmează că pentru $s \in V$ și $y \in G$ avem

$$|\mathbf{g}(ys) - \mathbf{g}(y)| = \left| \int \mathbf{f}(x^{-1}ys)\, \mathbf{dm}(x) - \int \mathbf{f}(x^{-1}y)\, \mathbf{dm}(x) \right| \leqslant$$

$$\leqslant \int |\mathbf{f}(x^{-1}ys) - \mathbf{f}(x^{-1}y)|\, d\mu(x) < \varepsilon$$

deci $\mathbf{g} = \mathbf{m}*\mathbf{f}$ este uniform continuă la dreapta. La fel se demonstrează și a doua parte a propoziției, luînd V astfel încît să avem

$$|\mathbf{f}(syx^{-1}) - \mathbf{f}(yx^{-1})| < \frac{\varepsilon}{\|\mu\|}, \quad \text{pentru } s \in V \text{ și } x, y \in G.$$

Lema 2. *Fie* $S \subset G$ *o mulțime închisă și* c *un număr astfel încît* $|\mathbf{f}(x)| \leqslant c$ *pentru* $x \in S$. *Dacă* $\mathbf{m}$ *este mărginită și* $\mathbf{f}$ *este o funcție boreliană mărginită, atunci pentru orice mulțime închisă* $K \subset G$ *avem*

$$\left| \int_K \mathbf{f}(x^{-1}y)\, \mathbf{dm}(x) \right| \leqslant c\, \|\,|\mathbf{m}|\,\|, \quad \textit{pentru } y \notin KS$$

și

$$\left| \int_K \mathbf{f}(yx^{-1})\, \mathbf{dm}(x) \right| \leqslant c\, \|\,|\mathbf{m}|\,\|, \quad \textit{pentru } y \notin SK.$$

Să observăm întîi că integralele există pentru orice $y \in G$. Fie $K \subset G$ o mulțime închisă și fie $y \in G$ astfel încît pentru orice $x \in K$ să avem $x^{-1}y \notin S$, adică astfel încît $K^{-1}y \subset \complement S$. Atunci, notînd $\mu = |\mathbf{m}|$, avem

$$\left| \int_K \mathbf{f}(x^{-1}y)\ \mathbf{dm}(x) \right| \leqslant \int_K |\mathbf{f}(x^{-1}y)|\, d\mu(x) \leqslant c\, \|\mu\|.$$

În particular, această inegalitate are loc pentru $y \notin KS$, deoarece în acest caz, pentru orice $x \in K$, avem $x^{-1}y \notin S$. La fel se demonstrează și a doua inegalitate.

Propoziția 20. *Dacă* $\mathbf{m}$ *este mărginită și dacă* $\mathbf{f} \in \overline{\mathcal{K}_Y(G)}$, *atunci* $\mathbf{m}*\mathbf{f} \in \overline{\mathcal{K}_Z(G)}$. *Dacă, în plus,* G *este unimodular sau dacă* $\mathbf{m}$ *este cu suport compact, atunci* $\mathbf{f}*\mathbf{m} \in \overline{\mathcal{K}_Z(G)}$.

Fie $\varepsilon > 0$. Să notăm $\mu = |\mathbf{m}|$. Conform lemei 1, există o mulțime compactă $K \subset G$ astfel încît pentru orice $y \in G$ să avem

$$\left| (\mathbf{m} * \mathbf{f})(y) - \int_K \mathbf{f}(x^{-1}y)\, \mathbf{dm}(x) \right| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Deoarece $\mathbf{f} \in \mathcal{K}_Y(G)$, există o mulțime compactă $S \subset G$ astfel încît pentru $x \notin S$ să avem $|\mathbf{f}(x)| \leqslant \frac{\varepsilon}{2\|\mu\|}$. Conform lemei 2 avem atunci

$$\left| \int_K \mathbf{f}(x^{-1}y)\, \mathbf{dm}(x) \right| < \frac{\varepsilon}{2} \text{ pentru } y \notin KS$$

și deci, pentru $y \notin KS$, avem

$$|(\mathbf{m} * \mathbf{f})(y)| \leqslant \left| (\mathbf{m} * \mathbf{f})(y) - \int_K \mathbf{f}(x^{-1}y)\, \mathbf{dm}(x) \right| + \left| \int_K \mathbf{f}(x^{-1}y)\, \mathbf{dm}(x) \right| \leqslant \varepsilon$$

adică $\mathbf{m} * \mathbf{f}$ se anulează la infinit. Deoarece $\mathbf{m} * \mathbf{f}$ este continuă, rezultă că $\mathbf{m} * \mathbf{f} \in \overline{\mathcal{K}_Z(G)}$.

Dacă G este unimodular, se demonstrează în fel că $\mathbf{m} * \mathbf{f} \in \overline{\mathcal{K}_Z(G)}$.

În cazul cînd $\mathbf{m}$ are suport compact, pentru a demonstra că $\mathbf{f} * \mathbf{m} \in \overline{\mathcal{K}_Z(G)}$, se folosesc corolarele lemei 1, iar lema 2 se aplică pentru măsura mărginită $\mathbf{n} = \check{\Delta}\mathbf{m}$.

Propoziția 21. *Dacă* $\mathbf{m}$ *are suport compact și dacă* $\mathbf{f} \in \mathcal{K}_Y(G)$, *atunci* $\mathbf{m} * \mathbf{f} \in \mathcal{K}_Z(G)$ *și* $\mathbf{f} * \mathbf{m} \in \mathcal{K}_Z(G)$.

Într-adevăr, $\mathbf{m} * \mathbf{f}$ este continuă. Dacă A este suportul lui $\mathbf{m}$ iar B este suportul lui $\mathbf{f}$, atunci suportul funcției $\mathbf{m} * \mathbf{f}$ este conținut în mulțimea compactă AB, iar suportul funcției $\mathbf{f} * \mathbf{m}$ este conținut în mulțimea compactă BA.

Propoziția 22. *Dacă* $\mathbf{m}$ *este mărginită și dacă* $\mathbf{f}$ *este o funcție boreliană mărginită, atunci*

$$\mathbf{m}(\mathbf{f}) = (\mathbf{m} * \check{\mathbf{f}})(e) = (\check{\mathbf{f}}\,\check{\Delta} * \mathbf{m})(e).$$

Într-adevăr, funcția $\check{\mathbf{f}}(x) = \mathbf{f}(x^{-1})$ este de asemenea boreliană și mărginită și deci funcția $x \to \check{\mathbf{f}}(x)$ este $\mathbf{m}$-integrabilă și

$$(\mathbf{m} * \check{\mathbf{f}})(e) = \int \check{\mathbf{f}}(x^{-1}e)\, \mathbf{dm}(x) = \int \mathbf{f}(x)\, \mathbf{dm}(x) = \mathbf{m}(\mathbf{f}),$$

$$(\check{\mathbf{f}}\,\check{\Delta} * \mathbf{m})(e) = \int \check{\mathbf{f}}(ex^{-1})\,\check{\Delta}(ex^{-1})\,\Delta(x^{-1})\, \mathbf{dm}(x) = \int \mathbf{f}(x)\, \mathbf{dm}(x) = \mathbf{m}(\mathbf{f}).$$

Corolar. *Dacă* $\mathbf{m}$ *este mărginită și dacă* $\mathbf{m} * \mathbf{f} = 0$ (*respectiv dacă* $\mathbf{f} * \mathbf{m} = 0$) *pentru orice funcție* $\mathbf{f} \in \mathcal{K}_Y(G)$, *atunci* $\mathbf{m} = 0$.

Într-adevăr, pentru orice $\mathbf{f} \in \mathcal{K}_Y$ avem $\check{\mathbf{f}} \in \mathcal{K}_Y$ și $\check{\mathbf{f}}\,\check{\Delta} \in \mathcal{K}_Y$, deci

$$\mathbf{m}(\mathbf{f}) = (\mathbf{m} * \check{\mathbf{f}})(e) = 0,$$

respectiv

$$\mathbf{m}(\mathbf{f}) = (\check{\mathbf{f}}\,\check{\Delta} * \mathbf{m})(e) = 0.$$

5. Convoluția a două funcții

Fie funcțiile $\mathbf{f} : G - M \to X$ și $\mathbf{g} : G - N \to Y$, unde M și N sînt mulțimi neglijabile.

Dacă $\mathbf{f}$ este local integrabilă și notăm $\mathbf{m} = \mathbf{f}\mathrm{d}x$, putem defini convoluția $\mathbf{m} * \mathbf{g}$:

$$(\mathbf{m} * \mathbf{g})(y) = \int \mathbf{g}(x^{-1}y)\,\mathrm{d}\mathbf{m}(x) = \int \mathbf{f}(x)\,\mathbf{g}(x^{-1}y)\,\mathrm{d}x$$

pentru acele valori ale lui y pentru care integrala există. Din invarianța la stînga a măsurii Haar, deducem că avem de asemenea

$$(\mathbf{m} * \mathbf{g})(y) = \int \mathbf{f}(yx)\,\mathbf{g}(x^{-1})\,\mathrm{d}x.$$

Dacă $\mathbf{g}$ este local integrabilă și notăm $\mathbf{n} = \mathbf{g}\mathrm{d}x$, putem defini convoluția $\mathbf{f} * \mathbf{n}$:

$$(\mathbf{f} * \mathbf{n})(y) = \int \mathbf{f}(yx^{-1})\,\Delta(x^{-1})\,\mathrm{d}\mathbf{n}(x) = \int \mathbf{f}(yx^{-1})\,\mathbf{g}(x)\,\Delta(x^{-1})\,\mathrm{d}x.$$

Conform propoziției 18, § 23, avem

$$(\mathbf{f} * \mathbf{n})(y) = \int \mathbf{f}(yx)\,\mathbf{g}(x^{-1})\,\mathrm{d}x,$$

deci, dacă $\mathbf{f}$ și $\mathbf{g}$ sînt local integrabile, avem $\mathbf{m} * \mathbf{g} = \mathbf{f} * \mathbf{n}$. Sîntem conduși astfel la definiția următoare:

Definiția 3. *Dacă mulțimea A a punctelor $y \in G$ pentru care funcția $x \to \mathbf{f}(x)\,\mathbf{g}(x^{-1}y)$ este integrabilă, nu este vidă, vom numi convoluția funcției $\mathbf{f}$ cu funcția $\mathbf{g}$ funcția $\mathbf{f} * \mathbf{g} : A \to Z$ definită prin egalitatea*

$$(\mathbf{f} * \mathbf{g})(y) = \int \mathbf{f}(x)\,\mathbf{g}(x^{-1}y)\,\mathrm{d}x = \int \mathbf{f}(yx)\,\mathbf{g}(x^{-1})\,\mathrm{d}x.$$

Conform propoziției 18, și propoziției 14, § 23, avem de asemenea

$$(\mathbf{f} * \mathbf{g})(y) = \int \mathbf{f}(x^{-1})\,\mathbf{g}(xy)\,\Delta(x^{-1})\,\mathrm{d}x = \int \mathbf{f}(yx^{-1})\,\mathbf{g}(x)\,\Delta(x^{-1})\,\mathrm{d}x.$$

Din această definiție deducem că dacă $\mathbf{f}$ este local integrabilă, avem $(\mathbf{f}\mathrm{d}x) * \mathbf{g} = \mathbf{f} * \mathbf{g}$; dacă $\mathbf{g}$ este local integrabilă, avem $\mathbf{f} * (\mathbf{g}\mathrm{d}x) = \mathbf{f} * \mathbf{g}$; iar dacă $\mathbf{f}$ și $\mathbf{g}$ sînt ambele local integrabile, avem $(\mathbf{f}\mathrm{d}x) * \mathbf{g} = \mathbf{f} * (\mathbf{g}\mathrm{d}x) = \mathbf{f} * \mathbf{g}$.

Vom studia în ce cazuri funcția $\mathbf{f} * \mathbf{g}$ este definită peste tot sau aproape peste tot, dacă $\mathbf{f} * \mathbf{g}$ este local integrabilă și dacă are loc egalitatea $(\mathbf{f}\mathrm{d}x) * (\mathbf{g}\mathrm{d}y) = (\mathbf{f} * \mathbf{g})\,\mathrm{d}y$.

Propoziția 23. *Dacă A este suportul lui $\mathbf{f}$ și B este suportul lui $\mathbf{g}$, atunci suportul lui $\mathbf{f} * \mathbf{g}$ este conținut în $\overline{AB}$.*

Fie y un punct în care există

$$(\mathbf{f}*\mathbf{g})(y) = \int \mathbf{f}(x)\,\mathbf{g}(x^{-1}y)\,\mathrm{d}x.$$

Dacă $y \notin AB$, atunci pentru orice $x \in A$ avem $x^{-1}y \notin B$ deci $\mathbf{f}(x^{-1}y)=0$ și deci $\int \mathbf{f}(x)\,\mathbf{g}(x^{-1}y)\,\mathrm{d}x = 0$.

Corolar. *Dacă* $\mathbf{f}$ *și* $\mathbf{g}$ *au suporturi compacte, atunci* $\mathbf{f}*\mathbf{g}$ *are suport compact.*

Se demonstrează ușor că pentru orice $s \in G$ avem :

$$(\mathbf{f}*\mathbf{g})_s = \mathbf{f}_s * \mathbf{g} \text{ și } (\mathbf{f}*\mathbf{g})^s = \mathbf{f}*\mathbf{g}^s.$$

Propoziția 24. *Dacă* $\mathbf{f} \in \mathcal{L}^1_X$, *dacă* $\mathbf{g} : G \to Y$ *este local integrabilă și dacă măsura* $\mathbf{f}\mathrm{d}x * \mathbf{g}\mathrm{d}y$ *(respectiv măsura* $\mathbf{g}\mathrm{d}y * \mathbf{f}\mathrm{d}x$*) are sens, atunci funcția* $\mathbf{f}*\mathbf{g}$ *(respectiv funcția* $\mathbf{g}*\mathbf{f}$*) este definită aproape peste tot, este local integrabilă și*

$$\mathbf{f}\mathrm{d}x * \mathbf{g}\mathrm{d}y = (\mathbf{f}*\mathbf{g})\mathrm{d}y \quad (\textit{respectiv } \mathbf{g}\mathrm{d}y * \mathbf{f}\mathrm{d}x = (\mathbf{g}*\mathbf{f})\mathrm{d}x).$$

Dacă $\mathbf{f}'$ *este egală aproape peste tot cu* $\mathbf{f}$ *iar* $\mathbf{g}'$ *este egală aproape peste tot cu* $\mathbf{g}$, *atunci* $\mathbf{f}'*\mathbf{g}' = \mathbf{f}*\mathbf{g}$ *aproape peste tot.*

Vom arăta că sînt îndeplinite condițiile propoziției 13. Măsura $\mathbf{m} = \mathbf{f}\mathrm{d}x$ este mărginită și $\mathbf{m}*(\mathbf{g}\mathrm{d}y)$ are sens. Funcția $|\mathbf{f}(x)|\,\mathbf{g}(x^{-1}y)$ este măsurabilă pentru măsura $\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \mathrm{d}x \otimes \mathrm{d}y$, deci funcția $\mathbf{g}(x^{-1}y)$ este măsurabilă pentru măsura $|\mathbf{f}(x)|\,\mathrm{d}x \otimes \mathrm{d}y = |\mathbf{m}| \otimes \mathrm{d}y$.

Conform propoziției 13, funcția $\mathbf{f}*\mathbf{g} = (\mathbf{f}\mathrm{d}x)*\mathbf{g} = \mathbf{m}*\mathbf{g}$ este definită aproape peste tot, este local integrabilă și $\mathbf{m}*(\mathbf{g}\mathrm{d}y) = (\mathbf{m}*\mathbf{g})\mathrm{d}y$, adică

$$(\mathbf{f}\mathrm{d}x)*(\mathbf{g}\mathrm{d}y) = (\mathbf{f}*\mathbf{g})\mathrm{d}y.$$

La fel de demonstrează afirmația relativă la funcția $\mathbf{g}*\mathbf{f}$.

Avem apoi $\mathbf{m} = \mathbf{f}'\mathrm{d}x$ deci $\mathbf{m}*\mathbf{g}' = \mathbf{m}*\mathbf{g}$ aproape peste tot (corolarul propoziției 13) de unde $\mathbf{f}'*\mathbf{g}' = \mathbf{f}*\mathbf{g}$ aproape peste tot.

Propoziția 25. *Dacă* $\mathbf{f} \in \mathcal{L}^1_X$ *și dacă* $\mathbf{g} \in \mathcal{L}^p_Y$, $(1 \leqslant p \leqslant +\infty)$, *atunci măsurile* $\mathbf{f}\mathrm{d}x * \mathbf{g}\mathrm{d}y$ *și* $\mathbf{g}\mathrm{d}y * \mathbf{f}\mathrm{d}x$ *au sens, funcțiile* $\mathbf{f}*\mathbf{g}$ *și* $\mathbf{g}*\mathbf{f}$ *sînt definite aproape peste tot, sînt local integrabile și avem*

$$N_p(\mathbf{f}*\mathbf{g}) \leqslant N_1(\mathbf{f})\,N_p(\mathbf{g}), \quad N_p(\mathbf{g}*\mathbf{f}) \leqslant N_p(\mathbf{g})\,N_1(\mathbf{f})$$

și

$$\mathbf{f}\mathrm{d}x * \mathbf{g}\mathrm{d}y = (\mathbf{f}*\mathbf{g})\mathrm{d}y, \quad \mathbf{g}\mathrm{d}y * \mathbf{f}\mathrm{d}x = (\mathbf{g}*\mathbf{f})\mathrm{d}x.$$

Dacă $\mathbf{f}'$ *este egală aproape peste tot cu* $\mathbf{f}$ *iar* $\mathbf{g}'$ *este egală aproape peste tot cu* $\mathbf{g}$, *atunci*

$$\mathbf{f}'*\mathbf{g}' = \mathbf{f}*\mathbf{g} \textit{ și } \mathbf{g}'*\mathbf{f}' = \mathbf{g}*\mathbf{f}, \textit{ aproape peste tot.}$$

Se folosește propoziția 16, luînd $\mathbf{m} = \mathbf{f}\mathrm{d}x$, și propoziția precedentă, observînd că $\|\,|\mathbf{m}|\,\| = N_1(\mathbf{f})$.

Corolarul 1. *Dacă* $\mathbf{f} \in \mathcal{L}^1_X$ *și* $\mathbf{f} \in \mathcal{L}^1_Y$, *atunci funcția* $\mathbf{f}*\mathbf{g}$ *este definită aproape peste tot, este integrabilă și avem*

$$N_1(\mathbf{f}*\mathbf{g}) \leqslant N_1(\mathbf{f})N_1(\mathbf{g}) \quad \textit{și} \quad \mathbf{f}\mathrm{d}x * \mathbf{g}\mathrm{d}y = (\mathbf{f}*\mathbf{g})\mathrm{d}y.$$

Pentru funcțiile $\mathbf{g} \in \mathcal{L}_Y^\infty$ avem proprietăți suplimentare.

Propoziția 26. *Dacă* $\mathbf{f} \in \mathcal{L}_X^1$ *și* $\mathbf{g} \in \mathcal{L}_Y^\infty$, *atunci funcția* $\mathbf{f} * \mathbf{g}$ *este definită peste tot, este continuă, mărginită și*

$$\|\mathbf{f} * \mathbf{g}\| \leqslant N_1(\mathbf{f})\, N_\infty(\mathbf{g}).$$

Dacă G *este unimodular sau dacă* $\mathbf{f}$ *este cu suport compact, atunci* $\mathbf{g} * \mathbf{f}$ *este definită peste tot, este continuă și mărginită și*

$$\|\mathbf{g} * \mathbf{f}\| \leqslant N_1(\mathbf{f})\, N_\infty(\mathbf{g}).$$

Într-adevăr, pentru orice $y \in G$ funcția $x \to \mathbf{f}(yx)$ aparține spațiului $\mathcal{L}_X^1$ și funcția $x \to \mathbf{g}(x^{-1})$ aparține spațiului $\mathcal{L}_Y^\infty$. Atunci funcția $x \to \mathbf{f}(yx)\,\mathbf{g}(x^{-1})$ este integrabilă deci există

$$(\mathbf{f} * \mathbf{g})(y) = \int \mathbf{f}(yx)\,\mathbf{g}(x^{-1})\,dx = \int \mathbf{f}(x)\,\mathbf{g}(x^{-1}y)\,dx$$

pentru orice $y \in G$. Avem

$$|(\mathbf{f} * \mathbf{g})(y)| \leqslant \int |\mathbf{f}(yx)|\,|\mathbf{g}(x^{-1})|\,dx \leqslant N_1(\mathbf{f}) N_\infty(\mathbf{g}),$$

deci $\mathbf{f} * \mathbf{g}$ este mărginită și

$$\|\mathbf{f} * \mathbf{g}\| \leqslant N_1(\mathbf{f})\, N_\infty(\mathbf{g}).$$

Să arătăm că $\mathbf{f} * \mathbf{g}$ este continuă. Fie $x_0 \in G$ și $\varepsilon > 0$. Dacă $\mathbf{g} = 0$, atunci $\mathbf{f} * \mathbf{g} = 0$. Să presupunem că $N_\infty(\mathbf{g}) \neq 0$. Notînd $\mathbf{h} = \mathbf{f} * \mathbf{g}$, pentru orice $s \in G$ avem

$$|\mathbf{h}(x_0) - \mathbf{h}(x_0 s)| = \left| \int [\mathbf{f}(x_0 x) - \mathbf{f}(s x_0 x)]\,\mathbf{g}(x^{-1})\,dx \right| \leqslant$$

$$\leqslant N_\infty(\mathbf{g}) \int |\mathbf{f}(x_0 x) - \mathbf{f}(s x_0 x)|\,dx.$$

Fie $\mathbf{f}'$ o funcție din $\mathcal{K}_X(G)$ cu $N_1(\mathbf{f} - \mathbf{f}') < \dfrac{\varepsilon}{3N_\infty(\mathbf{g})}$. Avem $\int |\mathbf{f}(zx) - \mathbf{f}'(zx)|\,dx = \int |\mathbf{f}(x) - \mathbf{f}'(x)|\,dx = N_1(\mathbf{f} - \mathbf{f}') < \dfrac{\varepsilon}{3N_\infty(\mathbf{g})}$ pentru orice $z \in G$.

Fie K suportul compact al lui $\mathbf{f}$ și V o vecinătate compactă a lui e. Avem $K \subset KV$, deci dacă $z \notin KV$, atunci $\mathbf{f}'(z) = 0$. Funcția $x \to \mathbf{f}'(x_0 x)$ este uniform continuă la stînga. Există deci o vecinătate $W \subset V$ a lui e astfel încît să avem $|\mathbf{f}(z) - \mathbf{f}(sz)| < \dfrac{\varepsilon}{3N_\infty(\mathbf{g})\,\mu(x_0^{-1}K)}$ pentru $s \in W$ și $z \in G$. Dacă $s \in W$ și $x \notin x_0^{-1}K$, atunci $x_0 x \notin K$ și $s x_0 x \notin WK$ deci $\mathbf{f}'(x_0 x) = \mathbf{f}'(s x_0 x) = 0$; iar dacă $s \in W$ și $x \in x_0^{-1}K$, atunci $x_0 x \in K$ deci $|\mathbf{f}(x_0 x) - \mathbf{f}(s x_0 x)| < \dfrac{\varepsilon}{3N_\infty(\mathbf{g})\,\mu(x_0^{-1}K)}$.

Urmează că pentru $s \in W$ avem

$$N_\infty(\mathbf{g}) \int |\mathbf{f}(x_0 x) - \mathbf{f}(s x_0 x)|\, \mathrm{d}x < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Atunci, pentru $s \in W$,

$$|\mathbf{h}(x_0) - \mathbf{h}(s x_0)| \leqslant N_\infty(\mathbf{g}) \int |\mathbf{f}(x_0 x) - \mathbf{f}(x_0 x)|\, \mathrm{d}x +$$

$$+ N_\infty(\mathbf{g}) \int |\mathbf{f}'(x_0 x) - \mathbf{f}'(s x_0 x)|\, \mathrm{d}x + N_\infty(\mathbf{g}) \int |\mathbf{f}'(s x_0 x) - \mathbf{f}(s x_0 x)|\, \mathrm{d}x < \varepsilon,$$

deci $\mathbf{h} = \mathbf{f} * \mathbf{g}$ este continuă în x_0. Cum x_0 a fost ales arbitrar, $\mathbf{f} * \mathbf{g}$ este continuă pe G.

Dacă G este unimodular, se arată ca mai sus că integrala

$$(\mathbf{g} * \mathbf{f})(y) = \int \mathbf{f}(xy)\, \mathbf{g}(x^{-1})\, \mathrm{d}x$$

există pentru orice $y \in G$ şi că pentru orice $x_0 \in G$ şi orice $\varepsilon > 0$ există o vecinătate W a lui e astfel încît, notînd $\mathbf{h} = \mathbf{g} * \mathbf{f}$, pentru orice $s \in W$ să avem $|\mathbf{h}(x_0) - \mathbf{h}(x_0 s)| < \varepsilon$, adică $\mathbf{g} * \mathbf{f}$ este continuă pe G.

Să presupunem acum că $\mathbf{f}$ este cu suport compact C. Deoarece funcţia $\Delta(x^{-1})$ este continuă pe G, este mărginită pe C, deci funcţia $\mathbf{f}(x)\Delta(x^{-1})$ este integrabilă. Funcţia $x \to \mathbf{g}(yx^{-1})$ aparţine spaţiului $\mathcal{L}_Y^\infty$ pentru orice $y \in G$, deci integrala

$$(\mathbf{g} * \mathbf{f})(y) = \int \mathbf{g}(yx^{-1})\, \mathbf{f}(x)\, \Delta(x^{-1})\, \mathrm{d}x$$

există pentru orice $y \in G$. Aşadar, şi în acest caz $\mathbf{g} * \mathbf{f}$ este definită peste tot şi

$$|(\mathbf{g} * \mathbf{f})(y)| \leqslant N_\infty(\mathbf{g}) \int |\mathbf{f}(x)|\, \Delta(x^{-1})\, \mathrm{d}x = N_\infty(\mathbf{g}) \int |\mathbf{f}(x^{-1})|\, \mathrm{d}x = N_\infty(\mathbf{g})\, N_1(\check{\mathbf{f}}).$$

Continuitatea funcţiei $\mathbf{g} * \mathbf{f}$ se demonstrează ca mai sus, înlocuind $\mathbf{g}(x)$ cu $\mathbf{g}(x)\Delta(x^{-1})\varphi_C(x)$.

Corolar. *Fie* $\mathbf{f} \in \mathcal{L}_X^1$ *şi* $\mathbf{g} \in \mathcal{L}_Y^\infty$.

1) *Dacă* $\mathbf{g}$ *este uniform continuă la dreapta, şi mărginită, atunci* $\mathbf{f} * \mathbf{g}$ *este uniform continuă la dreapta şi mărginită*;

1′) *Dacă* $\mathbf{g}$ *este uniform continuă la stînga şi mărginită iar* G *este unimodular sau* $\mathbf{f}$ *este cu suport compact, atunci* $\mathbf{g} * \mathbf{f}$ *este uniform continuă la stînga şi mărginită*;

2) *Dacă* $\mathbf{g} \in \overline{\mathcal{K}_Y(G)}$, *atunci* $\mathbf{f} * \mathbf{g} \in \overline{\mathcal{K}_Z(G)}$;

2′) *Dacă* $\mathbf{g} \in \mathcal{K}_Y(G)$ *iar* G *este unimodular sau* $\mathbf{f}$ *este cu suport compact, atunci* $\mathbf{g} * \mathbf{f} \in \overline{\mathcal{K}_Z(G)}$;

3) *Dacă* $\mathbf{f} \in \mathcal{K}_X(G)$ *şi* $\mathbf{g} \in \mathcal{K}_Y(G)$, *atunci* $\mathbf{f} * \mathbf{g} \in \mathcal{K}_Z(G)$ *şi* $\mathbf{g} * \mathbf{f} \in \mathcal{K}_Z(G)$.

Se ţine seama de propoziţiile 19, 20 şi 21.

Propoziția 27. *Să presupunem că G este unimodular. Dacă $\mathbf{f} \in \mathcal{L}_X^p$ și $\mathbf{g} \in \mathcal{L}_Y^q$, $1 < p, q < +\infty, \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, atunci funcția $\mathbf{f} * \mathbf{g}$ este definită peste tot pe G, și aparține spațiului $\overline{\mathcal{K}_Z(G)}$, iar măsura $\mathbf{f}\mathrm{d}x * \mathbf{g}\mathrm{d}y$ are sens și avem*

$$\|\mathbf{f} * \mathbf{g}\| \leqslant N_p(\mathbf{f}) N_q(\mathbf{g}) \text{ și } \mathbf{f}\,\mathrm{d}x * \mathbf{g}\,\mathrm{d}y = (\mathbf{f} * \mathbf{g})\,dy.$$

Deoarece G este unimodular, funcția $x \to \mathbf{g}(x^{-1})$ aparține de asemenea lui $\mathcal{L}_Y^q$. Pentru orice $y \in G$, funcția $x \to \mathbf{g}(x^{-1}y)$ aparține lui $\mathcal{L}_Y^q$, deci funcția $x \to \mathbf{f}(x)\,\mathbf{g}(x^{-1}y)$ este integrabilă și deci funcția $(\mathbf{f} * \mathbf{g})(y) = \int \mathbf{f}(x)\,\mathbf{g}(x^{-1}y)\,\mathrm{d}x$, există pentru orice $y \in G$. De aici deducem că

$$|(\mathbf{f} * \mathbf{g})(y)| \leqslant \int |\mathbf{f}(x)|\,|\mathbf{g}(x^{-1}y)|\,\mathrm{d}x \leqslant N_p(\mathbf{f}) N_q(\mathbf{g})$$

deci $\mathbf{f} * \mathbf{g}$ este mărginită și

$$\|\mathbf{f} * \mathbf{g}\| \leqslant N_p(\mathbf{f}) N_q(\mathbf{g}).$$

Să arătăm că $\mathbf{f} * \mathbf{g}$ este continuă. Fie $(\mathbf{f}_n)$ un șir din $\mathcal{K}_X(G)$ și $(\mathbf{g}_n)$ un șir din $\mathcal{K}_Y(G)$ astfel încît $N_p(\mathbf{f} - \mathbf{f}_n) \to 0$ și $N_q(\mathbf{g} - \mathbf{g}_n) \to 0$. Atunci

$$\|\mathbf{f} * \mathbf{g} - \mathbf{f}_n * \mathbf{g}_n\| = \|(\mathbf{f} - \mathbf{f}_n) * \mathbf{g} + \mathbf{f}_n * (\mathbf{g} - \mathbf{g}_n)\| \leqslant$$

$$\leqslant \|(\mathbf{f} - \mathbf{f}_n) * \mathbf{g}\| + \|\mathbf{f}_n * (\mathbf{g} - \mathbf{g}_n)\| \leqslant N_p(\mathbf{f} - \mathbf{f}_n) N_q(\mathbf{g}) + N_p(\mathbf{f}_n) N_q(\mathbf{g} - \mathbf{g}_n).$$

Dar $N_p(\mathbf{f}_n) \to N_p(\mathbf{f})$ deci $\|\mathbf{f} * \mathbf{g} - \mathbf{f}_n \mathbf{g}_n\| \to 0$, adică șirul $\mathbf{f}_n * \mathbf{g}_n$ converge uniform pe G către $\mathbf{f} * \mathbf{g}$. Cum funcțiile $\mathbf{f}_n * \mathbf{g}_n$ sînt continue și cu suport compact, rezultă că $\mathbf{f} * \mathbf{g} \in \overline{\mathcal{K}_Z(G)}$.

Să arătăm acum că $\mathbf{f}\mathrm{d}x * \mathbf{g}\mathrm{d}y$ are sens.

Fie $\varphi \geqslant 0$ o funcție din $\mathcal{K}(G)$, $C \subset G \times G$ o mulțime compactă, $K_1 = \mathrm{pr}_1 C$, $K_2 = \mathrm{pr}_2 C$ și $K = K_1 K_2$.

Funcția $\varphi(x, y)\,\varphi_{K \times K}(x, y)$ este integrabilă pentru măsura $|\mathbf{f}|\,\mathrm{d}x \otimes |\mathbf{g}|\,\mathrm{d}y$ și funcția $y \to \varphi(xy)\,|\mathbf{g}(y)|$ este integrabilă pentru orice $x \in G$. Atunci

$$I_K = \iint_{K \times K} \varphi(x, y)\,|\mathbf{f}(x)|\,\mathrm{d}x\,|\mathbf{g}(y)|\,\mathrm{d}y = \int_K |\mathbf{f}(x)|\,\mathrm{d}x \int_K \varphi(xy)\,|\mathbf{g}(y)|\,\mathrm{d}y \leqslant$$

$$\leqslant \int_K^* (x)|\,\mathrm{d}x \int \varphi(xy)\,|\mathbf{g}(y)|\,\mathrm{d}y = \int_K^* |\mathbf{f}(x)|\,\mathrm{d}x \int \varphi(y)\,|\mathbf{g}(x^{-1}y)|\,\mathrm{d}y.$$

Avem apoi

$$\int_K \varphi(xy)\,|\mathbf{g}(y)|\,dy = \int \varphi_x(y)\,|\mathbf{g}(y)|\,\mathrm{d}y \leqslant N_p(\varphi_x) N_q(\mathbf{g}) = N_p(\varphi) N_q(\mathbf{g}),$$

deci

$$\int_K^* |\mathbf{f}(x)|\,\mathrm{d}x \int |\mathbf{g}(x^{-1}y)|\,\varphi(y)\,\mathrm{d}y = \int_K^* |\mathbf{f}(x)|\,\mathrm{d}x \int \varphi(xy)\,|\mathbf{g}(y)|\,\mathrm{d}y \leqslant$$

$$\leqslant N_p(\varphi) N_q(\mathbf{g}) \int_K |\mathbf{f}(x)|\,dx < +\infty.$$

Deoarece $\mathbf{g}(x^{-1}y)$ este măsurabilă pentru $\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, este măsurabilă în raport cu măsura mărginită $\varphi_K |\mathbf{f}|\,\mathrm{d}x \otimes \varphi \mathrm{d}y$. Deoarece integrala iterată există, conform corolarului propoziției 3, § 22, funcția $\mathbf{g}(x^{-1}y)$ este integrabilă în raport cu măsura $\varphi_K |\mathbf{f}|\,\mathrm{d}x \otimes \varphi \mathrm{d}y$ și

$$I_K \leqslant \int_K |\mathbf{f}(x)|\,\mathrm{d}x \int \varphi(y)\,|\mathbf{g}(x^{-1}y)|\,\mathrm{d}y = \int \varphi(y)\,\mathrm{d}y \int_K |\mathbf{f}(x)|\,|\mathbf{g}(x^{-1}y)|\,\mathrm{d}x \leqslant$$

$$\leqslant N_p(\mathbf{f})\,N_q(\mathbf{f}) \int \varphi\,\mathrm{d}y.$$

Urmează că

$$\iint^{*} \varphi(xy)\,|\mathbf{f}(x)|\,\mathrm{d}x\,|\mathbf{g}(y)|\,\mathrm{d}y = \sup_K I_K \leqslant N_p(\mathbf{f})\,N_q(\mathbf{g}) \int \varphi\,\mathrm{d}y < +\infty$$

deci $\varphi(xy)$ este integrabilă în raport cu $|\mathbf{f}|\,\mathrm{d}x \otimes |\mathbf{g}|\,\mathrm{d}y$.

Urmează că există convoluția $|\mathbf{f}|\mathrm{d}x * |\mathbf{g}|\,\mathrm{d}y$, deci și convoluția $\mathbf{f}\mathrm{d}x * \mathbf{g}\mathrm{d}y$. Pentru orice funcție $\varphi \in \mathcal{K}(G)$ avem atunci

$$\int \varphi\,\mathbf{f}\,\mathrm{d}x * \mathbf{g}\,\mathrm{d}y = \iint \varphi(xy)\,\mathbf{f}(x)\,\mathrm{d}x\,\mathbf{g}(y)\,\mathrm{d}y = \int \mathbf{f}(x)\,\mathrm{d}x \int \varphi(xy)\,\mathbf{g}(y)\,\mathrm{d}y =$$

$$= \int \mathbf{f}(x)\,\mathrm{d}x \int \varphi(y)\,\mathbf{g}(x^{-1}y)\,\mathrm{d}y = \int \varphi(y)\,\mathrm{d}y \int \mathbf{f}(x)\,\mathbf{g}(x^{-1}y)\,\mathrm{d}y =$$

$$= \int \varphi(y)\,(\mathbf{f} * \mathbf{g})(y)\,\mathrm{d}y.$$

deci

$$\mathbf{f}\,\mathrm{d}x * \mathbf{g}\,\mathrm{d}y = (\mathbf{f} * \mathbf{g})\,\mathrm{d}y$$

și propoziția este demonstrată.

Corolar. *Dacă G este unimodular și dacă $\mathbf{f} \in \mathcal{L}^2_X$ și $\mathbf{g} \in \mathcal{L}^2_Y$, atunci $\mathbf{f} * \mathbf{g} \in \overline{\mathcal{K}_Z(G)}$ și $\|\mathbf{f} * \mathbf{g}\| \leqslant N_2(\mathbf{f})\,N_2(\mathbf{g})$.*

6. Unitate aproximativă

Pentru fiecare vecinătate V a lui e să alegem o funcție pozitivă u_V definită pe G, simetrică, $(u_V(x^{-1}) = u_V(x))$ continuă, cu suportul conținut în V, astfel încît $\int u_V(x)\,\mathrm{d}x = 1$. O astfel de funcție u_V se poate obține dintr-o funcție arbitrară $\varphi \in \mathcal{K}(G,V)$, luînd $U = \dfrac{\varphi - \check{\varphi}}{\int(\varphi - \check{\varphi})\mathrm{d}x}$.

Familia (u_V) va fi numită *unitate aproximativă* pentru produsul de convoluție. Justificarea acestei denumiri va rezulta din propozițiile care urmează.

Propoziția 28. *Fie $\mathbf{f}$ o funcție definită pe G cu valori într-un spațiu Banach E.*

Dacă $\mathbf{f}$ este uniform continuă la stînga, pentru orice $\varepsilon > 0$ există o vecinătate V a lui e astfel încît să avem

$$|(u_V * \mathbf{f})(y) - \mathbf{f}(y)| < \varepsilon, \text{ pentru orice } y \in G.$$

Dacă $\mathbf{f}$ *este uniform continuă la dreapta, pentru orice* $\varepsilon > 0$ *există o vecinătate* V *a lui* e *astfel încît să avem*

$$|(\mathbf{f} * u_V)(y) - \mathbf{f}(y)| < \varepsilon, \quad \textit{pentru orice } y \in G.$$

Să presupunem că $\mathbf{f}$ este uniform continuă la stînga și fie $\varepsilon > 0$. Există o vecinătate V a lui e, astfel încît să avem

$$|\mathbf{f}(z) - \mathbf{f}(y)| < \varepsilon, \text{ pentru } y z^{-1} \in V.$$

Pentru orice $x \in V$ și orice $y \in G$ avem $y(x^{-1}y)^{-1} = x \in V$, deci $|\mathbf{f}(x^{-1}y) - \mathbf{f}(y)| < \varepsilon$. Funcția $u_V * f$ este definită peste tot și avem

$$|(u_V * \mathbf{f})(y) - \mathbf{f}(y)| =$$

$$= \left| \int u_V(x)\, \mathbf{f}(x^{-1}y)\, dx - \int u_V(x)\, \mathbf{f}(y)\, dx \right| \leqslant \int u_V(x)\, |\mathbf{f}(x^{-1}y) - \mathbf{f}(y)|\, |dx < \varepsilon.$$

Dacă $\mathbf{f}$ este uniform continuă la dreapta, se alege vecinătatea V astfel încît să avem

$$|\mathbf{f}(z) - \mathbf{f}(y)| < \varepsilon, \text{ pentru } y^{-1} z \in V.$$

Pentru orice $x \in V$ și orice $y \in G$ avem $y^{-1}(yx) = x \in V$ deci

$$|\mathbf{f}(yx) - \mathbf{f}(y)| < \varepsilon,$$

de unde, u_V fiind simetrică,

$$|(\mathbf{f} * u_V)(y) - \mathbf{f}(y)| = \left| \int \mathbf{f}(yx)\, u_V(x^{-1})\, dx - \int \mathbf{f}(y)\, u_V(x)\, dx \right| =$$

$$= \left| \int \mathbf{f}(yx)\, u_V(x)\, dx - \int \mathbf{f}(y)\, u_V(x)\, dx \right| \leqslant \int u_V(x)\, |\mathbf{f}(yx) - \mathbf{f}(y)|\, dx < \varepsilon.$$

Observație. Propoziția precedentă exprimă faptul că dacă $\mathbf{f}$ este uniform continuă la stînga, familia de funcții $(u_V * \mathbf{f})$ converge uniform către $\mathbf{f}$ pe G, limita fiind luată după ordinea definită de relația de incluziune pe mulțimea vecinătăților lui e. De asemenea, dacă $\mathbf{f}$ este uniform continuă la dreapta, atunci $(\mathbf{f} * u_V)$ converge uniform către $\mathbf{f}$.

În particular, dacă $\mathbf{f} \in \mathcal{K}_E(G)$, atunci atît $u_V * \mathbf{f}$ cît și $\mathbf{f} * u_V$ converge uniform către $\mathbf{f}$.

Propoziția 29. *Dacă* $\mathbf{f} \in \mathcal{L}_E^p$, $1 \leqslant p < +\infty$, *atunci pentru orice* $\varepsilon > 0$, *există o vecinătate* V *a lui* e *astfel încît să avem*

$$N_p(u_V * \mathbf{f} - \mathbf{f}) < \varepsilon \quad \textit{și} \quad N_p(\mathbf{f} * u_V - \mathbf{f}) < \varepsilon.$$

Fie $\mathbf{f} \in \mathcal{L}_E^p$ și $\varepsilon > 0$. Aplicația $s \to \mathbf{f}_s$ a lui G în $\mathcal{L}_E^p$ este uniform continuă la stînga (prop. 8, § 23). Există deci o vecinătate simetrică V a lui e astfel încît să avem

$$N_p(\mathbf{f}_s - \mathbf{f}) < \varepsilon \quad \text{pentru } s \in V.$$

Fie $\mathbf{h} \in \mathcal{K}(G)$. Deoarece $|u_V * \mathbf{f}|$ este de putere p-integrabilă, funcţia $|\mathbf{h}|\,|u_V * \mathbf{f}|$ este integrabilă şi

$$\int |\mathbf{h}(y)|\,dy \int u_V(x)\,|\mathbf{f}(x^{-1}y)|\,dx = \int |\mathbf{h}(y)|\,|u_V * \mathbf{f}(y)|\,dy.$$

Deoarece funcţia $\mathbf{f}(x^{-1}y)$ este măsurabilă în raport cu măsura mărginită $\mathbf{h}\,dy \otimes u_V\,dx$, deducem că $\mathbf{f}(x^{-1}y)$ este integrabilă în raport cu această măsură. Aplicînd teorema lui Fubini deducem

$$\left|\int [u_V * \mathbf{f}(y) - \mathbf{f}(y)]\,\mathbf{h}(y)\,dy\right| = \left|\int (u_V * \mathbf{f})(y)\,\mathbf{h}(y)\,dy - \int \mathbf{f}(y)\,\mathbf{h}(y)\,dy\right| =$$

$$= \left|\int \mathbf{h}(y)\,dy \int u_V(x)\,\mathbf{f}(x^{-1}y)\,dx - \int \mathbf{h}(y)\,\mathbf{f}(y)\,dy\right| =$$

$$= \left|\int u_V(x)\,dx \int \mathbf{h}(y)\,\mathbf{f}(x^{-1}y)\,dy - \int u_V(x)\,dx \int \mathbf{h}(y)\,\mathbf{f}(y)\,dy\right| =$$

$$= \left|\int u_V(x)\,dx \int \mathbf{h}(y)\,[\mathbf{f}_{x^{-1}}(y) - \mathbf{f}(y)]\,dy\right| \leqslant$$

$$\leqslant \int u_V(x)\,dx \int |\mathbf{h}(y)|\,|\mathbf{f}_{x^{-1}}(y) - \mathbf{f}(y)|\,dy \leqslant N_q(h)\,N_p(\mathbf{f}_{x^{-1}} - \mathbf{f}) < \varepsilon\,N_q(\mathbf{h}),$$

de unde

$$N_p(u_V * \mathbf{f} - \mathbf{f}) < \varepsilon.$$

Pentru demonstrarea celeilalte inegalităţi se alege vecinătatea simetrică V astfel încît să avem

$$N_p(\mathbf{f}^{s^{-1}} - \mathbf{f}) < \varepsilon, \text{ pentru } s \in V,$$

şi, observînd că $u_V(x) = u_V(x^{-1})$, deducem, ca mai sus, pentru $\mathbf{h} \in \mathcal{K}(G)$,

$$\left|\int [(\mathbf{f} * u_V)(y) - \mathbf{f}(y)]\,\mathbf{h}(y)\,dy\right| = \left|\int \mathbf{h}(y)\,dy \int \mathbf{f}(xy)\,u_V(x^{-1})\,dx -\right.$$

$$\left. - \int \mathbf{f}(y)\,\mathbf{h}(y)\,dy\right| = \left|\int u_V(x^{-1})\,dx \int \mathbf{f}(yx)\,\mathbf{h}(y)\,dy - \int u_V(x^{-1})\,dx \int \mathbf{f}(y)\,\mathbf{h}(y)\,dy\right| =$$

$$= \left|\int u_V(x^{-1})\,dx \int [\mathbf{f}^{x^{-1}}(y) - \mathbf{f}(y)]\,\mathbf{h}(y)\,dy\right| \leqslant$$

$$\leqslant \int u_V(x^{-1})\,dx \int |\mathbf{f}^{x^{-1}}(y) - \mathbf{f}(y)|\,|\mathbf{h}(y)|\,dy \leqslant$$

$$\leqslant \int u_V(x^{-1})\,dx\,N_p(\mathbf{f}^{x^{-1}} - \mathbf{f})\,N_q(\mathbf{h}) \leqslant \varepsilon\,N_q(\mathbf{h}),$$

de unde $N_p(\mathbf{f} * u_V - \mathbf{f}) < \varepsilon$ şi propoziţia este demonstrată.

Observaţie. Propoziţia exprimă faptul că $u_V * \mathbf{f}$ şi $\mathbf{f} * u_V$ tind către $\mathbf{f}$ în topologia spaţiului $\mathcal{L}_E^p$.

§25. ALGEBRA GRUPALĂ

1. Algebra $\mathcal{M}^1$

În continuare vom nota prin A o algebră Banach (complexă) cu element unitate. În particular A poate fi corpul C al numerelor complexe.

Putem scufunda izometric C în A identificînd un scalar $\alpha \in C$ cu vectorul $\alpha e \in A$ şi putem considera $C \subset A$.

În acest caz, putem considera convoluţia a două măsuri $\mathbf{m}$ şi $\mathbf{n}$ cu valori în A, sau a unei măsuri $\mathbf{m} : \mathcal{K}(G) \to A$ cu o funcţie $\mathbf{f} : G \to A$, sau în sfîrşit convoluţia a două funcţii $\mathbf{f}, \mathbf{g} : G \to A$. De fiecare dată, convoluţia este o măsură sau o funcţie cu valori tot în A.

Se poate defini produsul $a\mathbf{m}$ şi $\mathbf{m}a$ dintre o măsură $\mathbf{m} : \mathcal{K}(G) \to A$ şi un element $a \in A$ prin egalitatea $(a\mathbf{m})(\varphi) = a.\mathbf{m}(\varphi)$ şi $(\mathbf{m}a)(\varphi) = \mathbf{m}(\varphi).a$, pentru orice $\varphi \in \mathcal{K}(G)$.

Propoziţia 1. *Spaţiul $\mathcal{M}_A^1$ al măsurilor mărginite $\mathbf{m} : \mathcal{K}(G) \to A$ este o algebră cu unitate pentru produsul de convoluţie $\mathbf{m} * \mathbf{n}$.*

Conform propoziţiei 3, § 24, dacă $\mathbf{m}, \mathbf{n} \in \mathcal{M}_A^1$, atunci $\mathbf{m} * \mathbf{n}$ are sens şi $\mathbf{m} * \mathbf{n} \in \mathcal{M}_A^1$.

S-a observat deja că aplicaţia $(\mathbf{m}, \mathbf{n}) \to \mathbf{m} * \mathbf{n}$ a lui $\mathcal{M}_A^1 \times \mathcal{M}_A^1$ în $\mathcal{M}_A^1$ este biliniară, adică :

1) $(\mathbf{m}_1 + \mathbf{m}_2) * \mathbf{n} = \mathbf{m}_1 * \mathbf{n} + \mathbf{m}_2 * \mathbf{n}$,

2) $\mathbf{m} * (\mathbf{n}_1 + \mathbf{n}_2) = \mathbf{m} * \mathbf{n}_1 + \mathbf{m} * \mathbf{n}_2$,

şi că ε_e este unitate (prop. 2, § 24) :

3) $\varepsilon_e * \mathbf{m} = \mathbf{m} * \varepsilon_e = \mathbf{m}$.

Se verifică imediat că avem

4) $\alpha(\mathbf{m} * \mathbf{n}) = (\alpha\mathbf{m}) * \mathbf{n} = \mathbf{m} * (\alpha\mathbf{n})$, α scalar,

şi chiar

4′) $a(\mathbf{m} * \mathbf{n}) = (a\mathbf{m}) * \mathbf{n} = \mathbf{m} * (a\mathbf{n})$, $(\mathbf{m} * \mathbf{n})\, a = (\mathbf{m}a) * \mathbf{n} = \mathbf{m} * (\mathbf{n}a)$

pentru orice $a \in A$.

Rămîne de văzut că produsul de convoluţie este asociativ :

$$\mathbf{l} * (\mathbf{m} * \mathbf{n}) = (\mathbf{l} * \mathbf{m}) * \mathbf{n}$$

oricare ar fi $\mathbf{l}, \mathbf{m}, \mathbf{n} \in \mathcal{M}_A^1$.

Fie $\varphi \in \mathcal{K}(G)$. Folosind teorema lui Fubini avem

$$(\mathbf{l} * (\mathbf{m} * \mathbf{n}))(\varphi) = \iint \varphi(xy)\, \mathbf{dl}(x)\, \mathrm{d}(\mathbf{m} * \mathbf{n})(y) = \int \mathbf{dl}(x) \int \varphi(xy)\, \mathrm{d}(\mathbf{m} * \mathbf{n})(y).$$

Dar, pentru fiecare $x \in G$, avem

$$\int \varphi(xy)\, \mathrm{d}(\mathbf{m} * \mathbf{n})(y) = \iint \varphi(xuv)\, \mathbf{dm}(u)\, \mathbf{dn}(v),$$

deci

$$(\mathbf{l} * (\mathbf{m} * \mathbf{n}))(\varphi) = \int \mathbf{dl}(x) \iint \varphi(xuv)\, \mathbf{dm}(u)\, \mathbf{dn}(v).$$

Măsura $\mathbf{l} \otimes \mathbf{m} \otimes \mathbf{n}$ este mărginită pe $G \times G \times G$ şi funcţia φ este continuă şi mărginită, deci este integrabilă în raport cu această măsură, şi conform teoremei lui Fubini avem

$$\iiint \varphi(xuv)\, \mathbf{dl}(x)\, \mathbf{dm}(u)\, \mathbf{dn}(v) = \int \mathbf{dl}(x) \int \varphi(xuv)\, \mathbf{dm}(u)\, \mathbf{dn}(v),$$

deci

$$(\mathbf{l} * (\mathbf{m} * \mathbf{n}))(\varphi) = \iiint \varphi(xuv)\, \mathbf{dl}(x)\, \mathbf{dm}(u)\, \mathbf{dn}(v).$$

Pe de altă parte

$$((\mathbf{l} * \mathbf{m}) * \mathbf{n})(\varphi) = \iint \varphi(yv)\, \mathbf{d}(\mathbf{l} * \mathbf{m})(y)\, \mathbf{dn}(v) = \int \mathbf{dn}(v) \int \varphi(yv)\, \mathbf{d}(\mathbf{l} * \mathbf{m})(y) =$$

$$= \int \mathbf{dn}(v) \int \varphi(xuv)\, \mathbf{dl}(x)\, \mathbf{dm}(u) = \iiint \varphi(xuv)\, \mathbf{dl}(x)\, \mathbf{dm}(u)\, \mathbf{dn}(v).$$

şi deci $\mathbf{l} * (\mathbf{m} * \mathbf{n}) = (\mathbf{l} * \mathbf{m}) * n$.

Cu aceasta propoziţia este demonstrată.

Conform propoziţiei 4, § 24, algebra $\mathcal{M}_A^1$ este comutativă dacă şi numai dacă grupul G este comutativ.

Vom nota cu $\mathcal{M}^1$ în loc de $\mathcal{M}_C^1$ spaţiul măsurilor complexe mărginite. Din cele de mai sus deducem, în particular, că spaţiul $\mathcal{M}^1$ este de asemenea o algebră.

Identificînd o măsură scalară $\mu \in \mathcal{M}^1$ cu măsura $e\mu \in \mathcal{M}_A^1$, deducem că $\mathcal{M}^1$ este o subalgebră a algebrei $\mathcal{M}_A^1$.

Conform corolarului 3 al propoziţiei 7, §24, mulţimea $\mathcal{M}_A^c$ a măsurilor cu suport compact din $\mathcal{M}_A^1$ este o algebră şi de asemenea mulţimea $\mathcal{M}^c$ a măsurilor complexe cu suport compact este o algebră.

Algebra $\mathcal{M}_A^1$ este un subspaţiu al spaţiului $\mathcal{L}(\mathcal{K}(G), A)$ al aplicaţiilor liniare şi continue ale lui $\mathcal{K}(G)$ în A. Asemenea aplicaţii liniare sînt măsuri, însă pot să nu fie majorate, şi chiar dacă sînt majorate modulul lor poate să nu fie o măsură mărginită, deci pot să nu aparţină lui $\mathcal{M}_A^1$.

Pe algebra $\mathcal{M}_A^1$ vom considera norma

$$|||\mathbf{m}||| = ||\,|\mathbf{m}|\,||.$$

Pentru măsurile scalare $\mu \in \mathcal{M}_A^1$ avem $|||\mu||| = ||\mu||$, deoarece $||\mu|| = ||\,|\mu|\,||$.

Deoarece $|\mathbf{m} * \mathbf{n}| \leqslant |\mathbf{m}| * |\mathbf{n}|$ şi $||\,|\mathbf{m}| * |\mathbf{n}|\,|| \leqslant ||\,|\mathbf{m}|\,|| \cdot ||\,|\mathbf{n}|\,||$, deducem $|||\mathbf{m} * \mathbf{n}||| \leqslant |||\mathbf{m}|||\ |||\mathbf{n}|||$, deci $\mathcal{M}_A^1$ este o algebră normată.

Pentru această normă, $\mathcal{M}^1$ este o algebră Banach, fiind egală cu dualul spaţiului normat $\mathcal{K}(G)$ cu norma $\|f\| = \sup_{x \in G} |f(x)|$.

Mulţimea măsurilor $(\varepsilon_s)_{s \in G}$ este un subgrup discret al subgrupului multiplicativ al algebrei $\mathcal{M}^1$, deoarece $|||\varepsilon_s - \varepsilon_t||| = 2$ (prop. 5, § 24).

2. Algebra L_A^1

Dacă $\mathbf{f}$ și $\mathbf{g}$ sînt două funcții din $\mathcal{L}_A^1$, convoluția lor $\mathbf{f} * \mathbf{g}$ este o funcție integrabilă, *definită aproape peste tot pe* G, deci nu aparține neapărat spațiului $\mathcal{L}_A^1$. Așadar, în general, $\mathcal{L}_A^1$ nu este o algebră pentru produsul de convoluție. După cum am observat, dacă $\mathbf{f}'$ și $\mathbf{g}'$ sînt două funcții echivalente respectiv cu $\mathbf{f}$ și $\mathbf{g}$, atunci funcțiile $\mathbf{f} * \mathbf{g}$ și $\mathbf{f}' * \mathbf{g}'$ sînt egale aproape peste tot. De aceea vom defini convoluția $\dot{\mathbf{f}} * \dot{\mathbf{g}}$ a două clase de echivalență $\dot{\mathbf{f}}$ și $\dot{\mathbf{g}}$ din $\mathcal{L}_A^1$ prin egalitatea

$$\dot{\mathbf{f}} * \dot{\mathbf{g}} = \widetilde{\mathbf{f} * \mathbf{g}}.$$

Clasa $\widetilde{\mathbf{f} * \mathbf{g}}$ nu depinde de funcțiile $\mathbf{f}$ și $\mathbf{g}$ ci numai de clasele $\dot{\mathbf{f}}$ și $\dot{\mathbf{g}}$. Vom arăta că L_A^1 este o algebră pentru acest produs.

Vom scufunda izometric spațiul L_A^1 în spațiul $\mathcal{M}_A^1$ identificînd o clasă de echivalență $\dot{\mathbf{f}} \in L_A^1$ cu măsura mărginită $\mathbf{m} = \mathbf{f}\,dx$. Măsura $\mathbf{m}$ nu depinde de funcția $\mathbf{f}$ ci numai de clasa de echivalență $\dot{\mathbf{f}}$ și avem

$$\|\|\mathbf{m}\|\| = \|\,|\mathbf{m}|\,\| = \|\,|\mathbf{f}\,dx|\,\| = \|\,|\mathbf{f}|\,dx\,\| = N_1(\mathbf{f}) = \|\dot{\mathbf{f}}\|_1.$$

Prin această identificare, convoluția $\mathbf{m} * \mathbf{n}$ pe $\mathcal{M}_A^1$ este o prelungire a convoluției $\dot{\mathbf{f}} * \dot{\mathbf{g}}$ pe L_A^1, deoarece

$$\mathbf{f}\,dx * \mathbf{g}\,dy = (\mathbf{f} * \mathbf{g})\,dy.$$

Rezultă că produsul $\dot{\mathbf{f}} * \dot{\mathbf{g}}$ este asociativ, deci L_A^1 este o algebră.

Prin această identificare, L_A^1 este formată din măsurile mărginite care sînt de bază măsura Haar și densitate din $\mathcal{L}_A^1$.

Propoziția 2. *L_A^1 este un ideal bilateral al algebrei $\mathcal{M}_A^1$.*

Fie $\mathbf{m} \in \mathcal{M}_A^1$ și $\dot{\mathbf{f}} \in L_A^1$. Să alegem o funcție *boreliană* $\mathbf{f} \in \dot{\mathbf{f}}$. Conform propoziției 14, § 24, funcțiile $\mathbf{f} * \mathbf{m}$ și $\mathbf{m} * \mathbf{f}$ sînt definite aproape peste tot, sînt integrabile și avem

$$(\mathbf{f}\,dx) * \mathbf{m} = (\mathbf{f} * \mathbf{m})\,dx \text{ și } \mathbf{m} * (\mathbf{f}dx) = (\mathbf{m} * \mathbf{f})\,dx,$$

adică

$$\dot{\mathbf{f}} * \mathbf{m} = \widetilde{\mathbf{f} * \mathbf{m}} \in L_A^1 \text{ și } \mathbf{m} * \dot{\mathbf{f}} = \widetilde{\mathbf{m} * \mathbf{f}} \in L_A^1,$$

deci L_A^1 este ideal bilateral în $\mathcal{M}_A^1$.

Corolar. *L^1 este un ideal bilateral al algebrei $\mathcal{M}^1$*

Algebra L^1 se numește *algebră grupală* sau *algebră de grup*. Unii autori numesc algebră grupală, algebra $\mathcal{M}^1$.

Identificînd o funcție $\mathbf{f} \in \mathcal{L}^1$ cu funcția $e\mathbf{f} \in \mathcal{L}_A^1$, putem scufunda izometric spațiul $\mathcal{L}^1$ în $\mathcal{L}_A^1$ și spațiul L^1 în spațiul L_A^1.

Cu această identificare, L^1 este o subalgebră a algebrei L_A^1 și a algebrei $\mathcal{M}_A^1$.

Propoziția 3. *Spațiul* $L_A^1 \cap L_A^p$, $1 \leqslant p \leqslant \infty$, *este un ideal bilateral al algebrei* $\mathcal{M}_A^1$.

Într-adevăr, fie $\mathbf{m} \in \mathcal{M}_A^1$ și $\dot{\mathbf{f}} \in L_A^1 \cap L_A^p$. Să alegem o funcție boreliană $\mathbf{f} \in \dot{\mathbf{f}}$. Avem $\mathbf{f} \in \mathcal{L}_A^1 \cap \mathcal{L}_A^p$. Din propoziția 14, § 24, deducem că $\mathbf{m} * \mathbf{f}$ și $\mathbf{f} * \mathbf{m}$ sînt definite aproape peste tot, sînt egale aproape peste tot cu funcții din $\mathcal{L}_A^1 \cap \mathcal{L}_A^p$ și

$$(\mathbf{f}\,dx) * \mathbf{m} = (\mathbf{f} * \mathbf{m})\,dx, \quad \mathbf{m} * (\mathbf{f}\,dx) = (\mathbf{m} * \mathbf{f})\,dx.$$

De aici deducem

$$\dot{\mathbf{f}} * \mathbf{m} = \dot{\overline{\mathbf{f} * \mathbf{m}}} \in L_A^1 \cap L_A^p \text{ și } \mathbf{m} * \dot{\mathbf{f}} = \dot{\overline{\mathbf{m} * \mathbf{f}}} \in L_A^1 \cap L_A^p$$

și propoziția este demonstrată.

Corolar. *Spațiul* $L^1 \cap L^p$, $1 \leqslant p \leqslant +\infty$, *este un ideal bilateral al algebrei* $\mathcal{M}^1$.

Dacă două funcții *continue* $\mathbf{f}, \mathbf{g} : G \to A$ sînt egale aproape peste tot, atunci ele sînt egale peste tot. Așadar o clasă de echivalență conține cel mult o funcție continuă. De aceea vom identifica o funcție continuă $\mathbf{f} : G \to A$ cu clasa sa de echivalență $\dot{\mathbf{f}}$ și vom considera că spațiul funcțiilor continue și mărginite $\mathcal{C}_A^\infty$ cu norma $\|\mathbf{f}\| = \sup_{x \in G} |\mathbf{f}(x)|$ este un subspațiu al spațiului L_A^∞, și că spațiul $\overline{\mathcal{K}_A(G)}$ al funcțiilor continue care se anulează la infinit este un subspațiu al lui L_A^∞.

De asemenea, vom considera spațiul $\mathcal{K}_A(G)$ cu norma N_p ca un subspațiu al spațiului L_A^1, $1 \leqslant p \leqslant +\infty$.

Propoziția 4. *Spațiile* $L_A^1 \cap \mathcal{C}_A^\infty$ *și* $L_A^1 \cap \overline{\mathcal{K}_A(G)}$ *sînt ideale la stînga ale algebrei* $\mathcal{M}_A^1$.

Dacă G *este unimodular,* $L_A^1 \cap \mathcal{C}_A^\infty$ *și* $L_A^1 \cap \overline{\mathcal{K}_A(G)}$ *sînt ideale bilaterale ale algebrei* $\mathcal{M}_A^1$.

Într-adevăr, dacă $\mathbf{m} \in \mathcal{M}_A^1$ și $\mathbf{f} \in L_A^1 \cap \mathcal{C}_A^\infty$, avem, conform propoziției 18, § 24, $\mathbf{m} * \mathbf{f} \in \mathcal{C}_A^\infty$ și conform propoziției 3, $\mathbf{m} * \mathbf{f} \in L_A^1$ deci $\mathbf{m} * \mathbf{f} \in L_A^1 \cap \mathcal{C}_A^\infty$, deci $L_A^1 \cap \mathcal{C}_A^\infty$ este *ideal* la stînga. Folosind propoziția 20, § 24, se deduce la fel că $L_A^1 \cap \overline{\mathcal{K}_A(G)}$ este ideal stîng.

Dacă G este unimodular, se deduce din aceleași propoziții că $L_A^1 \cap \mathcal{C}_A^\infty$ și $L_A^1 \cap \overline{\mathcal{K}_A(G)}$ sînt ideale drepte.

Propoziția 5. *Spațiul* $\mathcal{K}_A(G)$ *este o algebră pentru convoluție* $\mathbf{f} * \mathbf{g}$ *și un ideal bilateral al algebrei* $\mathcal{M}_A^c$ *a măsurilor cu suport compact.*

Se folosește propoziția 21, § 24.

Observație. Pentru simplificarea scrisului, în continuare nu vom distinge între două funcții egale aproape peste tot pe G și vom nota o clasă de echivalență $\dot{\mathbf{f}}$ tot cu $\mathbf{f}$. Din text va reieși de fiecare dată, clar, dacă $\mathbf{f}$ reprezintă o funcție (scriind, de exemplu, $\mathbf{f} \in \mathcal{L}_A^1$) sau dacă $\mathbf{f}$ reprezintă o clasă de echivalență (scriind $\mathbf{f} \in L_A^1$).

Propoziția 6. *Dacă G este discret, atunci $L_A^1 = \mathcal{M}_A^1$ și L_A^1 are unitate. Reciproc, dacă L^1 are unitate, atunci G este discret.*

Să presupunem că G este discret. Atunci punctele sînt mulțimi deschise și au aceeași măsură. Putem presupune că fiecare punct are măsura 1. Atunci măsura ε_e este de bază măsura Haar dx și densitate funcția u definită pe G astfel : $u(e) = 1$ și $u(x) = 0$ dacă $x \neq e$. Într-adevăr, pentru orice funcție $\varphi \in \mathcal{K}(G)$ avem

$$\varepsilon_e(\varphi) = \varphi(e) = \sum_{x \in G} \varphi(x)\, u(x) = \int \varphi(x)\, u(x)\, dx$$

deci $d\varepsilon_e = u(x)\, dx$ și deci $\varepsilon_e \in L_A^1$. Deoarece L_A^1 este ideal în $\mathcal{M}_A^1$ și conține elementul unitate, deducem că $L_A^1 = \mathcal{M}_A^1$.

Reciproc, să presupunem că L^1 are unitate pentru produsul de convoluție. Aceasta înseamnă că există o funcție $u \in \mathcal{L}^1$ astfel încît pentru orice funcție $f \in \mathcal{L}^1$ să avem

$(u * f)(x) = f(x)$ și $(f * u)(x) = f(x)$ aproape peste tot.

Să arătăm că există un număr $a > 0$ astfel încît măsura oricărei mulțimi deschise să fie $\geqslant a$. Să presupunem, prin absurd, că nu există un asemenea număr $a > 0$. Aceasta înseamnă că pentru orice număr $a > 0$ există o vecinătate deschisă V a lui e cu măsura $< a$.

Fie $\varepsilon > 0$. Putem găsi o vecinătate deschisă V a lui e astfel încît să avem $\int_V |u(x)|\, dx < \varepsilon$. Într-adevăr, pentru fiecare n putem găsi o vecinătate deschisă V_n a lui e, cu măsura $< \frac{1}{n}$, astfel încît $V_{n+1} \subset V_n$ pentru fiecare n. Atunci mulțimea $\bigcap_n V_n$ este neglijabilă, deci șirul funcțiilor caracteristice φ_{V_n} este descrescător și converge către 0 aproape peste tot. Urmează că șirul $(|u|\, \varphi_{V_n})$ este descrescător și converge către 0 aproape peste tot, deci

$$\int_{V_n} |u(x)|\, dx \to 0.$$

Există atunci un n astfel încît pentru $V = V_n$ să avem

$$\int_V |u(x)|\, dx < \varepsilon.$$

Să luăm o vecinătate simetrică U a lui e cu $U^2 \subset V$. Pentru funcția sa caracteristică φ_U avem $\varphi_U(z) = \varphi_U(z^{-1})$ și

$$\varphi_U(y) = (u * \varphi_U)(y) = \int u(x)\, \varphi_U(x^{-1}y)\, dx = \int u(x)\, \varphi_U(y^{-1}x)\, dx =$$

$$= \int u(x)\, \varphi_{yU}(x)\, dx \leqslant \int_V |u|(x)\, dx < \varepsilon$$

aproape pentru orice y, ceea ce este în contradicție cu $\varphi_U(y) = 1$ pentru $y \in U$.

Aşadar există un număr $a > 0$ astfel încît măsura oricărei mulţimi deschise să fie $\geqslant a$.

Rezultă că orice mulţime deschisă integrabilă U conţine numai un număr finit de puncte. Într-adevăr, dacă U ar conţine un şir (x_n), atunci pentru fiecare n putem separa punctele $x_1, \ldots, x_n$ prin mulţimi deschise disjuncte $V_1, \ldots, V_n$ conţinute în U. Cum fiecare V_n are măsura $\geqslant a$, ar rezulta că U are măsura $\geqslant na$ oricare ar fi n, adică U are măsura $+\infty$ şi am ajuns la o contradicţie.

În particular, orice mulţime deschisă relativ compactă este de forma $U = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$. Deoarece G este separat, fiecare punct este o mulţime închisă. Mulţimea $G - \{x_1\} = \{x_2, \ldots, x_n\} \cup \complement U$ este închisă, deci $\{x_1\}$ este o mulţime deschisă. La fel se arată că punctele $x_2, \ldots, x_n$ sînt deschise. Cum fiecare punct $x \in G$ este conţinut într-o mulţime deschisă relativ compactă, rezultă că fiecare punct este o mulţime deschisă, deci G este discret.

3. Algebre cu involuţie

Aici vom presupune că pe algebra A este definită o involuţie $x \to \bar{x}$ cu $|\bar{x}| = |x|$.

Dacă pentru fiecare măsură $\mathbf{m} \in \mathscr{M}_A^1$ considerăm măsura $\bar{\mathbf{m}}$ definită prin egalităţile

$$\bar{\mathbf{m}}(\varphi) = \overline{\mathbf{m}(\bar{\varphi})}, \text{ pentru } \varphi \in \mathscr{K}(G),$$

aplicaţia $\mathbf{m} \to \bar{\mathbf{m}}$ are următoarele proprietăţi:

1) $\overline{\mathbf{m} + \mathbf{n}} = \bar{\mathbf{m}} + \bar{\mathbf{n}}$;

2) $\overline{\alpha \mathbf{m}} = \bar{\alpha}\,\bar{\mathbf{m}}$, α *scalar*;

3) $\bar{\bar{\mathbf{m}}} = \mathbf{m}$;

4) $\overline{\mathbf{m} * \mathbf{n}} = \bar{\mathbf{m}} * \bar{\mathbf{n}}$;

5) $|\bar{\mathbf{m}}| = |\mathbf{m}|$;

6) $\overline{\mathbf{m}(\bar{\mathbf{f}})} = \bar{\mathbf{m}}(\mathbf{f})$, pentru $\mathbf{f} \in \mathscr{L}_A^1(\mathbf{m})$.

Să demonstrăm proprietatea 4): pentru $\varphi \in \mathscr{K}(G)$ avem

$$\overline{\mathbf{m} * \mathbf{n}}(\varphi) = \overline{(\mathbf{m} * \mathbf{n})(\bar{\varphi})} = \overline{\iint \varphi(xy)\, d\mathbf{m}(x)\, d\mathbf{n}(y)} =$$

$$= \int d\mathbf{m}(x) \overline{\int \varphi(xy)\, d\mathbf{n}(y)} = \int d\bar{\mathbf{m}}(x) \overline{\int \varphi(xy)\, d\mathbf{n}(y)} =$$

$$= \int d\bar{\mathbf{m}}(x) \int \varphi(xy)\, d\bar{\mathbf{n}}(y) = \iint \varphi(xy)\, d\bar{\mathbf{m}}(x)\, d\bar{\mathbf{n}}(y) = (\bar{\mathbf{m}} * \bar{\mathbf{n}})(\varphi).$$

Rezultă că dacă G este comutativ, atunci algebra $\mathscr{M}_A^1$ este comutativă deci aplicația $\mathbf{m} \to \overline{\mathbf{m}}$ este o involuție pe $\mathscr{M}_A^1$.

Dacă însă G nu este comutativ, atunci nu avem $\overline{\mathbf{m} * \mathbf{n}} = \overline{\mathbf{n}} * \overline{\mathbf{m}}$ și deci aplicația $\mathbf{m} \to \overline{\mathbf{m}}$ nu este o involuție pe $\mathscr{M}_A^1$.

Vom defini acum o altă aplicație pe $\mathscr{M}_A^1$ care să fie involuție.

Fie μ o măsură *pozitivă* pe G. Să definim aplicația $\widetilde{\mu} : \mathscr{K}(G) \to R$ prin egalitatea

$$\widetilde{\mu}(\varphi) = \mu(\check{\varphi}), \text{ pentru } \varphi \in \mathscr{K}(G).$$

Se verifică ușor că $\widetilde{\mu}$ este *additivă* și *pozitivă*, deci $\widetilde{\mu}$ este o măsură pozitivă pe G.

Dacă $\mu \leqslant \nu$, atunci $\widetilde{\mu} \leqslant \widetilde{\nu}$.

Propoziția 7. *Pentru orice funcție $f \geqslant 0$ definită pe G avem*

$$\int^* f(x)\, d\widetilde{\mu}(x) = \int^* f(x^{-1})\, d\mu(x).$$

Într-adevăr, funcția $\alpha(x) = x^{-1}$ este un omeomorfism al lui G pe G deci α este o funcție μ-proprie. Avem $\check{h}(x) = h(\alpha(x))$ pentru orice funcție h definită pe G deci

$$\int \varphi(x)\, d\widetilde{\mu}(x) = \int \varphi(x^{-1})\, d\mu(x) = \int \varphi \circ \alpha\, d\mu = \int \varphi\, d\,\alpha(\mu).$$

pentru orice funcție $\varphi \in \mathscr{K}(G)$. Urmează că $\widetilde{\mu} = \alpha(\mu)$. Se aplică apoi propoziția 1 din § 20.

Propoziția 8. *Fie E un spațiu Banach și $\mathbf{f} : G \to E$ o funcție:*

1) *funcția $\mathbf{f}$ este $\widetilde{\mu}$-neglijabilă dacă și numai dacă funcția $\check{\mathbf{f}}$ este μ-neglijabilă;*

2) *funcția $\mathbf{f}$ este $\widetilde{\mu}$-măsurabilă dacă și numai dacă funcția $\check{\mathbf{f}}$ este μ-măsurabilă;*

3) *funcția $\mathbf{f}$ este $\widetilde{\mu}$-integrabilă dacă și numai dacă funcția $\check{\mathbf{f}}$ este μ-integrabilă. În acest caz avem*

$$\int \mathbf{f}(x)\, d\widetilde{\mu}(x) = \int \check{\mathbf{f}}(x)\, d\mu(x) = \int \mathbf{f}(x^{-1})\, d\mu(x).$$

Se aplică propoziția 2, propoziția 3 și teorema 1 din § 20, pentru funcția μ-proprie $\alpha(x) = x^{-1}$.

Corolar. *Avem $\mathbf{f} \in \mathscr{L}_E^p(\widetilde{\mu})$, $1 \leqslant p \leqslant +\infty$, dacă și numai dacă $\check{\mathbf{f}} \in \mathscr{L}_E^p(\mu)$. În acest caz avem*

$$N_p(\mathbf{f}, \widetilde{\mu}) = N_p(\check{\mathbf{f}}, \mu).$$

Pentru orice măsură majorată $\mathbf{m} : \mathscr{K}(G) \to A$ să definim aplicația $\widetilde{\mathbf{m}} : \mathscr{K}(G) \to A$ prin egalitatea

$$\widetilde{\mathbf{m}}(\varphi) = \overline{\mathbf{m}}(\check{\varphi}) = \overline{\mathbf{m}(\check{\varphi})}, \text{ pentru } \varphi \in \mathscr{K}(G).$$

Se verifică uşor că $\mathbf{m}$ este liniară. Avem

$$|\widetilde{\mathbf{m}}|(\varphi) = \left|\overline{\mathbf{m}(\check{\varphi})}\right| = |\mathbf{m}(\check{\varphi})| \leqslant |\mathbf{m}|(\check{\varphi}) = \widetilde{|\mathbf{m}|}(\varphi).$$

deci $\widetilde{\mathbf{m}}$ este o măsură majorată de măsura pozitivă $\widetilde{|\mathbf{m}|}$. Aşadar $|\widetilde{\mathbf{m}}| \leqslant \widetilde{|\mathbf{m}|}$.

Dacă $\mathbf{m}$ este mărginită, atunci $\widetilde{\mathbf{m}}$ este mărginită.

Propoziţia 9. *Aplicaţia* $\mathbf{m} \to \widetilde{\mathbf{m}}$ *este o involuţie pe* $\mathscr{M}_A^1$ *şi* $|\widetilde{\mathbf{m}}| = \widetilde{|\mathbf{m}|}$.

Într-adevăr, se verifică imediat proprietăţile următoare :

1) $\widetilde{\mathbf{m} + \mathbf{n}} = \widetilde{\mathbf{m}} + \widetilde{\mathbf{n}}$;

2) $\widetilde{\alpha\mathbf{m}} = \bar{\alpha}\,\widetilde{\mathbf{m}}$;

3) $\widetilde{\widetilde{\mathbf{m}}} = \mathbf{m}$.

Rămîne să demonstrăm că

4) $\widetilde{\mathbf{m} * \mathbf{n}} = \widetilde{\mathbf{n}} * \widetilde{\mathbf{m}}$;

5) $|\widetilde{\mathbf{m}}| = \widetilde{|\mathbf{m}|}$.

Ultima egalitate rezultă astfel : avem $|\widetilde{\mathbf{m}}| \leqslant \widetilde{|\mathbf{m}|}$ şi $|\mathbf{m}| = |\widetilde{\widetilde{\mathbf{m}}}| \leqslant$ $\leqslant \widetilde{|\widetilde{\mathbf{m}}|}$ de unde $\widetilde{|\mathbf{m}|} \leqslant |\widetilde{\widetilde{\mathbf{m}}}| = |\widetilde{\mathbf{m}}|$ şi deci $|\widetilde{\mathbf{m}}| = \widetilde{|\mathbf{m}|}$.

Fie $\varphi \in \mathscr{K}(G)$. Avem

$$\overline{\mathbf{m}*\mathbf{n}}(\varphi) = \overline{\mathbf{m}*\mathbf{n}(\check{\varphi})} = \overline{\iint \check{\varphi}(xy)\,d\mathbf{m}(x)\,d\mathbf{n}(y)} = \overline{\int d\mathbf{m}(x) \int \varphi(y^{-1}x^{-1})\,d\mathbf{n}(y)} =$$

$$= \int d\overline{\mathbf{m}}(x) \overline{\int \varphi(y^{-1}x^{-1})\,d\mathbf{n}(y)} = \int d\overline{\mathbf{m}}(x) \int \varphi(yx^{-1})\,d\widetilde{\mathbf{n}}(y) =$$

$$= \int d\widetilde{\mathbf{m}}(x) \int \varphi(yx)\,d\widetilde{\mathbf{n}}(y) = \int \varphi(yx)\,d\widetilde{\mathbf{n}}(y)\,d\widetilde{\mathbf{m}}(x) = (\widetilde{\mathbf{n}} * \widetilde{\mathbf{m}})(\varphi),$$

de unde $\widetilde{\mathbf{m}*\mathbf{n}} = \widetilde{\mathbf{n}} * \widetilde{\mathbf{m}}$ şi propoziţia este demonstrată.

Observaţie. Dacă $\mathbf{m} : \mathscr{K}(G) \to A$ este o măsură, nu neapărat majorată, atunci $\widetilde{\mathbf{m}}$ este de asemenea o măsură. Într-adevăr, fie $K \subset G$ o mulţime compactă şi fie $a_{K^{-1}} > 0$ astfel încît

$$|\mathbf{m}(h)| \leqslant a_{K^{-1}} \|h\|, \text{ pentru } h \in \mathscr{K}(G, K^{-1}).$$

Pentru orice funcţie $\varphi \in \mathscr{K}(G, K)$ avem atunci $\check{\varphi} \in \mathscr{K}(G, K^{-1})$, deci

$$|\widetilde{\mathbf{m}}(\varphi)| = \left|\overline{\mathbf{m}(\check{\varphi})}\right| = |\mathbf{m}(\check{\varphi})| \leqslant a_{K^{-1}} \|\check{\varphi}\| = a_{K^{-1}} \|\varphi\|$$

adică $\widetilde{\mathbf{m}}$ este o măsură pe G.

Proprietăţile 1), 2) şi 3) din propoziţia 9 rămîn adevărate pentru orice măsuri, nu neapărat majorate, iar proprietatea 5) rămîne adevărată pentru orice măsură majorată $\mathbf{m}$, nu neapărat mărginită.

Propoziția 10. *Fie* $\mathbf{m} : \mathcal{K}(G) \to A$ *o măsură majorată și* $\mathbf{f} : G \to A$ *o funcție :*

1) *funcția* $\mathbf{f}$ *este* $\widetilde{\mathbf{m}}$*-neglijabilă dacă și numai dacă* $\check{\mathbf{f}}$ *este* $\mathbf{m}$*-neglijabilă ;*

2) *funcția* $\mathbf{f}$ *este* $\widetilde{\mathbf{m}}$*-măsurabilă dacă și numai dacă* $\check{\mathbf{f}}$ *este* $\mathbf{m}$*-măsurabilă ;*

3) *funcția* $\mathbf{f}$ *este* $\widetilde{\mathbf{m}}$*-integrabilă, dacă și numai dacă funcția* $\check{\mathbf{f}}$ *este* $\mathbf{m}$*-integrabilă. În acest caz avem*

$$\int \mathbf{f}(x)\, d\widetilde{\mathbf{m}}(x) = \overline{\int \check{\mathbf{f}}(x)\, d\mathbf{m}(x)} = \overline{\int \mathbf{f}(x^{-1})\, d\mathbf{m}(x)}.$$

Într-adevăr, deoarece $|\widetilde{\mathbf{m}}| = \widetilde{|\mathbf{m}|}$, dacă $\mathbf{f}$ este $\widetilde{\mathbf{m}}$-neglijabilă, adică $|\widetilde{\mathbf{m}}|$-neglijabilă, atunci $\mathbf{f}$ este $\widetilde{|\mathbf{m}|}$-neglijabilă și, conform propoziției 8, $\check{\mathbf{f}}$ este $|\mathbf{m}|$-neglijabilă adică $\mathbf{m}$-neglijabilă. Reciproc, dacă $\check{\mathbf{f}}$ este $\mathbf{m}$-neglijabilă, rezultă că $\mathbf{f}$ este $\mathbf{m}$-neglijabilă.

Celelalte două proprietăți se demonstrează la fel.

Egalitatea $\widetilde{\mathbf{m}}(\mathbf{f}) = \overline{\mathbf{m}(\check{\mathbf{f}})}$ pentru $\mathbf{f} \in \mathcal{L}^1_A(\widetilde{\mathbf{m}})$ se deduce din corolarul 4 al propoziției 12, § 20, și din teorema 6, § 22, observînd că α este biunivocă și că $\widetilde{\mathbf{m}} = \alpha(\overline{\mathbf{m}})$.

Pentru orice funcție $\mathbf{f} : G \to A$ să punem

$$\widetilde{\mathbf{f}} = \overline{\check{\mathbf{f}}}\,\check{\Delta}.$$

Observație. Nu trebuie să se confunde funcția $\widetilde{\mathbf{f}} = \overline{\check{\mathbf{f}}}\,\check{\Delta}$ cu clasa de echivalență a funcției $\mathbf{f}$, care a fost notată în § 6 tot cu $\widetilde{\mathbf{f}}$. Vom folosi adesea și notația $\mathbf{f}^* = \overline{\check{\mathbf{f}}}\,\check{\Delta}$.

Propoziția 11. *Dacă* $\mathbf{f}$ *este local integrabilă și* $\mathbf{m} = \mathbf{f}\, dx$, *atunci* $\widetilde{\mathbf{f}}$ *este local integrabilă și* $\widetilde{\mathbf{m}} = \widetilde{\mathbf{f}}\, dx$.

Într-adevăr, dacă $\varphi \in \mathcal{K}(G)$, atunci $\check{\varphi} \in \mathcal{K}(G)$ deci $\check{\varphi}\,\mathbf{f} \in \mathcal{L}^1_A$ deci (prop. 17, § 23) $\varphi\,\overline{\check{\mathbf{f}}}\,\check{\Delta} \in \mathcal{L}^1_A$ și deci (teorema 6, § 8) $\varphi\widetilde{\mathbf{f}} = \varphi\,\overline{\check{\mathbf{f}}}\,\check{\Delta} = \overline{\varphi\,\check{\mathbf{f}}\,\check{\Delta}} \in \mathcal{L}^1_A$. Urmează că $\widetilde{\mathbf{f}}$ este local integrabilă. Avem atunci

$$\widetilde{\mathbf{m}}(\varphi) = \overline{\mathbf{m}(\check{\varphi})} = \overline{\int \varphi(x^{-1})\, d\mathbf{m}(x)} = \int \varphi\ (x^{-1})\ \overline{\mathbf{f}(x)}\, dx =$$

$$= \int \varphi\,(x)\, \overline{\mathbf{f}(x^{-1})}\ \Delta\,(x^{-1})\, dx = \int \varphi\,(x)\, \widetilde{\mathbf{f}}\,(x)\, dx$$

deci $\widetilde{\mathbf{m}} = \widetilde{\mathbf{f}}\, dx$ și propoziția este demonstrată.

Propoziția 12. *Pentru orice funcție* $f \geqslant 0$ *avem*

$$\int^* \widetilde{f}(x)\ dx = \int^* f(x)\ dx.$$

Într-adevăr, această egalitate este o altă formă în care se scrie egalitatea (prop. 16, § 23)

$$\int^* f(x^{-1})\ \Delta(x^{-1})\ \mathrm{d}x = \int^* f(x)\ \mathrm{d}x.$$

Propoziția 13. *Fie funcția* $\mathbf{f} : G \to A$:
1) *funcția* $\mathbf{f}$ *este neglijabilă dacă și numai dacă* $\mathbf{f}^*$ *este neglijabilă*;
2) *funcția* $\mathbf{f}$ *este măsurabilă, dacă și numai dacă* $\mathbf{f}^*$ *este măsurabilă.*
3) *funcția* $\mathbf{f}$ *este integrabilă dacă și numai dacă* $\mathbf{f}^*$ *este integrabilă.*
În acest caz avem

$$\int \mathbf{f}^*(x)\ \mathrm{d}x = \int \mathbf{f}(x)\ \mathrm{d}x.$$

Se folosește propoziția 17, § 23, egalitatea $\mathbf{f}^* = \check{\mathbf{f}}\,\check{\Delta}$ și teorema 6, § 8.

Corolar. *Avem* $\mathbf{f} \in \mathcal{L}^p_A$, $1 \leqslant p \leqslant +\infty$, *dacă și numai dacă* $\mathbf{f}^* \in \mathcal{L}^p_A$. *Dacă* $\mathbf{f}^* \in \mathcal{L}^p_A$ *avem* $N_p(\mathbf{f}^*) = N_p(\mathbf{f})$.

Se verifică ușor că aplicația $\mathbf{f} \to \mathbf{f}^*$ este o involuție pe fiecare *spațiu vectorial* $\mathcal{L}^p_A$:
1) $(\mathbf{f} + \mathbf{g})^* = \mathbf{f}^* + \mathbf{g}^*$;
2) $(\alpha\mathbf{f})^* = \bar{\alpha}\mathbf{f}^*$;
3) $\mathbf{f}^{**} = \mathbf{f}$;
4) $N_p(\mathbf{f}^*) = N_p(\mathbf{f})$.

Pentru fiecare funcție $\mathbf{f} : G \to A$ să punem

$$\dot{\mathbf{f}}^* = \dot{\overline{\mathbf{f}^*}}.$$

Din propoziția 13 deducem că $\dot{\mathbf{f}}^*$ nu depinde de funcția $\mathbf{f}$ ci numai de clasa de echivalență $\dot{\mathbf{f}}$.

Propoziția 14. *Aplicația* $\dot{\mathbf{f}} \to \dot{\mathbf{f}}^*$ *este o involuție pe algebra* L^1_A.

Într-adevăr (prop. 11), dacă $\mathbf{f} \in L^1_A$ și dacă $\mathbf{m} = \mathbf{f}\,\mathrm{d}x$, atunci $\widetilde{\mathbf{m}} = \widetilde{\mathbf{f}}\,\mathrm{d}x = \mathbf{f}^*\,\mathrm{d}x$, deci aplicația $\dot{\mathbf{f}} \to \dot{\mathbf{f}}^*$ este restricția pe subalgebra L^1_A a involuției $\mathbf{m} \to \widetilde{\mathbf{m}}$ de pe algebra M^1_A.

Observație. Conform unei convenții anterioare, vom scrie $\mathbf{f}$ în loc de $\dot{\mathbf{f}}$ și $\mathbf{f}^*$ în loc de $\dot{\mathbf{f}}^*$. Conform propoziției 11, involuția $\mathbf{f} \to \mathbf{f}^*$ este restricția pe L^1_A a involuției $\mathbf{m} \to \widetilde{\mathbf{m}}$ de pe $\mathcal{M}^1_A$.

§ 26. REPREZENTĂRI

1. Reprezentările grupului G

Se numește *reprezentare* a grupului G într-o algebră A cu unitate, orice funcție $U : G \to A$ astfel încît

$$U_{st} = U_s\,U_t \text{ pentru } s,\ t \in G \text{ și } U_e = 1.$$

unde am notat cu 1 elementul unitate din A.

Dacă, în plus, A este o algebră de operatori pe un spațiu Hilbert și dacă U_s sînt *operatori unitari*, spunem că U este o *reprezentare unitară*.

În continuare vom presupune că A este o algebră Banach cu unitate.

Propoziția 1. *Dacă U este o reprezentare a grupului G în A, atunci U_s este inversibil pentru orice $s \in G$ și*

$$U_s^{-1} = U_{s^{-1}}.$$

Într-adevăr, pentru orice $s \in G$ avem

$$1 = U_e = U_{ss^{-1}} = U_s U_{s^{-1}} \quad \text{și} \quad 1 = U_e = U_{s^{-1}s} = U_{s^{-1}} U_s$$

deci U_s este inversibil și $U_s^{-1} = U_{s^{-1}}$.

Propoziția 2. *Fie $U : G \to A$ o aplicație astfel încît $U_{st} = U_s U_t$ pentru orice s și t din G. Dacă există $s_0 \in G$ astfel încît U_{s_0} este inversibil, atunci U este o reprezentare.*

Este suficient să arătăm că $U_e = 1$. Avem

$$U_{s_0} = U_{s_0 e} = U_{s_0} U_e$$

și înmulțind la stînga cu $U_{s_0}^{-1}$ obținem $1 = U_e$.

Propoziția 3. *Dacă U este o reprezentare mărginită a lui G în A, atunci*

$$|U_s| \geqslant 1 \text{ pentru orice } s \in G.$$

Fie $\alpha = \|U\| = \sup_{s \in G} |U_s|$. Deoarece $|U_e| = |1| = 1$, avem $\alpha \geqslant 1$.

Să presupunem, prin absurd, că ar exista $a \in G$ cu $|U_a| < 1$. Atunci $|U_a|^n \to 0$, deci există un număr N astfel încît

$$|U_a|^N < \frac{1}{\alpha}.$$

Dar

$$|U_{a^N}| = |U_a^N| \leqslant |U_a|^N < \frac{1}{\alpha}$$

și

$$|U_{a^{-N}}|\,|U_{a^N}| \geqslant |U_{a^{-N}} U_{a^N}| = |U_e| = 1,$$

deci

$$|U_{a^{-N}}| > \frac{1}{|U_{a^N}|} > \alpha,$$

ceea ce este în contradicție cu inegalitatea $|U_s| \leqslant \alpha$ pentru orice $s \in G$. Așadar, $|U_s| \geqslant 1$ pentru orice $s \in G$.

Observații. 1° Concluzia propoziției rămîne adevărată dacă U este mărginită, $U_{st} = U_s U_t$ pentru orice s, $t \in G$ și $U_e \neq 0$ (dar nu neapărat $U_e = 1$). În demonstrație se înlocuiește α cu $\alpha\,|U_e|$.

2° Dacă, în plus, $|U_s^n| = |U_s|^n$ pentru orice $s \in G$ și orice număr natural n, atunci $|U_s| \equiv 1$.

Într-adevăr, dacă ar exista $a \in G$ cu $|U_a| > 1$, atunci $|U_{a^n}| = |U_a|^n \to +\infty$ și U n-ar mai fi mărginită.

3° Vom arăta că dacă U este continuă şi mărginită şi dacă G este comutativ, atunci avem $|U_s| \equiv 1$.

Exemple. Fie $1 \leqslant p \leqslant +\infty$ şi $\mathbf{f} \in L_E^p$.

Reprezentarea regulată la stînga

$$U_s \mathbf{f} = \mathbf{f}_{s^{-1}}$$

şi reprezentarea regulată la dreapta

$$V_s \mathbf{f} = \mathbf{f}^{s^{-1}}$$

sînt reprezentări ale grupului G în algebra $A = \mathcal{L}(L_E^p)$ şi avem

$$|U_s| \equiv 1 \quad \text{şi} \quad |V_s| = \Delta(s^{-1})^{\frac{1}{p}}.$$

Dacă $1 \leqslant p < +\infty$, aceste reprezentări sînt *simplu continue* (corolarul prop. 7, şi corolarul prop. 14, § 24), adică pentru fiecare $\mathbf{f} \in L_E^p$, aplicaţiile $s \to U_s \mathbf{f}$ şi $s \to V_s \mathbf{f}$ ale lui G în L_E^p sînt continue, şi avem $\|U_s f\|_p = \|\mathbf{f}\|_p$ şi $\|V_s \mathbf{f}\|_p = \Delta(s^{-1})^{\frac{1}{p}} \|\mathbf{f}\|_p$.

Dacă H este un spaţiu Hilbert, atunci L_H^2 este un spaţiu Hilbert pentru produsul scalar

$$< \mathbf{f}, \mathbf{g} > = \int < \mathbf{f}(x), \mathbf{g}(x) > \mathrm{d}x.$$

În acest caz reprezentarea regulată la stînga U este o *reprezentare unitară*. Într-adevăr, pentru fiecare $s \in G$ avem

$$< U_s \mathbf{g}, U_s \mathbf{h} > = \int < \mathbf{g}(s^{-1}x), \mathbf{h}(s^{-1}x) > \mathrm{d}x = \int < \mathbf{g}(x), \mathbf{h}(x) > \mathrm{d}x = < \mathbf{g}, \mathbf{h} >,$$

pentru $\mathbf{g}, \mathbf{h} \in L_H^2$, deci U_s este un operator unitar.

2. Reprezentările algebrei L^1

Vom numi *reprezentare* a unei algebre A_1 într-o algebră A_2 orice aplicaţie liniară şi multiplicativă $T : A_1 \to A_2$:

$$T_{a+b} = T_a + T_b, \quad T_{\alpha a} = \alpha T_a, \quad T_{ab} = T_a T_b.$$

Dacă A_1 şi A_2 sînt algebre involutive, spunem că o reprezentare $T : A_1 \to A_2$ este *simetrică* dacă

$$T_{a^*} = T_a^* \text{ pentru orice } a \in A_1.$$

Fie A o algebră Banach cu unitate.

Propoziţia 4. *Dacă A este comutativă şi dacă $U : G \to A$ este o reprezentare măsurabilă şi mărginită, atunci aplicaţia $T : L_A^1 \to A$ definită prin egalitatea*

$$T_{\mathbf{f}} = \int U_s \mathbf{f}(s)\, \mathrm{d}s, \quad \textit{pentru } \mathbf{f} \in L_A^1,$$

este o reprezentare continuă și avem

$$\|T\| = \|T\|_\infty \quad \text{și} \quad T(L_A^1) = A.$$

Să observăm că $U \in L_A^\infty$ deci integrala din enunț există pentru orice $\mathbf{f} \in L_A^1$. Liniaritatea aplicației $\mathbf{f} \to T_\mathbf{f}$ se verifică imediat. Mai mult, avem

$$T_{a\mathbf{f}} = a\ T_\mathbf{f} \text{ pentru } \mathbf{f} \in L_A^1 \text{ și } a \in A.$$

Această aplicație este continuă:

$$|T_\mathbf{f}| = \left|\int U_s\, \mathbf{f}(s)\, ds\right| \leqslant \int |U_s|\, |\mathbf{f}(s)|\, ds \leqslant \|U\|_\infty\, \|\mathbf{f}\|_1.$$

Egalitatea $\|T\| = \|U\|_\infty$ rezultă din teorema 11, § 18, deoarece U este local integrabilă.

Fie acum $\mathbf{f}$ și $\mathbf{g}$ două funcții din $\mathcal{L}_A^1$. Modificînd aceste funcții pe o mulțime neglijabilă, ceea ce nu modifică operatorii $T_\mathbf{f}$ și $T_\mathbf{g}$, putem presupune că $\mathbf{f}$ și $\mathbf{g}$ sînt nule pe complementara reuniunii unui șir de mulțimi compacte din G.

Funcția $\mathbf{f}(t)\, \mathbf{g}(s)$ este integrabilă pentru $dt\, ds$, deci funcția $\mathbf{f}(t)\, \mathbf{g}(t^{-1}s)$ este integrabilă pentru $dt\, ds$, deci funcția $U_s\, \mathbf{f}(t)\, \mathbf{g}(t^{-1}s)$ este integrabilă pentru $dt\, ds$. Înlocuind s cu ts deducem că funcția $U_{ts}\, \mathbf{f}(t)\, \mathbf{g}(s)$ este integrabilă și

$$\iint U_s\, \mathbf{f}(t)\, \mathbf{g}(t^{-1}s)\, dt\, ds = \iint U_{ts}\, \mathbf{f}(t)\, \mathbf{g}(s)\, dt\, ds.$$

Aplicînd teorema lui Fubini — deoarece funcțiile din aceste integrale sînt nule pe complementara reuniunii unui șir de mulțimi compacte din $G \times G$ — obținem

$$T_{\mathbf{f}*\mathbf{g}} = \int U\, \mathbf{f}*\mathbf{g}(s)\, ds = \int U_s\, ds \int \mathbf{f}(t)\, \mathbf{g}(t^{-1}s)\, dt = \iint U_s\, \mathbf{f}(t)\, \mathbf{g}(t^{-1}s)\, dt\, ds =$$

$$= \iint U_{st}\, \mathbf{f}(t)\, \mathbf{g}(s)\, dt\, ds = \iint U_s\, U_t\, \mathbf{f}(t)\, \mathbf{g}(s)\, dt\, ds$$

$$= \int U_t \mathbf{f}(t)\, dt \int U_s\, \mathbf{g}(s)\, ds = T_\mathbf{f}\, T_\mathbf{g}.$$

Rămîne de arătat că $T(L_A^1) = A$. Fie $a \in A$. Există o funcție $\varphi \in \mathcal{K}(G)$ astfel încît $\int \varphi(s)\, ds = 1$ deci $\int \varphi(s)\, ds = e$. Funcția $s \to U_s^{-1}$ este măsurabilă și mărginită, deci funcția $s \to \mathbf{f}(s) = a\ \varphi(s)\ U_s^{-1}$ este integrabilă. Avem

$$T_\mathbf{f} = \int U_s\, \mathbf{f}(s)\, ds = a \int e\, U_s\, \varphi(s)\, U_s^{-1}\, ds = a \int \varphi(s)\, ds = a.$$

Așadar $T(L_A^1) = A$, și propoziția este demonstrată.

Observații. 1° Există o funcție $\mathbf{g} \in \mathcal{K}_A(G)$ astfel încît $T_{\mathbf{g}}^{-1}$ există. Într-adevăr, deoarece $T(L_A^1) = A$, există o funcție $\mathbf{f} \in L_A^1$ astfel încît $T_{\mathbf{f}}^{-1}$ există. Există atunci o vecinătate V a lui $T_{\mathbf{f}}$ astfel încît pentru orice $a \in V$ există a^{-1}. Deoarece T este continuă, $U = T^{-1}(V)$ este o vecinătate a lui $\mathbf{f}$, deci există $\mathbf{g} \in U \cap \mathcal{K}_A(G)$. Atunci $T_{\mathbf{g}} \in V$ și deci $T_{\mathbf{g}}^{-1}$ există.

2° Dacă G este *comutativ*, vom arăta că orice reprezentare continuă $T : L_A^1 \to A$ astfel încît $T(L_A^1) = A$, se poate obține ca mai sus dintr-o reprezentare continuă și mărginită $U : G \to A$ iar T se poate prelungi în mod unic la o reprezentare pe $\mathcal{M}_A^1$.

Propoziția 5. *Dacă $U : G \to A$ este o reprezentare continuă și mărginită, atunci aplicația $T : \mathcal{M}_A^1 \to A$ definită prin egalitatea*

$$T_{\mathbf{m}} = \int U_s \, \mathbf{dm}(s), \text{ pentru } \mathbf{m} \in \mathcal{M}_A^1$$

este o reprezentare continuă și $\|T\| = \|U\|_\infty$.

Să observăm că funcția continuă și mărginită U_s este integrabilă în raport cu fiecare măsură mărginită $\mathbf{m} \in \mathcal{M}_A^1$. Se verifică ușor că T este liniară. Avem

$$|T_{\mathbf{m}}| = \left| \int U_s \, \mathbf{dm}(s) \right| \leqslant \int |U_s| \, \mathrm{d}|\mathbf{m}| \leqslant \|U\|_\infty \, \||\mathbf{m}|\|$$

deci T este continuă și $\|T\| \leqslant \|U\|_\infty$. Pentru restricția T_0 a lui T la L_A^1 avem $\|T_0\| \leqslant \|T\|$, iar pe de altă parte, conform propoziției 4, $\|T_0\| = \|U\|_\infty$. Urmează că $\|T\| = \|U\|_\infty$.

Dacă $\mathbf{m}, \mathbf{n} \in \mathcal{M}_A^1$ atunci aplicînd teorema 5, § 22, obținem

$$T_{\mathbf{m} * \mathbf{n}} = \int U_s \, \mathbf{dm} * \mathbf{n} = \iint U_{st} \, \mathbf{dm}(s) \, \mathbf{dn}(t) = \iint U_s \, U_t \, \mathbf{dm}(s) \, \mathbf{dn}(t) =$$

$$= \int U_s \, \mathbf{dm}(s) \int U_t \, \mathbf{dn}(t) = T_{\mathbf{m}} \, T_{\mathbf{n}}$$

deci T este o reprezentare.

Observație. Propoziția rămîne adevărată dacă U este măsurabilă în raport cu fiecare măsură mărginită, în particular, dacă U este o funcție boreliană.

3. Reprezentări slab măsurabile

Fie E un spațiu Banach. Putem considera reprezentări cu valori în algebra $\mathcal{L}(E)$. În acest caz putem studia reprezentările simplu măsurabile sau slab măsurabile.

Vom preciza mai întîi un rezultat anterior (corolarul teoremei 11, § 18).

Propoziția 6. *Fie* $U : G \to \mathcal{L}(E)$ *o funcție slab măsurabilă și mărginită. Există o aplicație liniară și continuă* $T : L^1 \to \mathcal{L}(E, E'')$ *astfel încît să avem*

$$< T_f x, x' > = \int f(s) < U_s x, x' > \mathrm{d}s, \text{ pentru } f \in L^1, x \in E \text{ și } x' \in E'$$

și

$$\| T \| \leqslant \| U \|_\infty .$$

Avem egalitatea $\| T \| = \| U \|_\infty$ *în fiecare din următoarele cazuri:*

1) *există o ridicare* ρ *a lui* $\mathcal{L}^\infty(G)$ *astfel încît* $\rho(U) = U$.

2) *E este de tip numărabil. În acest caz U este simplu măsurabilă și avem* $T_f \in \mathcal{L}(E)$ *și*

$$T_f x = \int f(s)\ U_s x\ \mathrm{d}s, \text{ pentru } f \in L^1 \text{ și } x \in E.$$

3) *U este măsurabilă. În acest caz avem* $T_f \in \mathcal{L}(E)$ *și*

$$T_f = \int f(s)\ U_s\ \mathrm{d}s, \text{ pentru } f \in L^1.$$

Propoziția 7. *Fie* $U : G \to \mathcal{L}(E)$ *o reprezentare slab măsurabilă și mărginită. Să presupunem că aplicația liniară corespunzătoare* $T : f \to T_f$ *a lui* L^1 *în* $\mathcal{L}(E)$ *definită prin egalitatea*

$$< T_f x, x' > = \int f(s) < U_s x, x' > \mathrm{d}s, \text{ pentru } f \in \mathcal{L}^1, x \in E \text{ și } x' \in E'$$

are valori în $\mathcal{L}(E)$. *Atunci T este o reprezentare continuă a algebrei* L^1 *în algebra* $\mathcal{L}(E)$.

Dacă E este spațiu Hilbert iar U este o reprezentare unitară, atunci T este simetrică:

$$T_{f^*} = T_f^* \text{ pentru } f \in L^1.$$

Fie $f, g \in L^1$. Trebuie să arătăm că $T_{f*g} = T_f\, T_g$. Modificînd funcțiile f și g pe o mulțime neglijabilă putem presupune că f și g sînt nule pe complementara reuniunii unui șir de mulțimi compacte, ceea ce nu modifică T_f, T_g și T_{f*g}.

Funcția $f(t)\ g(s)$ este integrabilă pentru $\mathrm{d}t\ \mathrm{d}s$ deci funcția $f(t)\ g(t^{-1}s)$ este integrabilă pentru $\mathrm{d}t\ \mathrm{d}s$, deci $< U_s x, x' > f(t)\ g(t^{-1}s)$ este integrabilă. Înlocuind t cu ts deducem că funcția $< U_{ts} x, x' > f(t)\ g(s)$ este integrabilă și

$$\iint < U_s x, x' > f(t)\ g(t^{-1}s)\ \mathrm{d}t\ \mathrm{d}s = \iint < U_{ts} x, x' > f(t)\ g(s)\ \mathrm{d}t\ \mathrm{d}s.$$

Observînd că $< U_{ts} x, x' > = < U_t\, U_s x, x' > = < U_s x, {}^tU_t x' >$ și că se poate aplica teorema lui Fubini pentru funcțiile din integralele

de mai sus, deoarece sînt nule pe complementara reuniunii unui şir de mulţimi compacte din $G \times G$, obţinem

$$< T_{f*g}\, x, x' > = \int < U_s\, x, x' > f * g(s)\, \mathrm{d}s =$$

$$= \int < U_s\, x, x' > \mathrm{d}s \int f(t)\, g(t^{-1}s)\, \mathrm{d}t =$$

$$= \iint < U_s\, x, x' > f(t)\, g(t^{-1}s)\, \mathrm{d}t\, \mathrm{d}s = \iint < U_{st}\, x, x' > f(t)\, g(s)\, \mathrm{d}t\, \mathrm{d}s =$$

$$= \int f(t)\, \mathrm{d}t \int < U_s\, x, {}^tU_t\, x' > g(s)\, \mathrm{d}s = \int f(t) < U_g\, x, {}^tU_t\, x' > \mathrm{d}t =$$

$$= \int f(t) < U_t\, U_g\, x, x' > \mathrm{d}t = < T_f\, T_g\, x, x' >$$

de unde $T_{f*g} = T_f\, T_g$.

Să presupunem că E este un spaţiu Hilbert şi că toţi operatorii U_s sînt unitari: $U_{s^-} = U_s^{-1} = U_s^*$. Atunci, pentru orice $f \in L^1$ şi $x,\ x' \in E$ avem

$$< T_{f*}\, x,\ x' > = \int f^*(s) < U_s\, x, x' > \mathrm{d}s =$$

$$\int \overline{f(s^{-1})}\, \Delta(s^{-1}) < U_s\, x, x' > \mathrm{d}s =$$

$$= \int \overline{f(s)} < U_{s^{-1}}\, x, x' > \mathrm{d}s = \int \overline{f(s)} < U_s^*\, x, x' > \mathrm{d}s =$$

$$= \int \overline{f(s)} < x, U_s\, x' > \mathrm{d}s = \int \overline{f(s)} < \overline{U_s\, x', x >}\, \mathrm{d}s = \overline{< T_f\, x', x >} =$$

$$= < x, T_f\, x' >$$

de unde $T_{f*} = T_f^*$.

Observaţie. În cazul cînd U este slab continuă nu putem deduce că aplicaţia $T : \mathcal{M}^1 \to \mathcal{L}(E)$ este o reprezentare.

Dacă însă U este continuă, putem deduce că $T_{\mu * \nu} = T_\mu\, T_\nu$ şi chiar mai mult, că $T_{\mathbf{m} * \mathbf{n}} = T_{\mathbf{m}}\, T_{\mathbf{n}}$ pentru orice măsuri mărginite $\mathbf{m}$ şi $\mathbf{n}$ cu valori în $\mathcal{L}(E)$ (prop. 5).

Propoziţia 8. *Fie $T : f \to T_f$ o reprezentare continuă a algebrei L^1 în $\mathcal{L}(E)$ astfel încît mulţimea $F = \{T_f\, x \mid f \in L^1,\ x \in E\}$ să fie densă în E. Există o reprezentare simplu continuă U a grupului G în $\mathcal{L}(E)$ astfel încît*

$$T_f\, x = \int f(s)\ U_s x\ \mathrm{d}s, \text{ pentru } f \in L^1 \text{ şi } x \in E.$$

Dacă E este spaţiu Hilbert şi dacă $T_{f*} = T_f^*$ pentru orice $f \in L^1$, atunci U este o reperezentare unitară a grupului G.

Fie $a \in G$. Să notăm cu (u) unitatea aproximativă în L^1. Pentru orice funcție $f \in L^1$ avem $u_a * f = (u * f)_a$ și $u * f \to f$ deci $(u * f)_a \to f_a$, de unde $u_a * f \to f_a$. Deoarece reprezentarea $T : f \to T_f$ este continuă, deducem $\| T_{u_a} T_f - T_{f_a} \| \to 0$. Urmează că pentru orice $x \in E$ avem

$$\lim_u T_{u_a} T_f x = T_{f_a} x$$

convergența având loc în E. Așadar, pentru orice $y \in F$ există limita

$$V_a y = \lim_u T_{u_a} y$$

și dacă $y = T_f x$ cu $f \in \mathcal{L}^1$ și $x \in E$, atunci

$$V_a T_f x = T_{f_a} x \in F.$$

Deducem că V_a este o aplicație liniară a lui F în F (liniaritatea lui V_a rezultă din liniaritatea limitei $\lim_u T_{u_a} y$). Această aplicație este și continuă, deoarece,

$$\| T_{u_a} \| \leqslant \| T \| \; N_1 (u_a) \leqslant \| T \|$$

deci

$$| V_a y | \leqslant \| T \| \; | y |.$$

Urmează că V_a se poate prelungi în mod unic, la o aplicație liniară și continuă a lui E în E, notată tot V_a, și avem $| V_a | \leqslant \| T \|$.

Dacă $a, b \in G$ iar $f \in \mathcal{L}^1$ și $x \in E$, avem

$$V_{ab} T_f x = T_{ab} x = T_{(f_a)_b} x = V_b T_{f_a} x = V_b V_a T_f x.$$

Deoarece elementele de forma $T_f x$ cu $f \in \mathcal{L}^1$ și $x \in E$ formează o mulțime densă în E, deducem

$$V_{ab} = V_b V_a.$$

În mod asemănător, avem $V_e T_f x = T_{f_e} = T_f x$ pentru $f \in \mathcal{L}^1$ și $x \in E$, deci $V_e x = x$ pentru orice $x \in E$, deci $V_e = I$.

Fie $f \in \mathcal{L}^1$. Aplicația $a \to f_a$ a lui G în $\mathcal{L}^1$ este continuă, deci aplicația $a \to T_{f_a}$ a lui G în $\mathcal{L}(E)$ este continuă. În particular, pentru fiecare $x \in E$ aplicația $a \to V_a T_f x = T_{f_a} x$ a lui G în E este continuă. Așadar, pentru fiecare $y \in F$ aplicația $a \to V_a y$ a lui G în E este continuă.

Să arătăm că pentru orice $x \in E$ aplicația $a \to V_a x$ este continuă pe G.

Fie $x \in E$ și $\varepsilon > 0$. Există $y \in F$ cu $| y - x | < \dfrac{\varepsilon}{3 \| T \|}$. Atunci $| V_s x - V_s y | = | V_s (x - y) | < \dfrac{\varepsilon}{3}$ oricare ar fi $s \in G$. Fie $a_0 \in G$. Deoarece aplicația $a \to V_a y$ este continuă în a_0, există o vecinătate V a lui a_0 astfel

încît pentru $a \in V$ să avem $|V_a\, y - V_{a_0}\, y| < \frac{\varepsilon}{3}$. Atunci, pentru $a \in V$ avem

$$|V_a x - V_{a_0} x| \leqslant |V_a x - V_a y| + |V_a y - V_{a_0} y| + |V_{a_0} y - V_{a_0} x| < \varepsilon,$$

deci aplicaţia $a \to V_a\, x$ este continuă în a_0. Deoarece a_0 este arbitrar în G, rezultă că aplicaţia $a \to V_a\, x$ este continuă pe G.

Dacă pentru fiecare $s \in G$ notăm

$$U_s = V_{s^{-1}}$$

avem $U_e = I$ şi $U_{st} = U_s\, U_t$ pentru $s, t \in G$, deci aplicaţia U este o reprezentare a lui G în $\mathcal{L}(E)$ iar această reprezentare este simplu continuă şi mărginită. Pentru orice $f \in \mathcal{L}^1$ şi $s \in G$ avem

$$U_s\, T_f = T_{f_{s^{-1}}}$$

Rămîne să arătăm că

$$T_f\, x = \int f(s)\, U_s\, x\, \mathrm{d}s, \text{ pentru } f \in \mathcal{L}^1 \text{ şi } x \in E.$$

Fie $x \in E$ şi $x' \in E'$. Dacă pentru orice funcţie $f \in \mathcal{K}(G)$ punem $\mu(f) = \langle T_f\, x, x' \rangle$, atunci μ este o măsură scalară pe G, absolut continuă în raport cu măsura Haar şi

$$|\mu(f)| \leqslant |x|\, |x'|\, \|T\| \int |f(s)|\, \mathrm{d}s.$$

Urmează că există o funcţie complexă $\chi(t)$ mărginită şi măsurabilă în raport cu măsura Haar, astfel încît $\mathrm{d}\mu = \chi \mathrm{d}t$ şi

$$\sup_{t \in G} |\chi(t)| \leqslant |x|\, |x'|\, \|T\|.$$

Pentru f, $g \in \mathcal{K}(G)$, avem

$$\langle T_f\, T_g\, x, x' \rangle = \langle T_{f*g}\, x, x' \rangle = \mu(f*g) = \int \chi(t)\, f*g\,(t)\, \mathrm{d}t =$$

$$= \int \chi(t)\, \mathrm{d}t \int f(s)\, g(s^{-1}t)\, \mathrm{d}s = \int f(s)\, \mathrm{d}s \int \chi(t)\, g(s^{-1}t)\, \mathrm{d}t =$$

$$= \int f(s)\, \mathrm{d}s \int \chi(t)\, g_{s^{-1}}(t)\, \mathrm{d}t = \int f(s) \langle T_{g_{s^{-1}}}\, x, x' \rangle \mathrm{d}s = \int f(s) \langle U_s T_g x, x' \rangle \mathrm{d}s.$$

Deoarece funcţia $s \to U_s\, T_g\, x$ este continuă şi mărginită, funcţia $s \to f(s)\, U_s\, T_g\, x$ este integrabilă şi

$$T_f\, T_g\, x = \int f(s)\, U_s\, T_g\, x\, \mathrm{d}s.$$

Aşadar pentru $y \in F$ şi $f \in \mathcal{K}(G)$ avem

$$T_f\, y = \int f(s)\, U_s\, y\, ds.$$

Atunci, pentru $x \in E$ alegem un şir $y_n \in F$ convergent către x şi aplicînd teorema lui Lebesgue deducem

$$T_f\, x = \int f(s)\, U_s\, x\, ds, \text{ pentru } f \in \mathcal{K}(G) \text{ şi } x \in E.$$

În sfîrşit, această egalitate rămîne adevărată pentru orice funcţie $f \in \mathcal{L}^1$ şi orice $x \in E$, cum se observă, alegînd un şir (f_n) de funcţii din $\mathcal{K}(G)$ convergent către f în medie şi aproape peste tot.

Să presupunem acum că E este spaţiu Hilbert şi că $T_{f^*} = T_f^*$, pentru orice $f \in L^1$. Să arătăm că fiecare U_s este unitar, adică $U_s^* = U_s^{-1} = U_{s^{-1}}$. Dacă notăm cu (u) unitatea aproximativă în $\mathcal{L}^1$, pentru orice funcţie $g \in \mathcal{L}^1$ avem $g^s * u \to g^s$. Atunci $g * u_{s^{-1}} = \Delta(s^{-1})\, g^s * u \to \Delta(s^{-1})\, g^s = (g^*)_s)^*$. Urmează că pentru orice funcţie $f \in \mathcal{L}^1$ avem (notînd $g = f^*$, deci $g^* = f$), $f^* * u_{s^{-1}} \to (f_s)^*$, de unde $(u_{s^{-1}})^* * f \to f_s$; deoarece T este continuă, deducem

$$T_{u_{s^{-1}}}\, T_f = T_{(u_{s^{-1}})^*}\, T_f \to T_{f_s} = U_{s^{-1}}\, T_f.$$

Deoarece orice $y \in F$ este de forma $T_f\, x$ cu $f \in \mathcal{L}^1$ şi $x \in E$, deducem $T^*_{u_{s^{-1}}}\, y \to U_{s^{-1}}\, y$, deci pentru orice $z \in F$ avem

$$< T^*_{u_{s^{-1}}}\, y,\ z > = < U_{s^{-1}} y,\ z >$$

Pe de altă parte, pentru $x \in E$ şi $f \in \mathcal{L}^1$ avem

$$T_{u_{s^{-1}}}\, T_f\, x = U_s\, T_f\, x$$

deci pentru orice $z \in F$ avem

$$T_{u_{s^{-1}}}\, z \to U_s\, z$$

şi deci pentru orice $y \in F$ avem

$$< T_{u_{s^{-1}}}\, z,\ y > \to < U_s\, z,\ y >\ ,$$

de unde

$$< z\ ,\ T^*_{u_{s^{-1}}}\, y > \to < z,\ U_s^*\, y >\ .$$

adică

$$< T^*_{u_{s^{-1}}}\, y,\ z > \to < U_s^*\, y\ ,\ z >\ .$$

Urmează că $< U_s\, y,\ z > = < U_{s^{-1}}\, y\ ,\ z >$, pentru orice $y,\ z \in F$ de unde $U_s^*\, y = U_{s^{-1}}\, y$ pentru $y \in F$ şi deci $U_s^* = U_{s^{-1}}$. Cu aceasta propoziţia este demonstrată.

Corolarul 1. *Fie U o reprezentare slab măsurabilă și mărginită a lui G în $\mathcal{L}(E)$, astfel încît reprezentarea corespunzătoare T a algebrei L^1 are valori în $\mathcal{L}(E)$. Dacă mulțimea $F = \{T_f\, x \mid f \in L^1, x \in E\}$ este densă în E, atunci există o reprezentare V simplu continuă și mărginită a lui G în $\mathcal{L}(E)$ astfel încît pentru $x \in E$ și $x' \in E'$ să avem*

$$< U_s\, x,\ x' > = < V_s\, x,\ x' > \quad \textit{aproape pentru orice } s \in G.$$

Într-adevăr, conform propoziției 7, T este continuă, iar conform propoziției 8, există o reprezentare simplu continuă V a lui G în $\mathcal{L}(E)$ astfel încît

$$T_f\, x = \int f(s)\, V_s\, x\ \mathrm{d}s, \text{ pentru } f \in L^1 \text{ și } x \in E.$$

Pentru orice $x' \in E'$ avem atunci

$$< T_f\ x,\ x' > = \int f(s) < V_s\, x,\ x' > \mathrm{d}s.$$

deci

$$\int f(s) < U_s\, x,\ x' > \mathrm{d}s = \int f(s) < V_s\, x,\ x' > \mathrm{d}s$$

pentru orice $f \in L^1$. Urmează că

$$< U_s\, x,\ x' > = < V_s\, x,\ x' >, \text{ aproape pentru orice } s \in G.$$

Corolarul 2. *Dacă U este slab continuă și mărginită și dacă mulțimea $F = \{T\, x \mid f \in L^1,\ x \in E\}$ este densă în E, atunci U este simplu continuă.*

Într-adevăr, în demonstrația corolarului precedent deducem că

$$< U_s\, x,\ x' > = < V_s\, x,\ x' >$$

pentru *orice* $s \in G$, $x \in E$ *și* $x' \in E'$, de unde $U_s = V_s$ pentru orice $s \in G$ și deci U este simplu continuă.

Corolarul 3. *Fie U o reprezentare slab măsurabilă și mărginită a lui G în $\mathcal{L}(E)$. Dacă E este de tip numărabil și dacă mulțimea $F = \{T\, x \mid f \in L^1,\ x \in E\}$ este densă în E, atunci U este egală aproape peste tot cu o reprezentare simplu continuă V a lui G în $\mathcal{L}(E)$.*

Conform corolarului 1, există o reprezentare simplu continuă V a lui G în $\mathcal{L}(E)$, astfel încît, pentru orice $x \in E$ și orice $x' \in E'$ să avem

$$< U_s\, x,\ x' > = < V_s\, x,\ x' >, \text{ aproape peste tot.}$$

Deoarece E este de tip numărabil, urmînd raționamentul din propoziția 14, § 17, deducem că $U_s = V_s$ aproape peste tot.

Corolarul 4. *Dacă E este un spațiu Hilbert de tip numărabil, orice reprezentare unitară slab măsurabilă U a lui G în $\mathcal{L}(E)$ este simplu continuă.*

Să arătăm întîi că mulțimea $F = \{T_f x \mid f \in \mathcal{K}(G), x \in E\}$ este densă în E. Într-adevăr, în caz contrar ar exista un element $y \neq 0$ din E astfel încît pentru orice $f \in \mathcal{K}(G)$ și orice $x \in E$ să avem $< T_f x, y > = 0$, adică

$$\int f(s) < U_s x, y > \mathrm{d}s = 0.$$

Urmează atunci că pentru fiecare $x \in E$ există o mulțime neglijabilă $A(x) \subset G$ astfel încît $< U_s x, y > = 0$ pentru $s \notin A(x)$. Fie (x_n) un șir dens în E și $A = \bigcup_n A(x_n)$. Mulțimea A este neglijabilă și $< x_n, U_s^{-1} y > = < U_s x_n, y > = 0$, oricare ar fi n și oricare ar fi $s \notin A$.

Deoarece șirul (x_n) este dens în E, rezultă că $U_s^{-1} y = 0$ oricare ar fi $s \notin A$. Deoarece U_s^{-1} este operator unitar, este izometric, deci $y = 0$, ceea ce ne duce la contradicție.

Așadar, mulțimea F este densă în E. Fie acum $f \in \mathcal{K}(G)$, $x \neq 0$ și $y \neq 0$ două elemente din E. Să arătăm că funcția $t \to < U_t T_f x, y >$ este continuă.

Fie $a \in G$. Avem

$$< U_a T_f x, y > = < T_f x, U_{a^{-1}} y > = \int f(s) < U_s x, U_{a^{-1}} y > \mathrm{d}s =$$

$$= \int f(s) < U_{as} x, y > \mathrm{d}s = \int f(a^{-1}s) < U_s x, y > \mathrm{d}s.$$

Fie $\varepsilon > 0$. Deoarece f este uniform continuă la stînga, există o vecinătate V a lui e astfel încît

$$|f(u) - f(v)| < \frac{\varepsilon}{|x|\,|y|}, \quad \text{dacă } uv^{-1} \in V$$

Pentru orice $s \in G$ și $t \in aV$ avem $a^{-1}s\,(t^{-1}s) = a^{-1}t \in V$, deci

$$|f(a^{-1}s) - f(t^{-1}s)| < \frac{\varepsilon}{|x|\,|y|}$$

și deci

$$| < U_a T_f x, y > - < U_t T_f x, y > | < \varepsilon.$$

Urmează că aplicația $t \to < U_t T_f x, y >$ este continuă în a. Cum a a fost ales arbitrar în G, această aplicație este continuă pe G. Așadar, aplicația $t \to < U_t T_f x, y >$ este continuă pentru orice $x \in F$.

Fie acum $x \in E$. Deoarece F este densă în E, există un șir (x_n) de elemente din F, convergent către x. Atunci

$$| < U_t x, y > - < U_t x_n, y > | = | < U_t (x - x_n), y > | \leqslant |x - x_n|\,|y|,$$

deci șirul de funcții continue $t \to < U_t x_n, y >$ converge uniform către funcția $t \to < U_t x, y >$ și deci și această funcție este continuă. Așadar reprezentarea unitară U este slab continuă. Conform corolarului 2, U este simplu continuă.

4. Reprezentările regulate

Fie $1 \leqslant p \leqslant +\infty$. Pentru fiecare măsură $\mathbf{m} \in \mathscr{M}_A^1$ să definim operatorul $T_{\mathbf{m}}$ pe algebra $B = \mathscr{L}(L_A^p)$ prin egalitatea

$$T_{\mathbf{m}}\mathbf{g} = \mathbf{m} * \mathbf{g}, \qquad \text{pentru } \mathbf{g} \in L_A^p.$$

Se verifică imediat că aplicația $T : \mathbf{m} \to T_{\mathbf{m}}$ a lui $\mathscr{M}_A^1$ în algebra B este liniară și multiplicativă :

$$T_{\mathbf{m}*\mathbf{n}}\mathbf{g} = (\mathbf{m} * \mathbf{n}) * \mathbf{g} = \mathbf{m} * (\mathbf{n} * \mathbf{g}) = T_{\mathbf{m}}(\mathbf{n} * \mathbf{g}) = T_{\mathbf{m}}\, T_{\mathbf{n}}\, \mathbf{g}$$

deci $T : \mathscr{M}_A^1 \to \mathscr{L}(L_A^p)$ este o reprezentare. Această reprezentare este continuă :

$$\| T_{\mathbf{m}}\, \mathbf{g} \|_p = \| \mathbf{m} * \mathbf{g} \|_p \leqslant |||\mathbf{m}||| \, \|\mathbf{g}\|_p$$

deci $\| T_{\mathbf{m}} \| \leqslant |||\mathbf{m}|||$ și deci $\| T \| \leqslant 1$.

Reprezentarea T definită mai sus se numește *reprezentare regulată* a algebrei $\mathscr{M}_A^1$ în algebra $\mathscr{L}(L_A^1)$

Legătura dintre reprezentarea T a algebrei L^1 și reprezentarea regulată la stînga U_s a grupului G este dată de propoziția următoare :

Propoziția 9. *Dacă* $1 \leqslant p < +\infty$, *pentru orice funcții* $f \in \mathscr{L}^1$ *și* $\mathbf{g} \in L_E^p$, *aplicația* $s \to f(s)\, U_s\, \mathbf{g}$ *a lui* G *în* $\mathscr{L}(L_E^p)$ *este integrabilă și avem*

$$T_f\, \mathbf{g} = \int f(s)\, U_s\, \mathbf{g}\, ds.$$

Fie E' dualul lui E și $\mathbf{h} \in \mathscr{K}_{E'}(G)$. Funcția $|f(s)|\, |\mathbf{h}(t)|\, |\mathbf{g}(s^{-1}t)|$ este $ds \otimes dt$-măsurabilă, deci funcția $\mathbf{g}(s^{-1}t)$ este măsurabilă în raport cu măsura mărginită $|f|\, ds \otimes |\mathbf{h}|\, dt$. Deoarece

$$\int^* |\mathbf{h}(t)|\, dt \int^* |f(s)|\, |\mathbf{g}(s^{-1}t)|\, ds = \int^* |\mathbf{h}(t)|\, |f * \mathbf{g}(t)|\, dt < +\infty$$

rezultă că funcția $\mathbf{g}(s^{-1}t)$ este integrabilă în raport cu măsura $|f|\, ds \otimes |\mathbf{h}|\, dt$, deci și în raport cu măsura $f ds \otimes \mathbf{h} dt$. Aplicînd teorema lui Fubini deducem :

$$< T_f \mathbf{g}, \mathbf{h} > = < f * \mathbf{g}, \mathbf{h} > = \int < f * \mathbf{g}(t), \mathbf{h}(t) > dt =$$

$$= \int < \int f(s)\, \mathbf{g}(s^{-1}t)\, ds, \mathbf{h}(t) > dt = \int dt \int f(s) < \mathbf{g}(s^{-1}t), \mathbf{h}(t) > ds =$$

$$= \int f(s)\, ds \int < \mathbf{g}(s^{-1}t), \mathbf{h}(t) > dt = \int f(s)\, ds \int < \mathbf{g}_{s^{-1}}(t), \mathbf{h}(t) > dt =$$

$$= \int f(s) < \mathbf{g}_{s^{-1}}, \mathbf{h} > ds = \int < f(s)\, U_s \mathbf{g}, \mathbf{h} > ds.$$

Deoarece funcția $s \to U_s \mathbf{g}$ este continuă, funcția $s \to f(s)\ U_s \mathbf{g}$ este măsurabilă iar funcția $s \to < f(s)\ U_s \mathbf{g}, \mathbf{h} >$ este integrabilă pentru orice $\mathbf{h} \in \mathcal{K}_{E'}(G)$. Urmează că funcția $s \to \mathbf{f}(s)\ U_s \mathbf{g}$ este integrabilă și

$$\int < f(s)\ U_s \mathbf{g}, \mathbf{h} > \mathrm{d}s = < \int f(s)\ U_s \mathbf{g}\ \mathrm{d}s, \mathbf{h} >,$$

de unde

$$< T_f \mathbf{g}, \mathbf{h} > = < \int f(s)\ U_s \mathbf{g}\ \mathrm{d}s, \mathbf{h} >$$

și deci

$$T_f \mathbf{g} = \int f(s)\ U_s \mathbf{g}\ \mathrm{d}s.$$

Observație. Dacă cei doi membri ai egalității se consideră funcții din $\mathcal{L}_E^0$, această egalitate se scrie

$$\int f(s)\ \mathbf{g}(s^{-1}x)\ \mathrm{d}s = \left[\int f(s)\ \mathbf{g}_{s^{-1}}\ \mathrm{d}s\right](x)$$

aproape pentru orice $x \in G$.

5. Reprezentări de grupuri comutative

Aici vom presupune că G este un grup *comutativ* local compact și că A este o algebră Banach *comutativă* cu unitate.

Am văzut (prop. 5) că oricărei reprezentări $U : G \to A$ măsurabilă și mărginită, îi corespunde o reprezentare continuă $T : L_A^1 \to A$, prin egalitatea

$$T(\mathbf{f}) = \int \mathbf{f}(s)\ U(s)\ \mathrm{d}s, \qquad \text{pentru } \mathbf{f} \in L_A^1$$

și avem $T(L_A^1) = A$ și $\| T \| = \| U \|_\infty$.

Acest rezultat este adevărat chiar dacă G nu este comutativ.

Dacă G este comutativ, avem și o propoziție reciprocă.

Fie $T : L_A^1 \to A$ o aplicație *multiplicativă* :

$$T(\mathbf{f} * \mathbf{g}) = T(\mathbf{f})\ T(\mathbf{g}), \text{ pentru } \mathbf{f}, \mathbf{g} \in L_A^1.$$

Pentru orice $s \in G$ și $\mathbf{f}, \mathbf{g} \in L_A^1$ avem

$$\mathbf{f} * \mathbf{g}^s = \mathbf{f}^s * \mathbf{g} = (\mathbf{f} * \mathbf{g})^s$$

și deci

$$T(\mathbf{f})\ T(\mathbf{g}^s) = T(\mathbf{f}^s)\ T(\mathbf{g}).$$

De aici deducem că dacă $T_\mathbf{f}$ și $T_\mathbf{g}$ sînt inversibili, avem

$$T(\mathbf{f}^s)\ T(\mathbf{f})^{-1} = T(\mathbf{g}^s)\ T(\mathbf{g})^{-1}.$$

Lema 1. *Fie* $T : L_A^1 \to A$ *o aplicație multiplicativă. Să presupunem că există* $\mathbf{h} \in L_A^1$ *astfel încît* $T(\mathbf{h})$ *să fie inversibil. Atunci aplicația* $U : G \to A$, *definită prin egalitatea*

$$U(s) = T(\mathbf{h}^s)\, T(\mathbf{h})^{-1},$$

este o reprezentare care pentru orice $s \in G$ *și* $\mathbf{f} \in L_A^1$ *verifică egalitatea*

$$T(\mathbf{f}_s) = U(s^{-1})\, T(\mathbf{f}).$$

Să observăm întîi că $U(s)$ nu depinde de funcția $\mathbf{h} \in L_A^1$ pentru care $T(\mathbf{h})^{-1}$ există, ci depinde numai de s. Avem

$$U(e) = T(\mathbf{h}^e)\, T(\mathbf{h})^{-1} = T(\mathbf{h})\, T(\mathbf{h})^{-1} = 1.$$

Dacă $s, t \in G$, atunci

$$T(\mathbf{h}^{st} * \mathbf{h}) = T(\mathbf{h}^s * \mathbf{h}^t) = T(\mathbf{h}^s)\, T(\mathbf{h}^t)$$

deci

$$U(st) = T(\mathbf{h}^{st})\, T(\mathbf{h})^{-1} = T(\mathbf{h}^{st})\, T(\mathbf{h})\, T(\mathbf{h})^{-1}\, T(\mathbf{h}^{-1}) =$$

$$= T(\mathbf{h}^{st} * \mathbf{h})\, T(\mathbf{h})^{-1}\, T(\mathbf{h}^{-1}) = T(\mathbf{h}^s)\, T(\mathbf{h})^{-1}\, T(\mathbf{h}^t)\, T(\mathbf{h})^{-1} = U(s)\, U(t)$$

și deci U este o reprezentare.

Pentru orice $s \in G$ și $\mathbf{f} \in L_A^1$ avem apoi

$$T(\mathbf{f}_s) = T(\mathbf{f}^{s^{-1}})\, T(\mathbf{h})\, T(\mathbf{h})^{-1} = T(\mathbf{f})\, T(\mathbf{h}^{s^{-1}})\, T(\mathbf{h})^{-1} =$$

$$= T(\mathbf{f})\, U(s^{-1}) = U(s^{-1})\, T(\mathbf{f}).$$

Lema 2. *Fie* $T : L_A^1 \to A$ *o aplicație multiplicativă astfel încît* $T(\mathbf{h})^{-1}$ *există cel puțin pentru o funcție* $\mathbf{h} \in L_A^1$ *și fie* $U : G \to A$ *reprezentarea care verifică egalitatea*

$$T(\mathbf{f}_s) = U(s^{-1})\, T(\mathbf{f}) \qquad \textit{pentru } s \in G \textit{ și } \mathbf{f} \in L_A^1 .$$

Dacă T *este mărginită, atunci* U *este mărginită. Dacă* T *este continuă, atunci* U *este continuă și* $T(\mathbf{g})^{-1}$ *există cel puțin pentru o funcție* $\mathbf{g}$ *din* $\mathcal{K}_A G$).

Într-adevăr, dacă T este mărginită :

$$|T(\mathbf{f})| \leqslant \alpha \int |\mathbf{f}|\, dt, \qquad \text{pentru orice } \mathbf{f} \in L_A^1,$$

atunci

$$|U(s)| = |T(\mathbf{h}_{s^{-1}})\, T(\mathbf{h})^{-1}| \leqslant |T(\mathbf{h}_{s^{-1}})|\, |T(\mathbf{h})^{-1}| \leqslant$$

$$\leqslant \alpha\, |T(\mathbf{h})^{-1}| \int |\mathbf{h}_{s^{-1}}|\, dt = \alpha\, |T(\mathbf{h})^{-1}| \int |\mathbf{h}|\, dt.$$

pentru orice $s \in G$, deci U este mărginită.

Să presupunem că T este continuă. Deoarece aplicaţia $s \to \mathbf{h}_{s^{-1}}$ a lui G în L^1_A este continuă, funcţia compusă $s \to \mathbf{h}_{s^{-1}} \to T(\mathbf{h}_{s^{-1}})$ este continuă şi atunci funcţia $s \to T(\mathbf{h}_{s^{-1}})\, T(\mathbf{h})^{-1} = U(s)$ este de asemenea continuă.

Deoarece $T(\mathbf{h})^{-1}$ există, există o vecinătate deschisă V a lui $T(\mathbf{h})$ astfel încît a^{-1} există oricare ar fi $a \in V$. Deoarece T este continuă, mulţimea $V' = T^{-1}(V)$ este o vecinătate deschisă a lui $\mathbf{h}$, deci există $\mathbf{g} \in V' \cap \mathcal{K}_A(G)$. Pentru $\mathbf{g} \in V' \cap \mathcal{K}_A$ avem $T(\mathbf{g}) \in V$ şi deci $T(\mathbf{g})^{-1}$ există.

Propoziţia 10. *Pentru orice reprezentare continuă $T : L^1_A \to A$, astfel încît $T(\mathbf{h})^{-1}$ există cel puţin pentru o funcţie $\mathbf{h} \in L^1_A$, există o reprezentare continuă şi mărginită $U : G \to A$ astfel încît să avem*

$$T(\mathbf{f}) = \int U(s)\, \mathbf{f}(s)\, ds, \qquad \text{pentru orice } \mathbf{f} \in L^1_A.$$

Fie $\mathbf{g} \in \mathcal{K}_A(G)$ o funcţie astfel încît $T(\mathbf{g})^{-1}$ există (lema 2). Să considerăm reprezentarea $U : G \to A$ definită prin egalitatea

$$U(s) = T(\mathbf{g}_{s^{-1}})\, T(\mathbf{g})^{-1}, \qquad \text{pentru } s \in G.$$

Deoarece T este liniară şi continuă, este mărginită. Conform lemei 2, U este continuă şi mărginită. Rămîne să demonstrăm egalitatea

$$T(\mathbf{f}) = \int U(s)\, \mathbf{f}(s)\, ds, \qquad \text{pentru } \mathbf{f} \in L^1_A.$$

Fie $\mathbf{h} \in \mathcal{K}_A(G)$. Să notăm cu S suportul lui $\mathbf{h}$ şi cu K suportul lui $\mathbf{g}$. Mulţimea SK este compactă. Pentru fiecare $s \in G$, funcţia $t \to \mathbf{h}(s)\, \mathbf{g}_{s^{-1}}(t)$ este continuă şi cu suportul conţinut în SK. Într-adevăr, dacă $s \notin S$, atunci $\mathbf{h}(s) = 0$, deci $\mathbf{h}(s)\, \mathbf{g}_s(t) = 0$. Dacă $s \in S$ şi $t \notin SK$, atunci $t \notin sK$, deci $s^{-1}t \notin K$, deci $\mathbf{g}(s^{-1}t) = 0$ şi deci $\mathbf{h}(s)\, \mathbf{g}_{s^{-1}}(t) = \mathbf{h}(s)\, \mathbf{g}(s^{-1}t) = 0$. Funcţia $(s, t) \to \mathbf{h}(s)\, \mathbf{g}(s^{-1}t)$ este deci continuă pe $G \times G$ şi cu suport compact, conţinut în $S \times SK$. Deoarece $T : L^1_A \to A$ este o aplicaţie liniară şi continuă, pentru orice funcţie $\mathbf{f} \in \mathcal{K}_A(G)$ avem

$$|T(\mathbf{f})| \leqslant \alpha \int |\mathbf{f}(t)|\, dt = \int |\mathbf{f}(t)|\, d(\alpha t).$$

Aşadar, restricţia $\mathbf{m}$ a lui T la $\mathcal{K}_A(G)$ este o măsură majorată. Avem

$$T(\mathbf{f}) = \int \mathbf{f}\, d\mathbf{m} \qquad \text{pentru } \mathbf{f} \in \mathcal{K}_A(G).$$

Funcţia $(s, t) \to \mathbf{h}(s)\, \mathbf{g}(s^{-1}t)$ este integrabilă în raport cu măsura produs $ds \otimes d\mathbf{m}(t)$ şi avem

$$\iint \mathbf{h}(s)\, \mathbf{g}(s^{-1}t)\, ds\, d\mathbf{m}(t) = \int \mathbf{h}(s)\, ds \int \mathbf{g}_{s^{-1}}(t)\, d\mathbf{m}(t) =$$

$$= \int \mathbf{h}(s)\, T(\mathbf{g}_{s^{-1}})\, ds = \int \mathbf{h}(s)\, U(s)\, T(\mathbf{g})\, ds = T(\mathbf{g}) \int \mathbf{h}(s)\, U(s)\, ds.$$

Pe de altă parte

$$\iint \mathbf{h}(s)\ \mathbf{g}(s^{-1}t)\ ds\ \mathbf{dm}(t) = \int \mathbf{dm}(t) \int \mathbf{h}(s)\ \mathbf{g}(s^{-1}t)\ ds =$$

$$= \int (\mathbf{h} * \mathbf{g})\ (t)\ \mathbf{dm}\ (t) = T(\mathbf{h} * \mathbf{g}) = T(\mathbf{h})\ T(\mathbf{g}).$$

Aşadar

$$T(\mathbf{h})\ T(\mathbf{g}) = T(\mathbf{g}) \int \mathbf{h}(s)\ U(s)\ ds.$$

Înmulţind în ambii membrii cu $T(\mathbf{g})^{-1}$ deducem

$$T(\mathbf{h}) = \int \mathbf{h}(s)\ U(s)\ ds, \qquad \text{pentru } \mathbf{h} \in \mathcal{K}_A(G).$$

Deoarece U este continuă şi mărginită, aplicaţia $T' : L^1_A \to A$ definită prin egalitatea

$$T'(\mathbf{f}) = \int \mathbf{f}(s)\ U(s)\ ds, \qquad \text{pentru } \mathbf{f} \in L^1_A$$

este o reprezentare continuă şi avem

$$T(\mathbf{h}) = T'(\mathbf{h}), \qquad \text{pentru } \mathbf{h} \in \mathcal{K}_A(G).$$

Deoarece $\mathcal{K}_A(G)$ este dens în $\mathcal{L}^1_A$, deducem $T(\mathbf{f}) = T'(\mathbf{f})$ pentru orice $\mathbf{f} \in L^1_A$ şi deci

$$T(\mathbf{f}) = \int \mathbf{f}(s)\ U(s)\ ds, \qquad \text{pentru } \mathbf{f} \in L^1_A.$$

Corolarul 1. *Fie $T : L^1_A \to A$ o reprezentare continuă. Avem $T(L^1_A) = A$ dacă şi numai dacă $T(\mathbf{h})^{-1}$ există cel puţin pentru o funcţie $\mathbf{h} \in L^1_A$.*

Se folosesc propoziţiile 10 şi 4.

Corolarul 2. *Orice reprezentare măsurabilă şi mărginită $V : G \to A$ este egală aproape peste tot cu o reprezentare continuă şi mărginită.*

Conform propoziţiei 5, reprezentării V îi corespunde o reprezentare continuă $T : L^1_A \to A$ prin egalitatea

$$T(\mathbf{f}) = \int \mathbf{f}(s)\ V(s)\ ds, \qquad \text{pentru } \mathbf{f} \in L^1_A$$

şi avem $T(L^1_A) = A$. Conform propoziţiei 10, există o reprezentare continuă şi mărginită $U : G \to A$ astfel încît

$$T(\mathbf{f}) = \int \mathbf{f}(s)\ U(s)\ ds, \qquad \text{pentru } \mathbf{f} \in L^1_A.$$

Urmează că

$$\int \mathbf{f}(s)\, V(s)\, ds = \int \mathbf{f}(s)\, U(s)\, ds, \qquad \text{pentru } \mathbf{f} \in L_A^1,$$

de unde $V(s) = U(s)$ aproape peste tot.

Corolarul 3. *Există o corespondență biunivocă între mulțimea reprezentărilor continue* $T : L_A^1 \to A$ *astfel încît* $T(L_A^1) = A$ *și mulțimea reprezentărilor continue și mărginite* $U : G \to A$, *dată de egalitatea*

$$T(\mathbf{f}) = \int \mathbf{f}(s)\, U(s)\, ds, \qquad \textit{pentru } \mathbf{f} \in L_A^1,$$

și avem

$$\| T \| = \| U \|_\infty .$$

Corespondența biunivocă rezultă din propozițiile 5 și 10, iar egalitatea $\| T \| = \| U \|_\infty$ din propoziția 6.

Corolarul 4. *Fie* $T : L_A^1 \to A$ *o reprezentare continuă cu* $T(L_A^1) = A$ *și* $U : G \to A$ *reprezentarea continuă și mărginită care îi corespunde. Atunci* $\| T \| \geqslant 1$. *Avem* $\| T \| = 1$ *dacă și numai dacă* $| U(s) | \equiv 1$.

Din corolarul 3 deducem că

$$\| T \| = \| U \|_\infty .$$

Dar U este mărginită, deci $| U(s) | \geqslant 1$ pentru orice $s \in G$ (propoziția 3). Urmează că $\| U \|_\infty \geqslant 1$ și deci $\| T \| \geqslant 1$. Dacă $| U(s) | \equiv 1$, atunci $\| T \| = \| U \|_\infty = 1$. Reciproc, dacă $\| T \| = 1$, atunci $\| U \|_\infty = 1$, deci $| U(s) | \leqslant 1$ aproape peste tot, și deci peste tot deoarece U este continuă iar suportul măsurii Haar este întreg spațiul G. Deoarece avem de asemenea $| U(s) | \geqslant 1$, rezultă $| U(s) | \equiv 1$.

Corolarul 5. *Există o corespondență biunivocă și izometrică între mulțimea reprezentărilor continue* $T : L_A^1 \to A$ *cu* $T(L_A^1) = A$ *și mulțimea reprezentărilor continue* $T' : \mathcal{M}_A^1 \to A$ *cu* $T'(L_A^1) = A$, *dată de egalitatea*

$$T(\mathbf{f}) = T'(\mathbf{f}), \qquad \text{pentru } \mathbf{f} \in L_A^1.$$

Dacă $T' : \mathcal{M}_A^1 \to A$ este o reprezentare continuă cu $T'(L_A^1) = A$, atunci restricția $T : L_A^1 \to A$ a lui T' este o reprezentare continuă cu $T(L_A^1) = A$. Reprezentarea T' este unic determinată de restricția sa T. Într-adevăr, pentru orice $\mathbf{m} \in \mathcal{M}_A^1$ și orice $\mathbf{f} \in L_A^1$ avem $\mathbf{m} * \mathbf{f} \in L_A^1$ și

$$T(\mathbf{m} * \mathbf{f}) = T'(\mathbf{m} * \mathbf{f}) = T'(\mathbf{m})\, T'(\mathbf{f}) = T'(\mathbf{m})\, T(\mathbf{f}).$$

Dacă alegem $\mathbf{f} \in L_A^1$ astfel încît $T(\mathbf{f})^{-1}$ există, atunci

$$T'(\mathbf{m}) = T(\mathbf{m} * \mathbf{f})\, T(\mathbf{f})^{-1}, \qquad \text{pentru orice } \mathbf{m} \in \mathcal{M}_A^1.$$

Așadar, corespondența $T' \to T$ este biunivocă.

Fie acum $T : L^1_A \to A$ o reprezentare continuă şi mărginită cu $T(L^1_A) = A$. Există o reprezentare continuă şi mărginită $U : G \to A$ astfel încît

$$T(\mathfrak{f}) = \int \mathfrak{f}(s)\, U(s)\, ds, \qquad \text{pentru } \mathfrak{f} \in L^1_A.$$

Funcţia U este integrabilă pentru orice măsură $\mathfrak{m} \in \mathscr{M}^1_A$. Să punem

$$T'(\mathfrak{m}) = \int U(s)\, d\mathfrak{m}(s), \qquad \text{pentru } \mathfrak{m} \in \mathscr{M}^1_A.$$

Aplicaţia $T' : \mathscr{M}^1_A \to A$ este o reprezentare continuă (propoziţia 5) şi $\| T' \| = \| U \|_\infty$, iar restricţia lui T' la L^1_A coincide cu T. Avem

$$\| T \| = \| U \|_\infty = \| T' \|.$$

Propoziţia 11. *Dacă $a \to \bar{a}$ este o involuţie pe A, astfel încît pentru orice element inversibil $a \in A$ să avem $a^{-1} = \bar{a}$, atunci orice reprezentare $T : \mathscr{M}^1_A \to A$ cu $T(L^1_A) = A$ este hermitiană, adică*

$$T(\tilde{\mathfrak{m}}) = \overline{T(\mathfrak{m})}, \qquad \textit{pentru orice } \mathfrak{m} \in \mathscr{M}^1_A$$

Într-adevăr, există o reprezentare continuă şi mărginită $U : G \to A$ astfel încît

$$T(\mathfrak{m}) = \int U(s)\, d\mathfrak{m}(s), \qquad \text{pentru } \mathfrak{m} \in \mathscr{M}^1_A.$$

Atunci

$$T(\tilde{\mathfrak{m}}) = \int U(s)\, d\tilde{\mathfrak{m}}(s) = \overline{\int \overline{U(s^{-1})}\, d\mathfrak{m}(s)} =$$

$$= \overline{\int \overline{U(s)^{-1}}\, d\mathfrak{m}(s)} = \overline{\int U(s)\, d\mathfrak{m}(s)} = \overline{T(\mathfrak{m})}.$$

6. Grupul reprezentărilor

Vom presupune că A este o algebră Banach, comutativă cu unitate.

Să notăm cu $\hat{G}_A$ mulţimea reprezentărilor continue $U : G \to A$ cu $|U(s)| \equiv 1$. Conform corolarului 4 al propoziţiei 10, mulţimea $\hat{G}_A$ este în corespondenţă biunivocă cu mulţimea $\mathscr{H}$ a reprezentărilor continue $T : L^1_A \to A$ cu $T(L^1_A) = A$ şi $\| T \| = 1$. Corespondenţa este dată de egalitatea

$$T(\mathfrak{f}) = \int \mathfrak{f}(s)\, U(s)\, ds, \qquad \text{pentru } \mathfrak{f} \in L^1_A.$$

Vom nota $T = \Phi(U)$. Mulțimea $\mathcal{H}$ este o submulțime în sfera unitate a spațiului $\mathcal{L}(L_A^1, A)$.

Să considerăm pe $\mathcal{H}$ topologia convergenței simple.

Mulțimile de forma

$$V(T_0; \mathfrak{f}_1, \ldots, \mathfrak{f}_p; \varepsilon) = \{T \mid T \in \mathcal{H}, \mid T(\mathfrak{f}_i) - T_0(\mathfrak{f}_i) \mid < \varepsilon, i = 1, 2, \ldots, p\},$$

unde $\varepsilon > 0$ și $\mathfrak{f}_1, \ldots, \mathfrak{f}_p$ sînt elemente din L_A^1, formează un sistem fundamental de vecinătăți ale lui $T_0 \in \mathcal{H}$ în această topologie.

Să considerăm acum pe $\hat{G}_A$ topologia τ obținută transportînd topologia precedentă de pe $\mathcal{H}$ prin corespondența biunivocă Φ. Vecinătățile unui element $U_0 \in \hat{G}_A$ sînt de forma

$$V(U_0; \mathfrak{f}_1, \ldots, \mathfrak{f}_p; \varepsilon) = \left\{ U \mid U \in \hat{G}_A, \left| \int [U(s) - U_0(s)]\, \mathfrak{f}_i(s)\, ds \right| < \varepsilon, \right.$$

$$\left. i = 1, 2, \ldots, p \right\},$$

unde $\varepsilon > 0$, și $\mathfrak{f}_1, \ldots, \mathfrak{f}_p$ sînt elemente din L_A^1. Cu aceste topologii $\hat{G}_A$ și $\mathcal{H}$ sînt omeomorfe, iar Φ este un omeomorfism.

Propoziția 12. *Aplicația $(U, s) \to U(s)$ a produsului $\hat{G}_A \times G$ în A este continuă.*

Fie $U_0 \in \hat{G}_A$ și $s_0 \in G$. Fie $T_0 = \Phi(U_0)$ și fie $\mathfrak{g} \in L_A^1$ astfel încît $T_0(\mathfrak{g})^{-1}$ există. Atunci

$$\mid T(\mathfrak{g}_s) - T_0(\mathfrak{g}_{s_0}) \mid \leqslant \mid T(\mathfrak{g}_s) - T(\mathfrak{g}_{s_0}) \mid + \mid T(\mathfrak{g}_{s_0}) - T_0(\mathfrak{g}_{s_0}) \mid.$$

Deoarece aplicația $s \to \mathfrak{g}_s$ a lui G în L_A^1 este continuă, pentru orice $\varepsilon > 0$ există o vecinătate V_0 a lui s_0 astfel încît să avem

$$\| \mathfrak{g}_s - \mathfrak{g}_{s_0} \| < \frac{\varepsilon}{2}, \qquad \text{pentru } s \in V_0.$$

Dacă $T \in V\left(T_0; \mathfrak{g}_{s_0}; \frac{\varepsilon}{2}\right) = V$, atunci

$$\mid T(\mathfrak{g}_{s_0}) - T_0(\mathfrak{g}_{s_0}) \mid < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Așadar, dacă $(T, s) \in V \times V_0$, avem

$$\mid T(\mathfrak{g}_s) - T_0(\mathfrak{g}_{s_0}) \mid < \varepsilon$$

deci aplicația $(T, s) \to T(\mathfrak{g}_s)$ este continuă pe $\mathcal{H} \times G$. Dar $T(\mathfrak{g}_s) = U(s)\, T(\mathfrak{g})$, deci aplicația $(T, s) \to U(s) = T(\mathfrak{g}_s)\, T(\mathfrak{g})^{-1}$ este continuă pe $\mathcal{H} \times G$.

Atunci aplicația compusă $(U, s) \to (T, s) \to U(s)$ este continuă pe $\hat{G}_A \times G$, deoarece aplicația $(U, s) \to (T, s)$ este un omeomorfism, și propoziția este demonstrată.

Să considerăm acum pe $\hat{G}$ topologia τ' a convergenței uniforme pe mulțimile compacte ale lui G. Mulțimile de forma

$$V(U_0; K; \varepsilon) = \{U \mid U \in \hat{G}_A, \mid U(s) - U_0(s) \mid < \varepsilon \qquad \text{pentru } s \in K\},$$

unde $\varepsilon < 0$ și K sînt mulțimi compacte în G, formează un sistem fundamental de vecinătate ale lui U_0 în topologia τ'.

Propoziția 13. *Topologiile τ și τ' sînt echivalente pe $\hat{G}_A$.*

Fie $U_0 \in \hat{G}_A$ și fie $V(U_0; \mathfrak{f}_1, \ldots, \mathfrak{f}_p; \varepsilon)$ o vecinătate a lui U_0 în topologia τ. Pentru orice $U \in V(U_0; \mathfrak{f}_1, \ldots, \mathfrak{f}_p; \varepsilon)$ avem deci

$$\left| \int [U(s) - U_0(s)] \mathfrak{f}_i(s)\, ds \right| < \varepsilon, \qquad \text{pentru } i = 1, 2, \ldots, p.$$

Să notăm

$$\alpha = \max_{1 \leqslant i \leqslant p} \int |\mathfrak{f}_i(s)|\, ds.$$

Deoarece pentru fiecare i avem

$$\sup_K \int_K |\mathfrak{f}_i(s)|\, ds = \int |\mathfrak{f}_i(s)|\, ds, \qquad K \text{ compact},$$

există o mulțime compactă $K \subset G$ astfel încît să avem

$$\int_{G-K} |\mathfrak{f}_i(s)|\, ds < \frac{\varepsilon}{\alpha + 2}, \qquad \text{pentru } i = 1, 2, \ldots, p.$$

Dacă $U \in V\left(U_0; K; \frac{\varepsilon}{\alpha+2}\right)$, avem pentru fiecare i

$$\left| \int (U(s) - U_0(s)) \mathfrak{f}_i(s)\, ds \right| \leqslant \left| \int_K (U(s) - U(s_0)) \mathfrak{f}_i(s)\, ds \right| +$$

$$+ \left| \int_{G-K} (U(s) - U_0(s)) \mathfrak{f}_i(s)\, ds \right| \leqslant \frac{\varepsilon}{\alpha+2} \int_K |\mathfrak{f}_i(s)|\, ds +$$

$$+ \int_{G-K} (|U(s)| + |U_0(s)|) |\mathfrak{f}_i(s)|\, ds \leqslant \frac{\varepsilon}{\alpha+2} \alpha + 2 \frac{\varepsilon}{\alpha+2} = \varepsilon$$

deci $U \in V(U_0; \mathfrak{f}_1, \ldots, \mathfrak{f}_p; \varepsilon)$ și deci

$$V\left(U_0; K; \frac{\varepsilon}{\alpha+2}\right) \subset V(U_0; \mathfrak{f}_1, \ldots, \mathfrak{f}_p; \varepsilon),$$

adică topologia τ' este mai fină decît topologia τ.

Reciproc, fie $V(U_0; K; \varepsilon)$ o vecinătate oarecare a lui U_0 în topologia τ'. Să arătăm că această vecinătate este o mulțime deschisă în topologia τ.

Mulțimea $W = \{a \in A \mid |a| < \varepsilon\}$ este deschisă în A și

$$V(U_0; K; \varepsilon) = \{U \mid U \in \hat{G}_A, \mid U(s) - U_0(s)\mid < \varepsilon, \quad \text{pentru } s \in K\} =$$

$$= \{U \mid U \in \hat{G}_A, \; U(s) - U_0(s) \in W, \quad \text{pentru } s \in K\}$$

iar aplicația $(U, s) \to U(s) - U_0(s)$ a lui $\hat{G}_A \times G$ în A este continuă, pentru topologia τ pe $\hat{G}_A$. Conform lemei 1, § 22, mulțimea $V(U_0; K; \varepsilon)$ este deschisă pentru topologia τ. Urmează că topologia τ este mai fină decît topologia τ' deci cele două topologii sînt echivalente.

Pe mulțimea $\hat{G}_A$ se poate defini în mod natural o structură de grup astfel: pentru orice reprezentări $U', U'' \in \hat{G}_A$ definim produsul $U = U'U''$ prin egalitatea

$$U(s) = U'(s)\, U''(s), \qquad \text{pentru } s \in G.$$

Se verifică imediat că

$$U(st) = U(s)\, U(t), \qquad \text{pentru } s, t \in G$$

și

$$U(e) = 1,$$

unde 1 este elementul unitate din A. Deoarece U' și U'' sînt continue, U este o reprezentare continuă. Avem apoi

$$|U(s)| \leqslant |U'(s)|\,|U''(s)| \leqslant 1, \qquad \text{pentru orice } s \in G$$

deci U este mărginită. Atunci (prop. 3) avem de asemenea $|U(s)| \geqslant 1$ pentru orice $s \in G$ și deci $|U(s)| \equiv 1$, adică $U \in \hat{G}_A$.

Propoziția 14. *Produsul $U'U''$ definește pe $\hat{G}_A$ o structură de grup comutativ compatibilă cu topologia τ pe $\hat{G}_A$.*

Produsul este asociativ pentru că produsul în algebra A este asociativ.

Reprezentarea $U_0(s) \equiv 1$ aparține lui $\hat{G}_A$ și este element unitate pentru acest produs. Dacă $U \in \hat{G}_A$, atunci funcția U^{-1} definită pe G prin egalitatea

$$U^{-1}(s) = U(s)^{-1} = U(s^{-1})$$

este o reprezentare din $\hat{G}_A$ și este inversa reprezentării U. Avem apoi $U'(s)\, U''(s) = U''(s)\, U'(s)$, deci $U'U'' = U''U'$. Așadar $\hat{G}_A$ este un grup comutativ.

Să notăm cu U_0 elementul unitate din $\hat{G}_A$ ($U_0(s) \equiv 1$, unde 1 este elementul unitate din A) şi să considerăm sistemul fundamental de vecinătăţi ale lui U_0, format din mulţimile de forma

$$V(K;\ \varepsilon) = \{U \in \hat{G}_A,\ |U(s) - 1| < \varepsilon,\ \text{pentru } s \in K\},$$

unde $\varepsilon > 0$ şi K sînt mulţimi compacte. Avem

$$V\left(K; \frac{\varepsilon}{2}\right)\ V\left(K; \frac{\varepsilon}{2}\right) \subset V(K;\ \varepsilon).$$

Într-adevăr, dacă $U' \in V\left(K; \frac{\varepsilon}{2}\right)$ şi $U'' \in V\left(K; \frac{\varepsilon}{2}\right)$, atunci

$$|U'(s) - 1| < \frac{\varepsilon}{2} \text{ şi } |U''(s) - 1| < \frac{\varepsilon}{2}, \text{ pentru } s \in K$$

de unde

$$|U'(s)\ U''(s) - 1| = |U'(s)\ U''(s) - U'(s) + U'(s) - 1| \leqslant$$

$$\leqslant |U'(s)|\ |U''(s) - 1| + |U'(s) - 1| < \varepsilon$$

deci $U'U'' \in V(K; \varepsilon)$.

Aşadar, aplicaţia $(U', U'') \to U'U''$ este continuă. Avem apoi

$$[V(K^{-1};\ \varepsilon)]^{-1} \subset V(K;\ \varepsilon).$$

Într-adevăr, dacă $U \in [V(K^{-1};\ \varepsilon)]^{-1}$, atunci $U^{-1} \in V(K^{-1};\ \varepsilon)$, deci

$$|U^{-1}(s) - 1| < \varepsilon, \text{ pentru } s \in K^{-1}.$$

Atunci, pentru orice $s \in K$ avem $s^{-1} \in K^{-1}$ deci $|U^{-1}(s^{-1}) - 1| < \varepsilon$. Dar $U^{-1}(s^{-1}) = U(s)$ şi deci

$$|U(s) - 1| < \varepsilon, \text{ pentru } s \in K$$

adică $U \in V(K; \varepsilon)$.

Aşadar, aplicaţia $U \to U^{-1}$ este continuă. Cu aceasta propoziţia este demonstrată.

§ 27. ANALIZĂ ARMONICĂ PE GRUPURI COMUTATIVE LOCAL COMPACTE

1. Grupul caracterelor

În acest paragraf vom presupune că G este un grup local compact *comutativ*. Vom nota în continuare cu $\mathcal{L}^1$ spaţiul funcţiilor *complexe* integrabile, definite pe G.

Reprezentările *continue* şi *mărginite* ale lui G în C vor fi numite *caractere* ale grupului G. Vom nota cu $\hat{G}$ (în loc de $\hat{G}_c$) mulţimea caracterelor lui G. Grupul $\hat{G}$ cu topologia τ va fi numit *dualul* lui G. Conform observaţiei 2° după propoziţia 3, § 26, pentru orice caracter $\chi \in \hat{G}$ avem $|\chi(s)| \equiv 1$. Aşadar, un caracter χ al grupului G este o funcţie complexă continuă definită pe G astfel încît

$$\chi(st) = \chi(s)\ \chi(t) \text{ şi } |\chi(s)| \equiv 1.$$

Mulţimea $\hat{G}$ a caracterelor lui G este în corespondenţa biunivocă cu mulţimea $\mathcal{H}$ a funcţionalelor continue, liniare şi multiplicative T definite pe $L^1(G)$. Corespondenţa este dată de egalitatea

$$T(f) = \int f(s)\,\chi(s)\ ds, \text{ pentru } f \in L^1.$$

Deoarece $|\chi(s)| \equiv 1$, conform corolarului 4 al propoziţiei 10, § 26, avem $\|T\| = 1$ pentru orice $T \in \mathcal{H}$, deci $\mathcal{H}$ este o submulţime în sfera unitate a dualului lui $L^1(G)$.

Propoziţia 1. *Dualul $\hat{G}$ al grupului G este un grup comutativ local compact.*

Faptul că $\hat{G}$ este un grup topologic comutativ a fost demonstrat în propoziţia 14, § 26. Rămîne să arătăm că τ este o topologie de spaţiu local compact pe $\hat{G}$.

Pentru aceasta este suficient să arătăm că $\mathcal{H}$ este un spaţiu local compact cu topologia indusă de topologia slabă pe $(L^1)'$. Sfera unitate S din $(L^1)'$ este compactă pentru topologia slabă şi $\mathcal{H} \subset S$.

Urmează că $\overline{\mathcal{H}}$ este o mulţime slab compactă. Fie atunci $T \neq 0$ o funcţională din $\overline{\mathcal{H}}$. Aceasta înseamnă că pentru fiecare $\varepsilon > 0$ şi $f, g \in L^1$ există o reprezentare $T' \in \mathcal{H}$ astfel încît să avem

$$|T(f) - T(f')| < \frac{\varepsilon}{3}, |T(g) - T'(g)| < \frac{\varepsilon}{3} \text{ şi } |T(f*g) - T'(f*g)| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Dar $T'(f*g) = T'(f)\ T'(g)$ deci

$$|T(f*g) - T(f)\ T(g)| \leqslant |T(f*g) - T'(f*g)| +$$
$$+ |T'(f)\ T'(g) - T'(f)\ T(g)| + |T'(f)\ T(g) - T(f)\ T(g)| < \varepsilon.$$

Cum ε este arbitrar, rezultă că $T(f*g) = T(f)\ T(g)$ deci $T \in \mathcal{H}$.

Dacă $0 \in \mathcal{H}$, atunci $\mathcal{H} = \overline{\mathcal{H}}$ şi deci $\mathcal{H}$ este compact. Dacă $0 \in \overline{\mathcal{H}}$, atunci $\overline{\mathcal{H}} = \mathcal{H} \cup \{0\}$ şi deci $\mathcal{H}$ este local compact. Aşadar, în ambele cazuri $\mathcal{H}$ este local compact. Urmează că $\hat{G}$, cu topologia τ, este local compact, şi propoziţia este demonstrată.

2. Transformata Fourier

În continuare vom nota cu $\hat{x}$ caracterele grupului G și cu $< x, \hat{x} >$ valoarea caracterului $\hat{x}$ într-un punct x din G. Conform propoziției 12, § 26, aplicația $(x, \hat{x}) \to < x, \hat{x} >$ a produsului $G \times \hat{G}$ în C este continuă. Avem

$$< xy, \hat{x} > = < x, \hat{x} > < y, \hat{x} >,$$
$$< x, \hat{x}\hat{y} > = < x, \hat{x} > < x, \hat{y} >$$

și

$$| < x, \hat{x} > | = 1.$$

Transformata Fourier a unei *măsuri* complexe $\mu \in \mathcal{M}^1(G)$ este *funcția* complexă $\hat{\mu}$ definită pe $\hat{G}$ prin egalitatea

$$\hat{\mu}(\hat{x}) = \int < x, \hat{x} > \mathrm{d}\mu(x), \text{ pentru } \hat{x} \in \hat{G}.$$

Să observăm că aplicația $x \to < x, \hat{x} >$ este continuă și mărginită, deci integrala are sens.

În particular, dacă μ este de bază $\mathrm{d}x$ și densitate $f \in L^1(G)$, atunci transformata Fourier a lui μ se notează $\hat{f}$ și se numește, de asemenea, transformata Fourier a lui f:

$$\hat{f}(\hat{x}) = \int < x, \hat{x} > f(x)\, \mathrm{d}x, \text{ pentru } \hat{x} \in \hat{G}.$$

Observație. Dacă notăm cu $T_{\hat{x}} : L^1 \to C$ reprezentarea corespunzătoare caracterului $\hat{x}$:

$$T_{\hat{x}}(f) = \int < x, \hat{x} > f(x)\, \mathrm{d}x, \text{ pentru } f \in L^1,$$

deducem că transformata Fourier $\hat{f}$ se definește prin egalitatea

$$\hat{f}(\hat{x}) = T_{\hat{x}}(f).$$

Propoziția 2. *Transformata Fourier* $\hat{\mu}$ *a oricărei măsuri* $\mu \in \mathcal{M}^1(G)$ *este o funcție uniform continuă și mărginită pe* $\hat{G}$ *și avem*

$$|\hat{\mu}(\hat{x})| \leqslant \|\mu\|, \text{ pentru } \hat{x} \in \hat{G}.$$

Într-adevăr, avem în primul rînd

$$|\hat{\mu}(\hat{x})| = \left|\int < x, \hat{x} > \mathrm{d}\mu(x)\right| \leqslant \int |< x, \hat{x} >| \,\mathrm{d}\,|\mu|\,(x) = \int \mathrm{d}\,|\mu| = \|\mu\|$$

pentru orice $\hat{x} \in \hat{G}$.

Fie acum $\varepsilon > 0$. Există o mulțime compactă $K \subset G$ astfel încît

$$\int_{G-K} \mathrm{d}\,|\mu| < \frac{\varepsilon}{4}.$$

Atunci

$$|\hat{\mu}(\hat{x}) - \hat{\mu}(\hat{y})| \leqslant \int_K |< x, \hat{x} > - < x, \hat{y} >| \,\mathrm{d}\,|\mu|\,(x) +$$

$$+ \int_{G-K} |< x, \hat{x} > - < x, \hat{y} >| \,\mathrm{d}\,|\mu|\,(x) \leqslant$$

$$\leqslant \int_K |1 - < x, \hat{y}\hat{x}^{-1} >| \,\mathrm{d}\,|\mu|\,(x) + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Dar pentru $\hat{y}\hat{x}^{-1} \in V = V\left(\hat{e}, K, \frac{\varepsilon}{2\|\mu\|}\right)$, avem

$$|< x, \hat{y}\hat{x}^{-1} > - 1| < \frac{\varepsilon}{2\|\mu\|}, \text{ pentru } x \in K,$$

deci

$$|\hat{\mu}(\hat{x}) - \hat{\mu}(\hat{y})| \leqslant \varepsilon, \text{ pentru } \hat{y}\hat{x}^{-1} \in V$$

adică $\hat{\mu}$ este uniform continuă pe $\hat{G}$ și propoziția este demonstrată.

Pentru funcții din L^1, propoziția 2 se poate *preciza*:

Propoziția 3. *Dacă* $f \in L^1(G)$ *atunci* $\hat{f} \in \mathcal{K}(\hat{G})$ *și* $\|\hat{f}\|_\infty \leqslant \|f\|_1$.

Din propoziția 2 rezultă că $\hat{f}$ este uniform continuă pe $\hat{G}$ și $\|\hat{f}\|_\infty \leqslant \|f\|_1$. Rămîne să arătăm că $\hat{f}$ se anulează la infinit, dacă $\hat{G}$ nu este compact.

Fie $\varepsilon > 0$. Notînd cu S sfera unitate din $(L^1)'$, mulțimea $\{T \in S \mid |T(f)| \geqslant \varepsilon\}$ este slab compactă. Să notăm cu $\hat{K}$ mulțimea corespunzătoare a caracterelor $\hat{x} \in \hat{G}$:

$$\hat{K} = \{\hat{x} \in \hat{G} \mid \left|\int < x, \hat{x} > f(x)\,\mathrm{d}x\right| \geqslant \varepsilon\}.$$

Mulțimea $\hat{K}$ este compactă și pentru $\hat{x} \in \hat{K}$ avem

$$|\hat{f}(\hat{x})| = \left|\int < x, \hat{x} > f(x)\ dx\right| < \varepsilon,$$

deci $\hat{f}$ se anulează la infinit și propoziția este demonstrată.

Observație. Se poate defini prin aceleași formule, transformata Fourier a măsurilor $m \in \mathcal{M}_E^1$ și a funcțiilor $f \in \mathcal{L}_E^1$. Lăsăm pe seama cititorului extinderea la acest caz a rezultatelor privind măsurile și funcțiile scalare.

Propoziția 4. *Dacă A este o algebră involutivă densă în L^1, atunci mulțimea $\hat{A} = \{\hat{f} | f \in A\}$ este o algebră autoadjunctă, densă în $\mathcal{K}(\hat{G})$.*

Din egalitatea

$$\hat{f}(\hat{x}) = \int < x, \hat{x} > f(x)\ dx$$

deducem

$$\widehat{f+g} = \hat{f} + \hat{g},\quad \widehat{\alpha f} = \alpha \hat{f} \text{ și } \widehat{f*g} = \hat{f}\hat{g}$$

pentru $f, g \in A$ și $\alpha \in C$, deci $\hat{A}$ este o algebră. De asemenea, dacă $f \in A$, atunci $\tilde{f} \in A$, deci dacă $\hat{f} \in \hat{A}$ atunci $\overline{\hat{f}} = \hat{\tilde{f}} \in \hat{A}$, deci $\hat{A}$ este autoadjunctă.

Algebra $\hat{A}$ separă punctele lui $\hat{G}$, deoarece, dacă $\hat{x}_1 \neq \hat{x}_2$, atunci există o funcție $f \in A$ cu

$$\int < x, \hat{x}_1 > f(x)\ dx \neq \int < x, \hat{x}_2 > f(x)\ dx$$

(în caz contrar am avea $\int < x, \hat{x}_1 > f(x)\ dx = \int < x, \hat{x}_2 > f(x)\ dx$ pentru orice $f \in A$, deci pentru orice $f \in L^1$, de unde ar rezulta că $< x, \hat{x}_1 > = < x, \hat{x}_2 >$ aproape peste tot, deci peste tot, deoarece $\hat{x}_1$ și $\hat{x}_2$ sînt continue).

Așadar $\hat{f}(\hat{x}_1) \neq \hat{f}(\hat{x}_2)$ și $\hat{f} \in \hat{A}$, deci $\hat{A}$ separă punctele lui $\hat{G}$.

Dacă $\hat{G}$ este compact, atunci $\mathcal{C}(\hat{G}) = \mathcal{K}(\hat{G})$ și conform teoremei lui Weierstrass-Stone, $\hat{A}$ este densă în $\mathcal{C}(\hat{G})$.

Dacă $\hat{G}$ nu este compact, adăugînd punctul ω de la infinit, spațiul $K = \hat{G} \cup \{\omega\}$ este compact iar algebra generată de $\hat{A}$ și de funcția identic egală cu 1 pe K, este densă în $\mathcal{C}(K)$, conform teoremei lui Weierstrass-Stone. Urmează că $\hat{A}$ este densă în algebra $\mathcal{K}(\hat{G})$ a funcțiilor care se anulează în ω. Propoziția este astfel demonstrată.

Observație. În general avem $\hat{A} \neq \overline{\mathcal{K}(\hat{G})}$.

Propoziția 5 *Pentru orice funcție* $f \in L^1(G)$ *avem*

$$\|\hat{f}\|_\infty = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\|f^n\|_1}$$

unde $f^n = f*f*\ldots*f$, (n *factori*).

Pentru orice n avem

$$|\hat{f}(\hat{x})|^n = |\hat{f}^n(\hat{x})| = |\widehat{f^n}(\hat{x})| = \left|\int < x, \hat{x} > f^n(x)\,dx\right| \leqslant$$

$$\leqslant \int |<x, \hat{x}>|\,|f^n(x)|\,dx \leqslant \|f^n\|_1$$

deci $|\hat{f}(\hat{x})| \leqslant \sqrt[n]{\|f^n\|_1}$ și deci $\|\hat{f}\|_\infty \leqslant \sqrt[n]{\|f^n\|_1}$, de unde

$$\|\hat{f}\|_\infty \leqslant \liminf_{n\to\infty} \sqrt[n]{\|f^n\|_1}.$$

Rămîne să demonstrăm inegalitatea

$$\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{\|f^n\|_1} \leqslant \|\hat{f}\|_\infty.$$

Din teoria algebrelor Banach comutative, se știe că pentru orice $|\lambda| < \|f\|_\infty^{-1}$, λf are cvasiinvers *) $(\lambda f)' = \sum_{n=1}^{\infty} (\lambda f)^n$, care este o funcție analitică de λ în cercul $|\lambda| < \|f\|_\infty^{-1}$. Deoarece seria $\sum_{n=1}^{\infty} (\lambda f)^n$ este convergentă în acest cerc, urmează că $\lambda^n f^n \to 0$, deci șirul $(\lambda^n f^n)$ este mărginit. Există $B > 0$ cu $|\lambda|^n \|f^n\|_1 \leqslant B$, deci $\sqrt[n]{\|f^n\|_1} \leqslant \frac{\sqrt[n]{B}}{|\lambda|} \leqslant \sqrt[n]{B}\,\|\hat{f}\|_\infty$, de unde $\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{\|f^n\|_1} \leqslant \|f\|_\infty$. Urmează că șirul $(\sqrt[n]{\|f^n\|_1})$ este convergent și

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\|f^n\|_1} = \|\hat{f}\|_\infty.$$

3. Funcții de tip pozitiv. Teorema lui Bochner

O funcțională liniară Φ definită pe o algebră A cu involuție $x \to x^*$ este de *tip pozitiv* dacă $\Phi(xx^*) \geqslant 0$ pentru orice $x \in A$. Dacă Φ este o funcțională de tip pozitiv pe A, atunci

$$|\Phi(xy^*)| \leqslant \sqrt{\Phi(xx^*)}\,\sqrt{\Phi(yy^*)}, \text{ pentru orice } x \text{ și } y \text{ din } A.$$

*) Un element x al unei algebre comutative A este cvasiinversul unui element $y \in A$, dacă $x + y + xy = 0$.

Într-adevăr, să punem

$$< x, y > = \Phi(xy^*).$$

Funcţionala $< x, y >$ este liniară în x şi antiliniară în y. Pe de altă parte

$$\Phi((x + \lambda y)(x + \lambda y)^*) \geqslant 0$$

deci $\lambda\Phi(yx^*) + \bar{\lambda}\,\Phi(xy^*)$ este reală pentru orice λ şi deci

$$\Phi(yx^*) = \overline{\Phi(xy^*)},$$

adică

$$< y, x > = \overline{< x, y >}.$$

Aşadar $< x, y >$ are toate proprietăţile produsului scalar, cu deosebirea că putem avea $< x, x > = 0$ pentru $x \neq 0$. Inegalitatea lui Schwarz

$$| < x, y > | \leqslant \sqrt{< x, x >}\ \sqrt{< y, y >}$$

se scrie atunci

$$|\Phi(xy^*)| \leqslant \sqrt{\Phi(xx^*)}\ \sqrt{\Phi(yy^*)}.$$

Dacă A are element unitate e, punînd $y = e$ în inegalitatea precedentă, deducem

$$|\Phi(x)|^2 \leqslant k\,\Phi(xx^*),$$

unde $k = \Phi(e)$.

De asemenea, dacă în egalitatea $\Phi(yx^*) = \overline{\Phi(xy^*)}$ punem $y = e$ deducem

$$\Phi(x^*) = \overline{\Phi(x)}.$$

Spunem că o funcţională de tip pozitiv Φ pe A este *prelungibilă* dacă

$$|\Phi(x)|^2 \leqslant k\,\Phi(xx^*) \text{ şi } \Phi(x^*) = \overline{\Phi(x)}.$$

Justificarea acestei denumiri rezultă din lema următoare:

Lema 1. *Fie A o algebră involutivă fără unitate, A_e algebra obţinută prin adăugarea unităţii. O funcţională de tip pozitiv Φ pe A se poate prelungi la o funcţională de tip pozitiv Φ' pe A_e dacă şi numai dacă Φ este prelungibilă.*

Dacă Φ se poate prelungi la o funcţională de tip pozitiv Φ' pe A_e atunci

$$|\Phi'(x)|^2 \leqslant k\,\Phi'(xx^*) \text{ şi } \Phi'(x^*) = \overline{\Phi'(x)}, \text{ pentru } x \in A_e$$

şi deci

$$|\Phi(x)|^2 \leqslant k\,\Phi(xx^*) \text{ şi } \Phi(x^*) = \overline{\Phi(x)}, \text{ pentru } x \in A$$

deci Φ este prelungibilă.

Reciproc, să presupunem că Φ este prelungibilă. Să definim

$$\Phi'(x + \lambda e) = \Phi(x) + \lambda k, \text{ pentru } x \in A \text{ şi } \lambda \in C.$$

Φ' este o funcţională liniară pe A_e care coincide cu Φ pe A. Avem apoi

$$\Phi'((x + \lambda e)(x + \lambda e)^*) = \Phi(xx^*) + 2\,\mathrm{Re}\,\bar{\lambda}\,\Phi(x) + |\lambda|^2 k \geqslant$$

$$\geqslant \Phi(xx^*) - 2|\lambda|\sqrt{k}\sqrt{\Phi(xx^*)} + |\lambda|^2 k = [\sqrt{\Phi(xx^*)} - |\lambda|\sqrt{k}]^2 \geqslant 0,$$

deci Φ' este de tip pozitiv pe A_e.

Lema 2. *Fie Φ o funcţională de tip pozitiv pe A. Dacă A este o algebră Banach cu involuţie continuă şi dacă Φ este prelungibilă, atunci Φ este continuă.*

Să considerăm algebra A_e obţinută din A prin adăugarea unităţii. A_e este de asemenea o algebră Banach, iar involuţia de pe A se prelungeşte la o involuţie continuă pe A_e. Funcţionala Φ se prelungeşte la o funcţională de tip pozitiv pe A_e, notată tot Φ.

Fie $x \in A_e$ cu $|x| < 1$. Atunci $e - x$ posedă rădăcină pătrată $\sqrt{e - x}$. Dacă x este simetric ($x^* = x$), atunci $y = \sqrt{e - x}$ este simetric. Atunci $\Phi(e - x) = \Phi(yy^*) \geqslant 0$, de unde $\Phi(x) \leqslant \Phi(e)$. În mod analog $\Phi(-x) \leqslant \Phi(e)$, deci $|\Phi(x)| \leqslant \Phi(e)$, dacă $|x| < 1$ şi $x^* = x$.

Fie acum x un element oarecare din A. Avem

$$x = \frac{1}{2}[(x + x^*) - i(i(x - x^*))]$$

iar $x + x^*$ şi $i(x - x^*)$ sînt simetrici. Dacă B este astfel încît $|x^*| \leqslant B|x|$ pentru orice $x \in A_e$, atunci

$$|\Phi(x)| \leqslant \sqrt{2}\,\Phi(e) \quad \text{pentru} \quad |x| < \frac{2}{B+1},$$

deci Φ este continuă.

În continuare vom considera funcţionale de tip pozitiv pe algebrele involutive $\mathcal{K}(G)$ şi $L^1(G)$ cu involuţia $f \to \tilde{f} = \check{\bar{f}}$.

O măsură complexă μ de tip pozitiv (nu neapărat mărginită) se notează $\mu \gg 0$ şi este deci caracterizată de inegalitatea

$$\mu(f * \tilde{f}) \geqslant 0, \text{ pentru orice } f \in \mathcal{K}(G).$$

Conform propoziţiei 22, § 24, avem

$$\mu(f * \tilde{f}) = \check{(\mu * (f * \tilde{f}))}(e) = (\mu * \check{f} * \check{\tilde{f}})(e)$$

deci $\mu \gg 0$ dacă şi numai dacă

$$(\mu * f * \tilde{f})(e) \geqslant 0, \text{ pentru orice } f \in \mathcal{K}(G).$$

Exemple. 1) *Măsura Haar* $\mathrm{d}x$ *este de tip pozitiv.*
Într-adevăr

$$\int f*\tilde{f}(x)\,\mathrm{d}x = \int \mathrm{d}x \int f(y)\,\tilde{f}(y^{-1}x)\,\mathrm{d}x = \int f(y)\,\mathrm{d}y \int \overline{f(x^{-1}y)}\,\mathrm{d}x =$$

$$= \int f(y)\,\mathrm{d}y \int \overline{f(x)}\,\mathrm{d}x = \int f(y)\,\mathrm{d}y \overline{\int f(x)\,\mathrm{d}x} = \left|\int f(x)\,\mathrm{d}x\right|^2 \geqslant 0.$$

2) *Măsura* ε_e *este de tip pozitiv.*
Într-adevăr

$$\varepsilon(f*\tilde{f}) = (f*\tilde{f})(e) = \int f(y)\,\tilde{f}(ey^{-1})\,\mathrm{d}y =$$

$$= \int f(y)\,\overline{f(y)}\,\mathrm{d}y = \int |f(y)|^2\,\mathrm{d}y \geqslant 0.$$

Spunem că o funcţie complexă $\varphi : G \to C$ *este de tip pozitiv* şi scriem $\varphi \gg 0$, dacă φ este local integrabilă şi dacă măsura $\varphi\,\mathrm{d}x$ este de tip pozitiv. Despre clasa de echivalenţă φ vom spune de asemenea că este o funcţie de tip pozitiv.

Aşadar, o funcţie local integrabilă $\varphi : G \to C$ este de tip pozitiv dacă şi numai dacă

$$\int (f*\tilde{f})(x)\ \varphi(x)\,\mathrm{d}x \geqslant 0, \text{ pentru } f \in \mathcal{K}(G).$$

Dar

$$\int (f*\tilde{f})(x)\,\varphi(x)\,\mathrm{d}x = \int \varphi(x)\,\mathrm{d}x \int \tilde{f}(y)\,f(y^{-1}x)\,\mathrm{d}y =$$

$$= \int \overline{f(y^{-1})}\,\mathrm{d}y \int f(x)\,\varphi(xy)\,\mathrm{d}x = \iint \varphi(xy)\,f(x)\,\overline{f(y^{-1})}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$

Rezultă că o funcţie local integrabilă $\varphi : G \to C$ este de tip pozitiv, dacă şi numai dacă

$$\iint \varphi(xy)\,f(x)\,\overline{f(y^{-1})}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \geqslant 0, \text{ pentru } f \in \mathcal{K}(G).$$

Exemple. 3) *Orice caracter* $\hat{x} \in \hat{G}$ *este o funcţie de tip pozitiv pe* G.

Într-adevăr, $\hat{x}$ este o funcţie continuă şi mărginită pe G, deci este local integrabilă. Pentru orice funcţie $f \in \mathcal{K}(G)$ avem

$$\iint \langle xy, \hat{x}\rangle f(x)\overline{f(y^{-1})}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int \langle x, \hat{x}\rangle f(x)\,\mathrm{d}x \overline{\int \langle y^{-1}, \hat{x}\rangle f(y^{-1})\,\mathrm{d}y} =$$

$$= \int \langle x, \hat{x}\rangle f(x)\,\mathrm{d}x \overline{\int \langle y, \hat{x}\rangle f(y)\,\mathrm{d}y} \geqslant 0$$

deci $\hat{x}$ este de tip pozitiv.

4) *Pentru orice funcție* $g \in \mathcal{L}^1(G)$, *funcția* $g*\tilde{g}$ *este de tip pozitiv.* Într-adevăr, $g*\tilde{g} \in \mathcal{L}^1(G)$, deci $g*\tilde{g}$ este local integrabilă.

Punînd $d\mu = (g*\tilde{g})\,dx$, pentru orice funcție $f \in \mathcal{K}(G)$ avem

$$(\mu*f*\tilde{f})(e) = (g*\tilde{g}*f*\tilde{f})(e) = ((f*g)*(f*\tilde{g}))(e) = (h*\tilde{h})(e),$$

unde am notat $h = f*g$. Mai departe

$$(h*\tilde{h})(e) = \int h(y^{-1})\, \overline{h(y^{-1})}\, dy = \int h(y)\, \overline{h(y)}\, dx \geqslant 0,$$

deci $\mu(f*\tilde{f}) \geqslant 0$.

Rezultă că μ deci și $g*\tilde{g}$ este de tip pozitiv.

O funcțională liniară Φ definită pe algebra L^1 este de tip pozitiv dacă

$$\Phi(f*\tilde{f}) \geqslant 0, \text{ pentru } f \in L^1.$$

Propoziția 6 *O funcțională liniară de tip pozitiv* Φ *pe* $L^1(G)$ *este continuă, dacă și numai dacă este prelungibilă.*

Dacă Φ este prelungibilă, știm deja că Φ este continuă (lema 2).

Să presupunem acum că Φ este continuă. Fie (u) unitatea aproximativă în L^1. Atunci

$$|\Phi(f)|^2 = \lim_u |\Phi(f*u)|^2 \leqslant \Phi(f*\tilde{f}) \limsup_u \Phi(u*\tilde{u}) \leqslant \|\Phi\|\, \Phi(f*\tilde{f})$$

deoarece $\Phi(u*\tilde{u}) \leqslant \|\Phi\|\, \|u*\tilde{u}\|_1$, iar

$$\|u*\tilde{u}\|_1 = \int u*\tilde{u}\,(x)\,dx = \int dx \int u(xy)\,\tilde{u}(y^{-1})\,dy =$$

$$= \int \overline{u(y)}\,dy \int u(xy)\,dx = \overline{\int u(y)\,dy \int u(x)dx} = 1.$$

Avem de asemenea

$$\Phi(\tilde{f}) = \lim_u \Phi(\tilde{f}*u) = \lim_u \overline{\Phi(\tilde{u}*f)} = \overline{\Phi(f)}$$

deci Φ este prelungibilă, și propoziția este demonstrată.

Propoziția 7. *Există o corespondență biunivocă între mulțimea funcționalelor liniare continue de tip pozitiv* $\Phi : L^1(G) \to C$ *și mulțimea funcțiilor de tip pozitiv* φ *din* $L^\infty(G)$, *dată de egalitatea*

$$\Phi(f) = \int f(x)\,\varphi(x)\,dx, \text{ pentru } f \in L^1(G).$$

Fie întîi o funcție de tip pozitiv $\varphi \in L^\infty(G)$. Aceasta înseamnă că măsura $d\nu = \varphi\, dx$ este de tip pozitiv. O funcție $f : G \to C$ este ν-integrabilă dacă și numai dacă $f\varphi$ este dx-integrabilă. În particular, pentru orice funcție $f \in L^1(G)$, funcția $f\varphi$ este dx-integrabilă, deci f este ν-integrabilă și

$$\nu(f) = \int f(x)\ \varphi(x)\ dx.$$

Să notăm cu Φ restricția funcționalei $f \to \nu(f)$ la $L^1(G)$. Așadar,

$$\Phi(f) = \int f(x)\ \varphi(x)\ dx, \text{ pentru } f \in L^1$$

și Φ este continuă iar $\|\Phi\| = \|\varphi\|_\infty$.

Fie $f \in L^1$ și (f_n) un șir de funcții din $\mathcal{K}(G)$ convergent în medie către f:

$$\|f - f_n\|_1 \to 0.$$

Atunci $\|\tilde{f} - \tilde{f}_n\|_1 \to 0$ și $\|f * \tilde{f} - f_n * \tilde{f}_n\|_1 \to 0$. Pentru fiecare n avem

$$\Phi(f_n * \tilde{f}_n) = \nu(f_n * \tilde{f}_n) \geqslant 0.$$

Deoarece Φ este continuă, deducem că

$$\Phi(f_n * \tilde{f}_n) \to \Phi(f * \tilde{f})$$

și deci

$$\Phi(f * \tilde{f}) \geqslant 0.$$

Reciproc, fie $\Phi : L^1 \to C$ o funcțională liniară continuă de tip pozitiv. Aceasta înseamnă că

$$\Phi(f * \tilde{f}) \geqslant 0, \text{ pentru } f \in L^1$$

și există o funcție $\varphi \in L^\infty$ astfel încît

$$\Phi(f) = \int f(x)\ \varphi(x)\ dx, \text{ pentru } f \in L^1$$

și $\|\Phi\| = \|\varphi\|_\infty$.

Dacă notăm cu ν restricția lui la Φ la $\mathcal{K}(G)$:

$$\nu(f) = \int f(x)\ \varphi(x)\ dx, \text{ pentru } f \in \mathcal{K}(G),$$

deducem că ν este de tip pozitiv:

$$\nu(f * \tilde{f}) = \Phi(f * \tilde{f}) \geqslant 0, \text{ pentru } f \in \mathcal{K}(G)$$

iar pe de altă parte $d\nu = \varphi\, dx$, deci φ este de tip pozitiv.

Corolar. *Pentru orice funcție de tip pozitiv* $\varphi \in L^\infty$ *avem* $\widetilde{\varphi} = \varphi$.

Într-adevăr, fie Φ funcționala liniară continuă de tip pozitiv, definită pe L^1 prin egalitatea

$$\Phi(f) = \int f(x)\ \varphi(x)\ \mathrm{d}x, \text{ pentru } f \in L^1(G).$$

Conform propoziției 6, Φ este prelungibilă, deci

$$\Phi(\widetilde{f}) = \overline{\Phi(f)}, \text{ pentru } f \in L^1$$

deci

$$\int f(x)\ \varphi(x)\ \mathrm{d}x = \Phi(f) = \overline{\Phi(\widetilde{f})} = \overline{\int \widetilde{f}(x)\ \varphi(x)\ \mathrm{d}x} =$$

$$= \int f(x^{-1})\ \overline{\varphi(x)}\ \mathrm{d}x = \int f(x)\ \overline{\varphi(x^{-1})}\ \mathrm{d}x = \int f(x)\ \widetilde{\varphi}(x)\ \mathrm{d}x$$

pentru orice $f \in L^1$. Rezultă că $\varphi(x) = \widetilde{\varphi}(x)$ aproape peste tot.

Teorema 1. (*Bochner*). *Există o corespondență biunivocă* $\varphi \longleftrightarrow \mu$ *între mulțimea funcțiilor continue de tip pozitiv* φ *din* $\mathcal{L}_\infty(G)$ *și mulțimea măsurilor pozitive și mărginite* μ *pe* $\hat{G}$, *dată de egalitatea*

$$\varphi(x) = \int < x, \hat{x} > \mathrm{d}\mu(\hat{x}).$$

Fie, întîi, μ o măsură pozitivă și mărginită pe $\hat{G}$. Să punem

$$\varphi(x) = \int < x, \hat{x} > \mathrm{d}\mu(\hat{x}), \text{ pentru } x \in G.$$

Funcția φ este *continuă* pe G. Să punem de asemenea

$$\nu(f) = \int \hat{f}(\hat{x})\ \mathrm{d}\mu(\hat{x}), \text{ pentru } f \in \mathcal{K}(G)$$

(integrala există deoarece $\hat{f} \in \overline{\mathcal{K}(\hat{G})}$ și μ este mărginită).

Deoarece

$$\hat{f}(\hat{x}) = \int < x, \hat{x} > f(x)\ \mathrm{d}x, \text{ pentru } f \in \mathcal{K}(G) \text{ și } \hat{x} \in \hat{G},$$

avem

$$\nu(f) = \int \mathrm{d}\mu(\hat{x}) \int < x, \hat{x} > f(x)\ \mathrm{d}x = \int f(x)\ \mathrm{d}x \int < x, \hat{x}, > \mathrm{d}\mu(\hat{x}) =$$

$$= \int f(x)\ \varphi(x)\ \mathrm{d}x, \text{ pentru } f \in \mathcal{K}(G).$$

Deducem că ν este o măsură de bază dx pe G şi $d\nu = \varphi\, dx$. Deoarece mulţimea $\hat{A} = \{\hat{f} \mid f \in L^1\}$ este o algebră autoadjunctă, avem

$$\widehat{f*\tilde{f}} = \hat{f}\hat{\tilde{f}} = \hat{f}\bar{\hat{f}} = |\hat{f}|^2$$

deci

$$\nu(f*\tilde{f}) = \int |\hat{f}(\hat{x})|^2 \, d\mu(\hat{x}) \geqslant 0$$

deci ν este o măsură de tip pozitiv pe G. Rezultă atunci că φ este o funcţie de tip pozitiv pe G. Avem apoi

$$|\varphi(x)| \leqslant \int |< x, \hat{x} >| \, d\mu(\hat{x}) \leqslant \|\mu\|$$

deci $\varphi \in \mathcal{L}^\infty(G)$.

Reciproc, fie $\varphi \in \mathcal{L}^\infty(G)$ o funcţie de tip pozitiv. Conform propoziţiei 7, funcţionala continuă

$$\Phi(f) = \int f(x)\, \varphi(x)\, dx, \text{ pentru } f \in L^1(G)$$

este de tip pozitiv şi $\|\Phi\| = \|\varphi\|_\infty$. Conform propoziţiei 8, pentru $f \in L^1$ avem

$$|\Phi(f)|^2 \leqslant \|\Phi\|\, \Phi(f*\tilde{f}) \leqslant \|\Phi\|^{1+\frac{1}{2}} [\Phi((f*f)^2)]^{\frac{1}{2}} \leqslant \ldots$$

$$\ldots \leqslant \|\Phi\|^{1+\frac{1}{2}+\cdots+2^{-n}} [\Phi((f*\tilde{f})^{2^n})]^{2^{-n}} \leqslant$$

$$\leqslant \|\Phi\|^{1+\frac{1}{2}+\cdots+2^{-n}} \|\Phi\|^{2^{-n}} \|(f*\tilde{f})^{2^n}\|_1^{2^{-n}}.$$

Trecînd la limită pentru $n \to \infty$, deducem

$$|\Phi(f)|^2 \leqslant \|\Phi\|^2 \|\hat{f}\hat{\tilde{f}}\|_\infty = \|\Phi\|^2 \|\hat{f}\|_\infty^2$$

deci

$$|\Phi(f)| \leqslant \|\Phi\|\, \|\hat{f}\|_\infty.$$

Pentru orice funcţie $f \in L^1(G)$ să punem

$$\mu(\hat{f}) = \Phi(f).$$

Se verifică uşor că μ este liniară pe algebra $\hat{A} = \{\hat{f} \mid f \in L^1(G)\}$. Inegalitatea precedentă se scrie

$$|\mu(\hat{f})| \leqslant \|\Phi\|\, \|\hat{f}\|_\infty$$

deci μ este continuă pe $\hat{A}$ pentru topologia convergenței uniforme. Deoarece $\hat{A}$ este densă în $\overline{\mathcal{K}(G)}$, μ se poare prelungi la o funcțională liniară continuă pe $\mathcal{K}(\hat{G})$, deci restricția sa la $\mathcal{K}(\hat{G})$ este o *măsură mărginită*, pe care o vom nota tot cu μ.

Fie $h \geqslant 0$ o funcție din $\mathcal{K}(\hat{G})$. Atunci $\sqrt{h} \in \mathcal{K}(G)$ și $\sqrt{h}$ poate fi aproximată uniform printr-un șir de funcții $(\hat{f}_n)$ din $\hat{A}$. Atunci h se aproximează uniform pe $\hat{G}$ prin șirul $(|\hat{f}_n|^2)$, deci

$$\mu(|\hat{f}_n|^2) \to \mu(h).$$

Dar $|\hat{f}_n|^2 = \hat{f}_n \bar{\hat{f}}_n = \hat{f}_n \hat{\tilde{f}}_n = \widehat{f_n * \tilde{f}_n}$ și

$$\mu(|\hat{f}_n|^2) = \mu(\widehat{f_n * \tilde{f}_n}) = \Phi(f_n * \tilde{f}_n) \geqslant 0.$$

deci $\mu(h) \geqslant 0$. Așadar μ este o măsură mărginită *pozitivă* pe $\hat{G}$. Egalitatea $\Phi(f) = \mu(\hat{f})$ se scrie, pentru $f \in \mathcal{K}(G)$, astfel:

$$\int f(x)\, \varphi(x)\, dx = \int \hat{f}(\hat{x})\, d\mu(\hat{x}) = \int d\mu(\hat{x}) \int < x, \hat{x} > f(x)\, dx =$$

$$= \int f(x)\, dx \int < x, \hat{x} > d\mu(\hat{x}).$$

Urmează că

$$\varphi(x) = \int < x, \hat{x} > d\mu(\hat{x}),$$

aproape peste tot pe G, și cu această propoziția este demonstrată.

Deoarece aplicația $\hat{x} \to \int < x, \hat{x} > d\mu(\hat{x})$ este continuă, deducem.

Corolarul 1. *Orice funcție $\varphi \in \mathcal{L}^\infty$ de tip pozitiv este egală aproape peste tot cu o funcție continuă de tip pozitiv din $\mathcal{L}^\infty$.*

Din teorema lui Bochner și propoziția 7, rezultă

Corolarul 2. *Există o corespondență biunivocă $\Phi \longleftrightarrow \mu$ între mulțimea funcționalelor liniare continue de tip pozitiv Φ pe $L^1(G)$ și mulțimea măsurilor pozitive și mărginite μ pe $\hat{G}$, dată de egalitatea*

$$\Phi(f) = \int \hat{f}(\hat{x})\, d\mu(\hat{x}), \quad \textit{pentru } f \in L^1(G).$$

Într-adevăr, din corespondența

$$\Phi(f) = \int f(x)\, \varphi(x)\, dx, \quad f \in L^1,$$

unde $\varphi \in L^\infty$ sînt funcţii de tip pozitiv, şi din corespondenţa

$$\varphi(x) = \int < x, \hat{x} > \mathrm{d}\mu(\hat{x})$$

deducem

$$\Phi(f) = \int f(x)\,\mathrm{d}x \int < x, \hat{x} > \mathrm{d}\mu(\hat{x}) =$$

$$= \int \mathrm{d}\mu(\hat{x}) \int < x, \hat{x} > f(x)\mathrm{d}x = \int \hat{f}(\hat{x})\,\mathrm{d}\mu(\hat{x}).$$

Observaţie. Sub forma enunţată în corolar, teorema lui Bochner se poate generaliza la cazul unei algebre Banach involutive.

4. Formula de inversiune. Teorema lui Plancherel

Să notăm cu P mulţimea funcţiilor de tip pozitiv din L^∞ şi cu $[L^1 \cap P]$ spaţiul vectorial generat de $L^1 \cap P$.

Propoziţia 8. *Pentru orice funcţii* $f, g \in L^2$ *avem* $f * g \in [L^1 \cap P]$.

Într-adevăr,

$$f * g = \frac{1}{4}\,[(f + \tilde{g}) * (f + \tilde{g})^\sim - (f - \tilde{g}) * (f - \tilde{g})^\sim +$$

$$+ i\,(f + i\tilde{g}) * (f + i\tilde{g})^\sim - i\,(f - i\tilde{g}) * (f - i\tilde{g})^\sim],$$

deci $f * g$ este combinaţie liniară de funcţii de forma $h * \tilde{h}$ cu $h \in L^1(G)$. Cum fiecare funcţie $h * \tilde{h}$ este de tip pozitiv (exemplul 4), din $L^1 \cap P$, urmează că $f * g \in [L^1 \cap P]$.

Propoziţia 9. *Spaţiul* $[L^1 \cap P]$ *este dens în* L^1 *şi* L^2.

Fie $g \in \mathcal{K}(G)$ şi (u) o unitate aproximativă. Avem $\lim_u u * g = g$, atît în norma spaţiului L^1 cît şi în norma spaţiului L^2. Cum $\mathcal{K}(G)$ este dens în L^1 şi L^2, urmează că mulţimea funcţiilor de forma $f * g$ cu $f, g \in \mathcal{K}(G)$ este densă în L^1 şi L^2. Cum aceste funcţii sînt conţinute în $[L^1 \cap P]$, conform propoziţiei 8, deducem că $[L^1 \cap P]$ este dens în L^1 şi L^2.

Corolar. *Mulţimea* $\{\hat{f} \mid f \in [L^1 \cap P]\}$ *este densă în* $\overline{\mathcal{K}(\hat{G})}$.

Deoarece $\tilde{\varphi} = \varphi$ pentru $\varphi \in L^1 \cap P$ (corolarul prop. 7), $[L^1 \cap P]$ este o algebră autoadjunctă densă în L^1.

Conform propoziţiei 4, funcţiile $\hat{f}$ cu $f \in [L^1 \cap P]$ formează o algebră densă în $\overline{\mathcal{K}(\hat{G})}$.

Pentru orice funcţie continuă mărginită şi integrabilă $f \in L^1 \cap \mathcal{C}^\infty$ să punem

$$\Phi(f) = f(e).$$

Mulțimea $L^1 \cap \mathscr{C}^\infty$ este un ideal în L^1 (prop. 26, § 24), deoarece $\mathscr{C}^\infty \subset L^\infty$. Dacă $f \in L^1 \cap \mathscr{C}^\infty$ atunci $\tilde{f} \in L^1 \cap \mathscr{C}^\infty$ și $f * \tilde{f} \in L^1 \cap \mathscr{C}^\infty$ și avem

$$\Phi(f * \tilde{f}) = f * \tilde{f}(e) = \int f(x)\, \tilde{f}(x^{-1})\, dx = \int |f(x)|^2\, dx \geqslant 0.$$

Așadar Φ este o funcțională liniară de tip pozitiv pe $L^1 \cap \mathscr{C}^\infty$.

Să notăm cu $\mathscr{J}$ mulțimea funcțiilor $p \in L^1 \cap \mathscr{C}^\infty$ care au proprietatea că funcționala liniară Φ_p definită pe L^1 prin egalitatea

$$\Phi_p(f) = \Phi(p * f), \text{ pentru } f \in L^1,$$

este de tip pozitiv și continuă ($p * f \in L^1 \cap \mathscr{C}^\infty$, deoarece $L^1 \cap \mathscr{C}^\infty$ este ideal).

Pentru $p \in \mathscr{J}$ și $f \in L^1$ avem

$$\Phi_p(f) = (p * f)(e) = \int f(x)\, p(x^{-1})\, dx = \int f(x^{-1})\, p(x)\, dx.$$

Se verifică imediat că dacă $p, q \in \mathscr{J}$ și $\alpha > 0$, atunci $p + q \in \mathscr{J}$ și $\alpha p \in \mathscr{J}$.

Lema 3. *Avem* $L^1 \cap P \subset \mathscr{J}$.

Într-adevăr, fie $p \in L^1 \cap P$ o funcție de tip pozitiv. Conform propoziției 7, aplicația $f \to \int f(x)\, p(x)\, dx$ este o funcțională liniară de tip pozitiv pe L^1, deci

$$\int (f * \tilde{f})(x)\, p(x)\, dx \geqslant 0, \text{ pentru } f \in L^1.$$

Atunci

$$\Phi_p(f * \tilde{f}) = \int (f * \tilde{f})(x^{-1})\, p(x)\, dx = \int (f * \tilde{f})(x)\, p(x)\, dx \geqslant 0.$$

deoarece $(f * \tilde{f})(x^{-1}) = (f * \tilde{f})(x) = (\tilde{f} * f)(x)$, deci $p \in \mathscr{J}$.

În particular, pentru orice funcție $h \in L^1 \cap L^\infty$ avem $h * \tilde{h} \in \mathscr{J}$. Într-adevăr, $h \in L^1$ și $\tilde{h} \in L^\infty$, deci (prop. 26, § 24) funcția $h * \tilde{h}$ este continuă și mărginită, din $\mathscr{C}^\infty$, iar pe de altă parte $h * \tilde{h} \in L^1$, deci $h * \tilde{h} \in L^1 \cap \mathscr{C}^\infty$. Pe de altă parte, $h * \tilde{h}$ este de tip pozitiv (exemplul 4), deci conform lemei 3, avem $h * \tilde{h} \in \mathscr{J}$.

Conform corolarului teoremei lui Bocher, pentru fiecare funcție $p \in \mathscr{J}$ există o măsură pozitivă și mărginită μ_p pe $\hat{G}$ astfel încît să avem

$$(p * f)(e) = \Phi_p(f) = \int \hat{f}(\hat{x})\, d\mu_p(\hat{x}), \text{ pentru } f \in L^1(G).$$

Dacă $p, q \in \mathscr{J}$, atunci

$$\mu_q(\hat{f}\hat{p}) = (p * q * f)(e) = \mu_p(\hat{f}\hat{q}), \text{ pentru } f \in L^1(G).$$

Deoarece mulțimea $\{\hat{f} \mid f \in L^1\}$ este densă în $\overline{\mathcal{X}(\hat{G})}$ pentru topologia convergenței uniforme, deducem

$$\mu_q(g\hat{p}) = \mu_p(g\hat{q}), \text{ pentru } g \in \overline{\mathcal{X}(\hat{G})}.$$

Lema 4. *Pentru fiecare funcție $h \in \mathcal{X}(\hat{G})$ există o funcție $p \in \mathcal{J}$ astfel încît $\hat{p}$ are margine inferioară strict pozitivă pe suportul lui h.*

Fie S_h suportul lui h. Pentru fiecare $\hat{x} \in S_h$ există o funcție $f \in \mathcal{X}(G)$ astfel încît $\hat{f}(\hat{x}) \neq 0$, deoarece mulțimea $\{\hat{f} \mid f \in \mathcal{X}(G)\}$ este densă în $\overline{\mathcal{X}(\hat{G})}$. Atunci $|\hat{f}|^2$ nu se anulează pe o vecinătate a lui $\hat{x}$, iar $|\hat{f}|^2 = (f*\tilde{f})\hat{}$. Deoarece S_h este compact, există un număr finit de funcții $f_i \in \mathcal{X}(G)$ astfel încît funcția

$$\sum_i (f_i*\tilde{f}_i)\hat{} = \sum_i |\hat{f}_i|^2$$

nu se anulează pe o vecinătate a lui S_h, deci are margine inferioară strict pozitivă pe S_h. Pentru fiecare i avem $f_i*\tilde{f}_i \in \mathcal{J}$, deci punînd $p = \sum_i (f_i*\tilde{f}_i)$, avem $p \in \mathcal{J}$ iar $\hat{p}$ este pozitivă și are margine inferioară strict pozitivă pe S_h.

Fie acum $h \in \mathcal{X}(\hat{G})$, p și q două funcții din $\mathcal{J}$ astfel încît $\hat{p}$ și $\hat{q}$ sînt pozitive și au marginea inferioară strict pozitivă pe suportul lui h. Atunci

$$g = \frac{h}{\hat{p}\hat{q}} \in \mathcal{X}(G).$$

Egalitatea

$$\mu_q(g\hat{p}) = \mu_p(g\hat{q})$$

se scrie acum

$$\mu_q\left(\frac{h}{\hat{q}}\right) = \mu_p\left(\frac{h}{\hat{p}}\right).$$

Pentru fiecare funcție $h \in \mathcal{X}(\hat{G})$ să punem

$$\mu(h) = \mu_p\left(\frac{h}{\hat{p}}\right).$$

unde $\hat{p}$ este aleasă ca mai sus, astfel încît $\frac{h}{\hat{p}} \in \mathcal{X}(\hat{G})$. Definiția lui $\mu(h)$ nu depinde de p ci numai de h. Se verifică ușor că μ este liniară pe $\mathcal{X}(G)$ iar dacă $h \geqslant 0$, luînd funcția p ca mai sus, avem $\hat{p} \geqslant 0$, deci $\frac{h}{\hat{p}} \geqslant 0$ și deci

$\mu_p\left(\frac{h}{\hat{p}}\right) \geqslant 0$. Aşadar $\mu(h) \geqslant 0$, adică μ este o măsură pozitivă pe $\hat{G}$. Vom arăta că această măsură verifică egalitatea

$$\mu(g\hat{p}) = \mu_p(g), \text{ pentru orice } p \in \mathcal{J} \text{ şi } g \in \overline{\mathcal{K}(\hat{G})}.$$

Să notăm cu S mulţimea punctelor $\hat{x} \in \hat{G}$ cu proprietatea că pentru orice vecinătate V a lui $\hat{x}$ există $p \in \mathcal{J}$ astfel încît μ_p nu este identic nulă în V. Mulţimea S este închisă şi conţine suportul $S(\mu_p)$ al fiecărei măsuri μ_p cu $p \in \mathcal{J}$.

Lema 5. *Dacă $q \in \mathcal{J}$ şi dacă $\hat{q}(\hat{x}_1) > 0$ într-un punct $x_1 \in S$, atunci $\hat{x}_1 \in S(\mu_q)$.*

Într-adevăr, să presupunem prin absurd că există o vecinătate U a lui $\hat{x}_1$ astfel încît restricţia lui μ_q la $\mathcal{K}(\hat{G}, U)$ să fie nulă. Deoarece $\hat{q}$ este continuă, se poate lua U astfel încît să fie conţinută în mulţimea deschisă

$$\left\{\hat{x} \in \hat{G} \mid \hat{q}(\hat{x}) > \frac{1}{2}\,\hat{q}(\hat{x}_1)\right\}.$$

Atunci, pentru orice $p \in \mathcal{J}$ şi orice funcţie $h \geqslant 0$ din $\mathcal{K}(\hat{G}, U)$, avem

$$0 = \int h\hat{p}\,d\mu_q = \int h\hat{q}\,d\mu_p \geqslant \frac{1}{2}\,\hat{q}(\hat{x}_1) \int h d\mu_p \geqslant 0$$

deci $\mu_p(h) = 0$ pentru $h \in \mathcal{K}_+(\hat{G}, U)$ şi $p \in \mathcal{J}$ ceea ce contrazice ipoteza că $\hat{x}_1 \in S$.

Lema 6. *Dacă $p \in \mathcal{J}$, atunci $\hat{p}(\hat{x}) \geqslant 0$ pentru orice $\hat{x} \in S$.*

Să presupunem prin absurd că există $\hat{x}_1 \in S$ cu $\hat{p}(\hat{x}_1) < 0$. Deoarece $\hat{p}$ este continuă, există o vecinătate U a lui $\hat{x}$, astfel încît să avem $\hat{p}(\hat{x}) \leqslant \frac{1}{2}\,\hat{p}(\hat{x}_1) < 0$, pentru orice $\hat{x} \in U$. Să alegem $f_1 \in L^2 \cup \mathcal{C}^\infty$ astfel încît $\hat{f}_1(\hat{x}_1) \neq 0$. O asemenea funcţie f_1 există deoarece mulţimea $\{\hat{f} \mid f \in \mathcal{K}(G)\}$ este densă în $\mathcal{K}(\hat{G})$. Atunci $q = \tilde{f}_1 * f_1 \in \mathcal{J}$ şi $\hat{q}(\hat{x}_1) > 0$. Putem alege vecinătatea U a lui $\hat{x}_1$ astfel încît să avem $\hat{q}(\hat{x}) > 0$ pentru $\hat{x} \in U$. Atunci, pentru orice funcţie pozitivă $h \in \mathcal{K}(\hat{G}, U)$ avem

$$0 \leqslant \int h\hat{q}\,d\mu_p = \int h\hat{p}\,d\mu_q < \frac{1}{2}\,\hat{p}(\hat{x}_1) \int h\,d\mu_q \leqslant 0$$

deci $\mu_q(h) = 0$ pentru orice $h \in \mathcal{K}_+(\hat{G}, U)$ şi deci $U \cap S(\mu_q) = \emptyset$. Dar

conform lemei 5, avem $\hat{x}_1 \in S(\mu_q) \cap U$, deoarece $\hat{q}(x_1) > 0$ şi am ajuns la o contradicţie.

Să observăm că, deoarece toate măsurile μ_p au suportul conţinut în S, măsura μ are de asemenae suportul conţinut în S.

Fie $p \in \mathcal{J}$ Să punem,

$$F = \{\hat{x} \in S \mid \hat{p}(\hat{x}) = 0\}, \qquad O = \{\hat{x} \in S \mid \hat{p}(\hat{x}) > 0\},$$

$$C_n = \left\{\hat{x} \in S \mid \hat{p}(\hat{x}) \geqslant \frac{1}{n}\right\}, \quad D_n = \left\{\hat{x} \in S \mid \hat{p}(\hat{x}) \leqslant \frac{1}{n+1}\right\}.$$

Deoarece $\hat{p}$ se anulează la infinit, toate mulţimile C_n sînt compacte. Pentru fiecare n există o funcţie $h_n \in \mathcal{K}(\hat{G})$ cu valori în $[0, 1]$ cu $h_n(\hat{x}) = 0$ pentru $\hat{x} \in C_n$ şi $h_n(\hat{x}) = 1$ pentru $\hat{x} \in D_n$.

Lema 7. *Avem* $\mu_p(\varphi_F g) = 0$ *pentru orice* $g \in \overline{\mathcal{K}(\hat{G})}$.

Să observăm că pe S avem $h_n \searrow \varphi_F$ şi $h_n\hat{p} \searrow 0$, deci $\mu_p(h_n\hat{p}) \searrow 0$ şi $\mu_p(h_n\hat{q}) \searrow \mu_p(\varphi_F\hat{q})$. Aşadar $\mu_p(\varphi_F\hat{q}) = 0$ pentru orice $q \in \mathcal{J}$. Algebra generată de mulţimea $\{\hat{q} \mid q \in \mathcal{J}\}$ este densă în $\mathcal{K}(\hat{G})$, deoarec $L^1 \cap P \subset \mathcal{J}$ iar $L^1 \cap P$ este densă în L^1 (prop. 4). Prin trecere la limită în egalitatea $\mu_p(\varphi_F\hat{q}) = 0$ rezultă că

$$\mu_p(\varphi_F g) = 0, \quad \text{pentru orice } g \in \overline{\mathcal{K}(\hat{G})}.$$

Lema 8. *Avem* $\mu(g\hat{p}) = \mu_p(g)$ *pentru orice* $g \in \overline{\mathcal{K}(\hat{G})}$.

Fie $g \geqslant 0$ din $\mathcal{K}(\hat{G})$. Deoarece $\hat{p}(\hat{x}) > \dfrac{1}{n+1} > 0$ pentru orice $\hat{x}$ din S pentru care $g(1 - h_n)\hat{p} \neq 0$, avem

$$\mu(g(1 - h_n)\hat{p}) = \mu_p(g(1 - h_n)).$$

Dar pe mulţimea S avem

$$g(1 - h_n)\hat{p} \nearrow g\varphi_O\hat{p} = g\hat{p} \text{ şi } g(1 - h_n) \nearrow g\varphi_O$$

şi deci trecînd la limită în egalitatea precedentă,

$$\mu(g\hat{p}) = \mu_p(g\varphi_O) = \mu_p(g) - \mu_p(g\varphi_F) = \mu_p(g).$$

Egalitatea rămîne apoi adevărată pentru orice $g \in \overline{\mathcal{K}(\hat{G})}$.

Lema 9. *Pentru orice* $p \in \mathcal{J}$ *avem* $\hat{p} \in L^1(\hat{G}, \mu) \cap L^2(\hat{G}, \mu)$.

Într-adevăr, deoarece $\hat{p} \geqslant 0$ pe S şi $S(\mu) \subset S$, deducem că $\mu(|\hat{p}|) = \mu(\hat{p}) = \mu_p(1) < +\infty$.

Pe de altă parte $\hat{p} \in \overline{\mathcal{K}(\hat{G})}$, deci $|\hat{p}|^2 = \hat{p}\overline{\hat{p}}$ este μ-integrabilă şi deci $\hat{p} \in L^2(\hat{G}, \mu)$.

Lema 10. *Pentru orice p şi q din $\mathcal{J}$ avem*

$$\int p\bar{q}\,dx = \int \hat{p}\overline{\hat{q}}\,d\mu.$$

Într-adevăr,

$$\Phi(p \ast \tilde{q}) = \mu_p(\overline{\hat{q}}) = \mu(\hat{p}\overline{\hat{q}})$$

iar pe de altă parte

$$\Phi(p \ast \tilde{q}) = (p \ast \tilde{q})(e) = \int p(x)\,\tilde{q}(x^{-1})\,dx = \int p(x)\,\overline{q(x)}\,dx.$$

Teorema 2. *Dacă $f \in [L^1 \cap P]$, atunci $\hat{f} \in L^1(\hat{G})$ şi*

$$f(x) = \int \overline{< x, \hat{x} >}\,\hat{f}(\hat{x})\,d\hat{x},$$

aproape pentru orice x, unde $d\hat{x}$ este o măsură Haar pe $\hat{G}$ aleasă în mod convenabil.

Egalitatea din enunţ se numeşte *formula de inversiune* sau *de reciprocitate a lui Fourier.*

Să considerăm măsura μ pe $\hat{G}$ definită mai sus. Fie $p \in L^1 \cap P$. Deoarece $p \in \mathcal{J}$, conform lemei 9 avem $\hat{p} \in L^1(\hat{G}, \mu)$. Pe de altă parte, pentru orice $f \in L^1$ avem $\hat{f} \in \overline{\mathcal{K}(\hat{G})}$, deci conform lemei 8, $\mu_p(\hat{f}) = \mu(\hat{f}\hat{p})$, adică

$$(p \ast f)(e) = \int \hat{f}(\hat{x})\,\hat{p}(\hat{x})\,d\mu(\hat{x}),$$

pentru $f \in L^1$.

Atunci, pentru $f \in L^1$ avem

$$\int p(x)\overline{f(x)}\,dx = (p \ast f)(e) = \int \hat{p}(\hat{x})\overline{\hat{f}(\hat{x})}\,d\mu(\hat{x}) =$$

$$= \int \hat{p}(\hat{x})\,d\mu(\hat{x}) \int \overline{< x, \hat{x} >}\,\overline{f(x)}\,dx = \int \overline{f(x)}\,dx \int \overline{< x, \hat{x} >}\,\hat{p}(\hat{x})\,d\mu(\hat{x}),$$

de unde

$$p(x) = \int \overline{< x, \hat{x} >}\,\hat{p}(\hat{x})\,d\mu(\hat{x})$$

aproape pentru orice $x \in G$.

Această egalitate rămîne apoi adevărată pentru orice funcție $f \in [L^1 \cap P]$.

Rămîne de arătat că μ este o măsură Haar. Dacă $p \in L^1 \cap P$ și $\hat{x}_0 \in \hat{G}$, atunci funcția $x \to p(x) < x, \hat{x}_0 >$ aparține lui $L^1 \cap P$. Într-adevăr, aplicația $\alpha(\hat{x}) = \hat{x}_0 \hat{x}$ este un omeomorfism al lui $\hat{G}$ deci este proprie în raport cu măsura pozitivă și mărginită μ_p pe $\hat{G}$ care verifică egalitatea

$$p(x) = \int < x, \hat{x} > \mathrm{d}\mu_p(\hat{x}).$$

Măsura $\alpha(\mu_p)$ este pozitivă și mărginită deci conform teoremei lui Bochner, funcția

$$q(x) = \int < x, \hat{x} > \mathrm{d}\alpha(\mu_p(\hat{x}))$$

este de tip pozitiv. Dar

$$q(x) = \int < x, \hat{x} > \mathrm{d}\alpha(\mu_p(\hat{x})) = \int < x, \alpha(\hat{x}) > \mathrm{d}\mu_p(\hat{x}) =$$

$$= \int < x, \hat{x}_0 \hat{x} > \mathrm{d}\mu_p(\hat{x}) = < x, \hat{x}_0 > \int < x, \hat{x} > \mathrm{d}\mu_p(\hat{x}) =$$

$$< x, \hat{x}_0 > p(x)$$

și deci $< x, x_0 > p(x)$ este de tip pozitiv. Deoarece $p \in L^1 \cap P$ iar $\hat{x}_0 \in P$, deducem că $p\hat{x}_0 \in L^1 \cap P$. Să observăm că

$$\widehat{p\hat{x}_0}(\hat{x}) = \int < x, \hat{x} > p(x) < x, \hat{x}_0 > \mathrm{d}x =$$

$$= \int < x, \hat{x}_0 \hat{x} > p(x)\, \mathrm{d}x = \hat{p}(\hat{x}_0 \hat{x}) = \hat{p}_{\hat{x}_0}(\hat{x})$$

deci

$$\int \hat{p}(\hat{x})\, \mathrm{d}\mu(\hat{x}) = p(e) = p(e) < e, \hat{x}_0 > = (p\hat{x}_0)(e) =$$

$$= \int \widehat{p\hat{x}_0}(\hat{x})\, \mathrm{d}\mu(\hat{x}) = \int \hat{p}(\hat{x}_0 \hat{x})\, \mathrm{d}\mu(\hat{x})$$

pentru orice $p \in L^1 \cap P$. Deoarece $L^1 \cap P$ este dens în L^1, mulțimea $\{\hat{p} \mid p \in L^1 \cap P\}$ este densă în $\mathcal{X}(\hat{G})$. Din ultima egalitate obținem, prin trecere la limită,

$$\int f(\hat{x})\, \mathrm{d}\mu(\hat{x}) = \int f(\hat{x}_0 \hat{x})\, \mathrm{d}\mu(\hat{x}), \text{ pentru } f \in \mathcal{X}(\hat{G})$$

şi deci μ este o măsură Haar. Dacă notăm $d\mu = d\hat{x}$, atunci

$$p(x) = \int \overline{< x, \hat{x} >}\, \hat{p}(\hat{x})\, d\hat{x}, \text{ pentru orice } p \in [L^1 \cap P]$$

şi teorema este demonstrată.

Corolarul 1. *Dacă* $p \in L^1 \cap P$ *atunci* $\hat{p} \geqslant 0$.

Într-adevăr, $p \in L^1(\hat{G})$ şi

$$p(x) = \int \overline{< x, \hat{x} >}\, \hat{p}(\hat{x})\, d\hat{x} = \int < x, \hat{x} > \hat{p}(\hat{x}^{-1})\, d\hat{x}.$$

Pentru orice funcţie $f \in L^1$ avem

$$\int f(x)\, p(x)\, dx = \int \overline{< x, \hat{x} >}\, \hat{p}(\hat{x}^{-1})\, d\hat{x} \int f(x)\, dx =$$

$$= \int \hat{p}(\hat{x}^{-1})\, d\hat{x} \int < x, \hat{x} > f(x)\, dx = \int \hat{f}(\hat{x})\, \hat{p}(\hat{x}^{-1})\, d\hat{x}.$$

Luînd acum $f * \tilde{f}$ în loc de f, obţinem

$$\int f * \tilde{f}\,(x)\, p(x)\, dx \geqslant 0,$$

deoarece p este de tip pozitiv, deci

$$\int |\hat{f}(x)|^2\, \hat{p}(\hat{x}^{-1})\, d\hat{x} \geqslant 0.$$

Mulţimea $\{\hat{f} | f \in L^1\}$ este densă în $\overline{\mathcal{K}(\hat{G})}$ şi deci, prin trecere la limită, deducem că pentru orice funcţie $h \geqslant 0$ din $\mathcal{K}(\hat{G})$ avem (luînd $\sqrt{h}$ în loc de f in inegalitatea precedentă):

$$\int h(\hat{x})\, \hat{p}(\hat{x}^{-1})\, d\hat{x} \geqslant 0.$$

De aici rezultă că $\hat{p}(\hat{x}^{-1}) \geqslant 0$ pentru orice $\hat{x} \in \hat{G}$ adică $\hat{p} \geqslant 0$.

Corolarul 2. *Dacă* $h \geqslant 0$ *este o funcţie din* $\mathcal{L}^1(\hat{G})$ *şi dacă funcţia*

$$f(x) = \int \overline{< x, \hat{x} >}\, h(\hat{x})\, d\hat{x}$$

aparţine spaţiului $\mathcal{L}^1(G)$, *atunci*

$$h(\hat{x}) = \int < x, \hat{x} > f(x)\, dx = \hat{f}(\hat{x})$$

aproape peste tot.

Măsura $d\mu = h(\hat{x})\,d\hat{x}$ este pozitivă și mărginită. Conform teoremei lui Bochner, funcția $f(x)$ este continuă mărginită și de tip pozitiv. Folosind și ipoteza, deducem că $f \in L^1 \cap P$. Conform formulei de inversiune, avem

$$f(x) = \int \overline{< x, \hat{x} >}\, \hat{f}(\hat{x})\,d\hat{x}, \quad \text{pentru } x \in G,$$

și deci

$$\int \overline{< x, \hat{x} >}\, \hat{f}(\hat{x})\,d\hat{x} = \int < x, \hat{x} > h(\hat{x})\,dx, \quad \text{pentru } x \in G.$$

Pentru orice funcție $g \in L^1$ avem

$$\int \hat{g}(\hat{x}^{-1})\,h(\hat{x})\,d\hat{x} = \int h(\hat{x})\,d\hat{x} \int \overline{< x, \hat{x} >}\, g(x)\,dx =$$

$$= \int g(x)\,dx \int \overline{< x, \hat{x} >}\, h(\hat{x})\,d\hat{x} = \int g(x)\,dx \int \overline{< x, \hat{x} >}\, \hat{f}(\hat{x})\,d\hat{x} =$$

$$= \int \hat{g}(\hat{x}^{-1})\,\hat{f}(\hat{x})\,d\hat{x},$$

de unde rezultă că $h(\hat{x}) = \hat{f}(\hat{x})$ aproape peste tot pe G, deoarece mulțimea $\{\hat{g} \mid g \in L^1\}$ este densă în $\mathcal{K}(\hat{G})$.

Teorema 3. (Plancherel). *Transformata Fourier $f \to Tf = \hat{f}$ aplică mulțimea $[L^1 \cap P]$ densă în $L^2(G)$ pe o mulțime densă în $L^2(\hat{G})$ și păstrează produsul scalar*

$$\int f(x)\,\overline{g(x)}\,dx = \int \hat{f}(\hat{x})\,\overline{\hat{g}(\hat{x})}\,dx$$

și deci se poate prelungi la o aplicație liniară și izometrică a lui $L^2(G)$ pe $L^2(\hat{G})$.

Conform lemei 10, pentru orice funcții p, $q \in L^1 \cap P \subset \mathcal{J}$ avem

$$\int p\bar{q}\,dx = \int \hat{p}\,\bar{\hat{q}}\,d\mu$$

iar în teorema precedentă am demonstrat că μ este o măsură Haar pe $\hat{G}$, pe care am notat-o $d\hat{x}$. Atunci pentru f, $g \in [L^1 \cap P]$, deducem de asemenea că

$$\int f\bar{g}\,dx = \int \hat{f}\,\bar{\hat{g}}\,d\hat{x}$$

și deci transformata Fourier, considerată pe spațiul $[L^1 \cap P]$, păstrează

produsul scalar. Deoarece $[L^1 \cap P]$ este dens în $L^2(G)$, această transformare se prelungeşte în mod unic, la o aplicaţie liniară şi izometrică T a lui $L^2(G)$ *în* $L^2(\hat{G})$. Rămîne de arătat că imaginea lui $L^2(G)$ prin T este densă în $L^2(\hat{G})$ de unde va rezulta că această imagine este chiar egală cu $L^2(\hat{G})$.

Să considerăm operatorul adjunct $T^* : L^2(\hat{G}) \to L^2(G)$. Fie $f \in [L^1(G) \cap P]$ şi $g \in L^1(\hat{G}) \cap L^2(\hat{G})$ şi să notăm $g' = T^* g$. Avem $< \hat{f}, g > = < Tf, g > = < f, T^* g > = < f, g' >$, adică

$$\iint < x, \hat{x} > f(x)\, g(\hat{x})\, dx\, d\hat{x} = \int f(x)\, \overline{g'(x)}\, dx,$$

de unde, $[L^1(G) \cap P]$ fiind dens în $\mathcal{K}(G)$,

$$g'(x) = (T^* g)(x) = \int \overline{< x, \hat{x} >}\, g(\hat{x})\, d\hat{x}, \text{ aproape peste tot.}$$

Fie acum g, $\varphi \in L^1(\hat{G}) \cap L^2(\hat{G})$, $g \geqslant 0$, $\varphi \geqslant 0$. Atunci $g * \varphi \in L^1(G) \cap$ $\cap L^2(\hat{G})$. Pe de altă parte funcţiile $g(\hat{y}) < x, \hat{y} >$ şi $\varphi(\hat{x}) < x, \hat{x} >$ sînt integrabile, deci produsul lor este integrabil pentru măsura $d\hat{x}d\hat{y}$. Folosind teorema lui Fubini şi egalitatea de mai sus, deducem

$$T^*(g \ast \varphi)(x) = \int (g * \varphi)(\hat{x})\, \overline{< x, \hat{x} >}\, d\hat{x} =$$

$$\int \overline{< x, \hat{x} >}\, d\hat{x} \int g(\hat{y})\, \varphi(\hat{y}^{-1}\hat{x})\, d\hat{y} = \int g(\hat{y})\, d\hat{y} \int \overline{< x, \hat{x} >}\, \varphi(\hat{y}^{-1}\hat{x})\, d\hat{x} =$$

$$\int g(\hat{y})\, d\hat{y} \int \overline{< x, \hat{y}\hat{x} >}\, \varphi(\hat{x})\, d\hat{x} = \int g(\hat{y})\, \overline{< x, \hat{y} >}\, d\hat{y} \int \varphi(\hat{x})\, \overline{< x, \hat{x} >}\, d\hat{x} =$$

$$= T^* g(x)\, T^* \varphi(x) = (g'\varphi')(x).$$

Deoarece $g', \varphi' \in L^2(G)$, deducem că $g'\varphi' \in L^1(G)$. Pe de altă parte $g'\varphi' = T^*(g \ast \varphi) \in L^2(G)$, deci

$$T^*(g * \varphi) = g'\varphi' \in L^1(G) \cap L^2(G).$$

Deoarece $g \geqslant 0$ şi $\varphi \geqslant 0$, avem $g * \varphi \geqslant 0$. Deoarece, în plus, $g * \varphi \in L^1(G)$ şi funcţia $(g * \varphi)'(x) = \int < x, \hat{x} > (g * \varphi)(\hat{x})\, d\hat{x}$ aparţine spaţiului $L^1(G)$, în baza corolarului 2 al teoremei precedente, deducem că avem

$$(g \ast \varphi)(\hat{x}) = \int \overline{< x, \hat{x} >}\, (g * \varphi)'(x)\, dx = T(g * \varphi)'(x)$$

aproape peste tot, adică

$$g * \varphi = T(g * \varphi)' \in T\, L^2(G).$$

Dacă g şi φ aparţin lui $L^1(\hat{G}) \cap L^2(\hat{G})$ dar nu sînt pozitive, scriindu-le sub formă de combinaţii liniare de funcţii pozitive, deducem că $g * \varphi \in \in TL^2(G)$. Dar funcţiile de forma $g * \varphi$ cu $g, \varphi \in L^1(\hat{G}) \cap L^2(\hat{G})$ formează o mulţime densă în $L^2(\hat{G})$, deoarece printre ele se află funcţiile de forma $g * \tilde{g}$ care sînt de tip pozitiv (prop. 8). Aşadar $TL^2(G)$ este dens în $L^2(\hat{G})$ şi deci $TL^2(G) = L^2(\hat{G})$.

Cu aceasta teorema este demonstrată.

5. Teorema lui Pontriaghin

Fie $x \in G$. Să considerăm aplicaţia X definită pe $\hat{G}$ prin egalitatea

$$X(\hat{x}) = \hat{x}(x), \quad \text{pentru} \quad \hat{x} \in G.$$

Avem

$$|X(\hat{x})| = |\hat{x}(x)| = 1$$

şi

$$X(\hat{x}\hat{y}) = (\hat{x}\hat{y})(x) = \hat{x}(x)\,\hat{y}(x) = X(\hat{x})\,X(\hat{y}),$$

deci X este o reprezentare a lui $\hat{G}$ în grupul multiplicativ al numerelor complexe de modul 1. Deoarece aplicaţia $(x, \hat{x}) \to \hat{x}(x)$ a lui $G \times \hat{G}$ în C este continuă (prop. 12, § 26), rezultă că aplicaţia $\hat{x} \to \hat{x}(x) = X(\hat{x})$ este continuă pe $\hat{G}$ şi deci X este un caracter al grupului $\hat{G}$.

Să observăm că dacă $x, y \in G$ şi $z = xy$, atunci

$$Z(\hat{x}) = \hat{x}(z) = \hat{x}(xy) = \hat{x}(x)\,\hat{x}(y) = X(\hat{x})\,Y(\hat{x}) = (XY)(\hat{x}),$$

deci $Z = XY$. Aşadar aplicaţia $x \to X$ este un omomorfism algebric al grupului G în grupul $\hat{\hat{G}}$, dualul grupului $\hat{G}$.

Această aplicaţie este chiar un izomorfism. Într-adevăr, dacă $x_1 \neq x_2$ sînt două elemente din G, există un caracter $\hat{x}_0 \in \hat{G}$ astfel încît $\hat{x}_0(x_1) \neq \hat{x}_0(x_2)$. Atunci $X_1(\hat{x}_0) \neq X_2(\hat{x}_0)$ deci $X_1 \neq X_2$.

Teorema 4. (Pontriaghin). *Aplicaţia $x \to X$ este un izomorfism şi un omeomorfism al grupului G pe grupul $\hat{\hat{G}}$ al caracterelor lui $\hat{G}$.*

Deoarece $x \to X$ este o aplicaţie biunivocă a lui G în $\hat{\hat{G}}$ vom identifica x cu X şi von scrie $G \subset \hat{\hat{G}}$. Trebuie să arătăm că $G = \hat{\hat{G}}$ şi că topologiile pe G şi $\hat{\hat{G}}$ sînt echivalente.

Să notăm cu A mulţimea combinaţiilor liniare finite $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i f_i * \varphi_i$ cu $f_i, \varphi_i \in \mathcal{K}(G)$. Mulţimea A este o algebră densă în $L^1(G)$ şi în $\mathcal{K}(G)$ (pentru norma $\|f\|_\infty$).

Imaginea $\hat{A} = TA$ a algebrei A prin transformata Fourier T este densă în $L^1(\hat{G})$ deoarece mulțimea $\{\hat{f} = Tf | f \in \mathcal{K}(G)\}$ este densă în $L^2(\hat{G})$ deci combinațiile liniare finite $\sum^n \alpha_i \hat{f}_i \hat{g}_i = T \sum^n \alpha_i f_i * g_i$ formează o mulțime densă în $L^1(\hat{G})$.

Avem $A \subset [L^1 \cap P]$, deci pentru orice $f \in A$ avem

$$f(x) = \int \overline{< x, \hat{x} >} \hat{f}(\hat{x})\, d\hat{x}$$

aproape pentru orice $x \in G$ iar $\hat{f} \in \hat{A} \cap L^1(\hat{G})$. Pe de altă parte, funcțiile din $\mathcal{K}(G)$ separă punctele lui G și pentru orice punct $x_0 \in G$ există o funcție $f \in \mathcal{K}(G)$ astfel încît $f(x_0) \neq 0$. Deoarece A este densă în $\mathcal{K}(G)$, rezultă că și funcțiile din A separă punctele lui G și pentru orice $x_0 \in G$ există $f \in A$ cu $f(x_0) \neq 0$. Deoarece $A \subset \mathcal{K}(G)$, funcțiile din A se anulează la infinit; rezultă că topologia slabă pe G definită de funcțiile din A coincide cu topologia lui G.

Mulțimile din G de forma

$$U(x_0; f_1, \ldots, f_n; \varepsilon) = \left\{ x \in G \,\middle|\, \left| \int \left[\overline{< x, \hat{x} >} - \overline{< x_0, \hat{x} >} \right] \hat{f}_i(\hat{x})\, d\hat{x} \right| < \varepsilon, \right.$$

$$\left. i = 1, 2, \ldots, n \right\}$$

unde

$$\varepsilon > 0 \text{ și } f_i \in A,$$

formează o bază de vecinătăți ale lui x_0 în G. Dar inegalitățile

$$\left| \int \left[\overline{< x, \hat{x} >} - \overline{< x_0, \hat{x} >} \right] \hat{f}_i(\hat{x})\, d\hat{x} \right| < \varepsilon$$

se pot scrie

$$\left| \int \left[\overline{X(\hat{x})} - \overline{X_0(\hat{x})} \right] \hat{f}_i(\hat{x})\, d\hat{x} \right| < \varepsilon$$

și deci mulțimile $U(x_0; \hat{f}_1, \ldots, \hat{f}_n; \varepsilon)$ formează un sistem fundamental de vecinătăți ale lui x_0 în G, considerat ca subspațiu al lui $\hat{\hat{G}}$.

Așadar, G este un subspațiu local compact în $\hat{\hat{G}}$ și G este închis în $\hat{\hat{G}}$. Într-adevăr, fie G_∞ și $\hat{\hat{G}}_\infty$ spațiile compacte obținute din G și $\hat{\hat{G}}$ prin adăugarea unui punct la infinit. Atunci G_∞ este un subspațiu închis al lui $\hat{\hat{G}}_\infty$ deci G este închis în $\hat{\hat{G}}$.

Rămîne de arătat că G este dens în $\hat{\hat{G}}$ de unde va rezulta că $G = \hat{\hat{G}}$. Dacă G n-ar fi dens în $\hat{\hat{G}}$, ar exista o mulțime deschisă relativ compactă

în $\hat{\hat{G}}$, disjunctă de G, deci ar exista funcţiile pozitive, $f,\ g \in L^1(\hat{\hat{G}}) \cap L^2(\hat{\hat{G}})$, nule pe G, dar neidentic nule pe $\hat{\hat{G}}$. Punînd $h = f * g$, deducem

$$h(\hat{\hat{x}}) = \int < \hat{\hat{x}}, \hat{x} > \hat{h}(\hat{x})\, \mathrm{d}\hat{x},$$

unde $\hat{h} \in L^1(\hat{G}) \cap L^2(\hat{G})$. Dar $h(x) = 0$ pentru $x \in G$ deci

$$\overline{h(x)} = \int \overline{< x, \hat{x} >}\ \overline{\hat{h}(\hat{x})}\, \mathrm{d}x = 0$$

pentru $x \in G$, adică $T^* \overline{\hat{h}} = 0$. Rezultă că $\hat{h} = 0$ şi deci $h(\hat{\hat{x}}) = 0$ şi am ajuns la o contradicţie. Aşadar G este dens în $\hat{\hat{G}}$ deci $G = \hat{\hat{G}}$ şi cu această teorema este demonstrată.

Datorită acestei teoreme, vom identifica G cu $\hat{\hat{G}}$ şi vom spune că G este, la rîndul său, dualul lui $\hat{G}$.

Propoziţia 10. *Grupul G este compact, dacă şi numai dacă $\hat{G}$ este discret.*

Dacă G este discret, atunci algebra $L^1(\hat{G})$ are unitate şi deci grupul $G = \hat{\hat{G}}$ este compact, ca spaţiu al funcţionalelor continue, liniare şi multiplicative pe $L^1(\hat{G})$.

Reciproc, dacă G este compact, mulţimea caracterelor

$$\left\{ x \mid \|x - 1\|_\infty < \frac{1}{2} \right\}$$ este o vecinătate deschisă a caracterului *1* şi se reduce numai la acest caracter. Rezultă că topologia pe $\hat{G}$ este discretă şi propoziţia este demonstrată.

6. Exemple

1) *Grupul aditiv R al numerelor reale.*
Măsura Haar $\mathrm{d}x$ pe R este măsura Lebesgue.
Produsul de convoluţie se defineşte în acest caz astfel:

$$(f * g)(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x - y)\, g(x)\ \mathrm{d}y = \int_{-\infty}^{+\infty} f(y)\, g(x - y)\, \mathrm{d}y.$$

Avem

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, \mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{+\infty} f(-x)\, \mathrm{d}x.$$

Involuția $\tilde{f}$ se definește prin egalitatea

$$\tilde{f}(x) = \overline{f(-x)}.$$

Pentru fiecare $y \in R$, funcția $\chi_y(x) = e^{2\pi i x y}$ este un omeomorfism continuu al lui R în grupul multiplicativ al numerelor complexe de modul 1, deci este un caracter pe R.

Reciproc, se demonstrează că singurele funcții continue χ care îndeplinesc condițiile

$$|\chi(x)| \equiv 1 \qquad \text{și} \qquad \chi(x+y) = \chi(x) + \chi(y)$$

sînt de forma $\chi(x) = e^{2\pi i c y}$ cu $y \in R$.

Așadar, există o corespondență biunivocă între mulțimea $\hat{R}$ a caracterelor lui R și mulțimea R.

Această corespondență este un izomorfism algebric și un omeomorfism, deci dualul lui R este tot R.

Transformata Fourier a unei funcții $f \in L^1(R)$ se scrie

$$\hat{f}(\xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, e^{2\pi i x \xi}\, \mathrm{d}x.$$

Formula de reciprocitate se scrie

$$f(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(\xi)\, e^{-2\pi i x \xi}\, \mathrm{d}\xi$$

pentru funcțiile $f \in [L^1 \cap P]$.

Formula lui Plancherel:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, \overline{g(x)}\, \mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(\xi)\, \overline{\hat{g}(\xi)}\, \mathrm{d}\xi$$

Funcțiile φ de tip pozitiv din $L^\infty(R)$ sînt de forma

$$\varphi(x) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{2\pi i x \xi}\, \mathrm{d}\mu(\xi),$$

unde μ sînt măsuri pozitive pe R, adică de forma

$$\varphi(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{2\pi i x \xi}\, \mathrm{d}g(\xi),$$

unde g sînt funcții crescătoare, continue la stînga pe R și nule în origine.

2) *Grupul aditiv Z al numerelor întregi.*

Acest grup este discret. Alegem măsura Haar $\mathrm{d}x$ cu masa 1 în fiecare punct.

O funcție $f: Z \to C$ este integrabilă pentru dx dacă și numai dacă

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |f(n)| < +\infty$$

Produsul de convoluție a două funcții f și g este

$$(f * g)(n) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} f(n-m)\, g(m) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} f(n)\, g(n-m).$$

Funcția h definită prin $h(0) = 1$ și $h(n) = 0$ pentru $n \neq 0$, este unitate pentru produsul de convoluție.

Pentru fiecare număr complex de modul 1, $\xi = e^{2\pi i\theta}$ (cu $\theta \in R$, θ depinzînd de ξ), funcția $\chi_\xi(n) = e^{2\pi in\theta}$ este un caracter al grupului Z și se demonstrează că acestea sînt singurele caractere ale lui Z. Dualul $\hat{Z}$ al grupului Z este grupul multiplicativ U al numerelor complexe de modul 1.

Transformata Fourier a unei funcții $f \in L^1(Z)$ este

$$\hat{f}(\xi) = \hat{f}(e^{2\pi i\theta}) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f(n)\, e^{2\pi in\theta}.$$

Formula de reciprocitate este

$$f(n) = \int_0^1 \hat{f}(e^{2\pi i\theta})\, e^{-2\pi in\theta}\, d\theta = \int_U f(\xi)\, e^{2\pi in\theta(\xi)}\, d\xi,$$

unde $d\xi$ este măsura Haar pe U, imagine a măsurii $d\theta$ de pe $[0, 1]$ prin aplicația $\theta \to e^{2\pi i\theta}$.

Formula lui Plancherel:

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} f(n)\,\overline{g(n)} = \int_0^1 \hat{f}(e^{2\pi i\theta})\,\overline{\hat{g}(e^{2\pi i\theta})}\, d\theta = \int_U \hat{f}(\xi)\,\overline{\hat{g}(\xi)}\, d\xi.$$

Funcțiile φ de tip pozitiv din $L^\infty(Z)$ sînt de forma

$$\varphi(n) = \int_0^1 e^{2\pi in\theta}\, d\mu(\theta) = \int_U e^{2\pi in\theta(\xi)}\, d\mu'(\xi),$$

unde μ sînt măsuri pozitive pe $[0, 1]$ iar μ' imaginile măsurilor μ prin aplicația $\theta \to e^{2\pi i\theta}$ a lui $[0, 1]$ pe U.

Funcțiile φ de tip pozitiv se pot scrie și sub forma

$$\varphi(n) = \int_0^1 e^{2\pi in\theta}\, dg(\theta),$$

unde g sînt funcții crescătoare pe $[0, 1]$.

3) *Grupul multiplicativ U al numerelor complexe de modul 1.*

Acest grup este compact. Măsura Haar $d\xi$ se alege astfel încît măsura lui U să fie egală cu 1. Măsura $d\xi$ este imaginea măsurii Lebesgue $d\theta$ de pe $[0, 1]$ prin aplicația $\theta \to e^{2\pi i\theta}$.

Produsul de convoluție:

$$(f*g)(\zeta) = \int_U f(\zeta\xi^{-1})\, g(\xi)\, d\xi = \int_U f(\xi)\, g(\zeta\xi^{-1})\, d\xi.$$

Deoarece $\hat{Z} = U$, urmează că $\hat{U} = Z$. Așadar, caracterele lui U sînt de forma $\chi_n(\theta) = e^{2\pi in\theta}$ cu $n \in Z$.

Transformata Fourier:

$$\hat{f}(n) = \int_0^1 e^{2\pi in\theta} f(e^{2\pi i\theta})\, d\theta = \int_U e^{2\pi in\theta(\xi)} f(\xi)\, d\xi.$$

Formula de reciprocitate:

$$f(\xi) = f(e^{2\pi i\theta}) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \hat{f}(n)\, e^{-2\pi in\theta}.$$

Funcțiile de tip pozitiv φ din $L^\infty(U)$ sînt de forma

$$\varphi(\xi) = \varphi(e^{2\pi i\theta}) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{2\pi in\theta}\, g(n),$$

unde g este o funcție pozitivă pe Z.

4) *Grupul comutativ G cu n elemente.*

Se alege măsura Haar dx cu masa $\frac{1}{\sqrt{n}}$ în fiecare punct. Grupul G este și discret și compact.

Produsul de convoluție

$$(f*g)(s) = \sum_{t \in G} f(t)\, g(t^{-1}s) = \sum_{t \in G} f(st^{-1})\, g(t).$$

Funcția h definită prin $h(e) = 1$ și $h(s) = 0$ dacă $s \neq e$, este unitate pentru produsul de convoluție.

Caracterele grupului G sînt reprezentările *mărginite* ale lui G în U. Se demonstrează că G are exact n caractere, deci dualul lui G este tot G, iar caracterele χ ale lui G verifica următoarele relații:

$$\sum_{s \in G} \chi(s) = \begin{cases} n & \text{dacă } \chi = \chi_0, \\ 0 & \text{dacă } \chi \neq \chi_0, \end{cases}$$

unde χ_0 este caracterul identic unu, și

$$\sum_{s \in G} \chi(s)\, \overline{\chi'(s)} = \begin{cases} n & \text{dacă } \chi = \chi', \\ 0 & \text{dacă } \chi \neq \chi'. \end{cases}$$

Transformata Fourier a unei funcţii $f: G \to C$ este

$$\hat{f}(\chi) = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{s \in G} f(s)\, \chi(s)$$

iar formula de reciprocitate este

$$f(s) = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{\chi \in \hat{G}} \hat{f}(\chi)\, \overline{\chi(s)}.$$

Formula lui Plancherel se scrie

$$\sum_{s \in G} f(s)\, \overline{g(s)} = \sum_{\chi \in \hat{G}} \hat{f}(\chi)\, \overline{\hat{g}(\chi)}.$$

SPAȚII DE CÎMPURI DE VECTORI

§ 28. SPAȚIILE $\mathcal{L}^p_{\mathcal{A}}$

1. Familii fundamentale

Fie $\mathcal{E} = (E(t))_{t\in T}$ o familie de spații Banach. Pentru fiecare $t \in T$, $E(t)$ se numește *spațiut tangent la T în punctul t.*

Se numește *cîmp de vectori*, o funcție $\mathbf{x}$ definită pe o parte $A \subset T$, astfel încît pentru fiecare $t \in A$ să avem $\mathbf{x}(t) \in E(t)$. Pentru un cîmp de vectori $\mathbf{x}$ vom nota cu $|\mathbf{x}|$ funcția pozitivă $t \to |\mathbf{x}(t)|$ și $\|\mathbf{x}\|_A = \sup_{t\in A} |\mathbf{x}(t)|$.

Mulțimea cîmpurilor de vectori definite pe T va fi notată cu $\mathcal{C}(\mathcal{E})$. Mulțimea $\mathcal{C}(\mathcal{E})$ este un spațiu vectorial pentru operațiile obișnuite de adunare și înmulțire cu scalari, și un modul pe algebra funcțiilor scalare definite pe T, dacă se definește produsul $f\mathbf{x}$ prin egalitatea $(f\mathbf{x})(t) = f(t)\mathbf{x}(t)$. În loc de $\|\mathbf{x}\|_T$ vom scrie $\|\mathbf{x}\|$.

Definiția 1. *Se numește familie fundamentală de cîmpuri de vectori continue, orice subspațiu vectorial $\mathcal{A} \subset \mathcal{C}(\mathcal{E})$ care verifică axiomele următoare :*

1) *pentru orice $\mathbf{x} \in \mathcal{A}$, funcția pozitivă $|\mathbf{x}|$ este continuă pe T ;*

2) *pentru orice $t \in T$, mulțimea $\{\mathbf{x}(t)\,;\ \mathbf{x} \in \mathcal{A}\}$ este densă în $E(t)$.*

Uneori vom considera familii fundamentale $\mathcal{A}$ care verifică în plus o axiomă de numărabilitate a lui Godement :

(G) : există o parte numărabilă $\mathcal{A}_0 \subset \mathcal{A}$ astfel încît pentru orice $t \in T$, mulțimea $\{\mathbf{x}(t)\,;\ \mathbf{x} \in \mathcal{A}_0\}$ este densă în $E(t)$.

Dacă există o familie fundamentală $\mathcal{A} \subset \mathcal{C}(\mathcal{E})$ care verifică axioma (G), atunci toate spațiile $E(t)$ sînt de tip numărabil.

Exemplu. Dacă toate spațiile tangente sînt egale cu un spațiu Banach E, un cîmp de vectori este o funcție obișnuită definită pe T cu valori în E. În acest caz, următoarele mulțimi sînt familii fundamentale :

1. Mulțimea $\mathcal{C}_E(T)$ a funcțiilor continue $\mathbf{f} : T \to E$;

2. Mulțimea $\mathcal{K}_E(T)$ a funcțiilor $\mathbf{f} : T \to E$ continue cu suport compact ;

3. Mulțimea aplicațiilor constante ale lui T în E. Această familie fundamentală va fi identificată, în continuare, cu E.

Observație. Ori de cîte ori spațiile tangente sînt egale cu un același spațiu E, vom alege ca familie fundamentală $\mathcal{A}$ mulțimea aplicațiilor constante ale lui T în E. În acest caz $\mathcal{A}$ se poate identifica cu E.

2. Cîmpuri de vectori continue

Fie $\mathcal{A} \subset \mathcal{C}(\mathcal{L})$ o familie fundamentală de cîmpuri de vectori continue pe T.

Definiția 2. *Spunem că un cîmp de vectori* $\mathbf{x}$ *definit pe o parte* $A \in T$ *este continuu (în raport cu familia fundamentală* $\mathcal{A}$*) într-un punct* $t_0 \in T$, *dacă pentru orice număr* $\varepsilon > 0$, *există o vecinătate* V *a lui* t_0 *și un cîmp* $\mathbf{y} \in \mathcal{A}$, *astfel încît să avem*

$$|\mathbf{x}(t) - \mathbf{y}(t)| < \varepsilon, \text{ pentru orice } t \in V \cap A.$$

Un cîmp de vectori $\mathbf{x}$ este continuu pe o mulțime dacă este continuu în fiecare punct al acestei mulțimi.

Conform acestei definiții, orice cîmp $\mathbf{x}$ din $\mathcal{A}$ este continuu pe întreg spațiul T, deoarece în definiția 2 putem lua $\mathbf{y} = \mathbf{x}$.

Se verifică ușor că mulțimea cîmpurilor de vectori definite pe A și continue într-un punct $t_0 \in A$ (sau pe A) este un spațiu vectorial, și un modul pe algebra funcțiilor scalare definite pe A și continue în t_0 (respectiv pe A).

Exemplu. Dacă $E(t) = E$ oricare ar fi $t \in T$ și dacă se ia ca familie fundamentală $\mathcal{A}$, mulțimea aplicațiilor constante ale lui T în E, atunci un cîmp de vectori $\mathbf{x}$ este continuu în t_0 dacă și numai dacă funcția $\mathbf{x} : T \to E$ este continuă în t_0 în sensul obișnuit.

Se ajunge la același rezultat dacă se ia ca familie fundamentală spațiul $\mathcal{C}_E(T)$ sau spațiul $\mathcal{K}_E(T)$.

Observație Toate rezultatele care urmează sînt generalizări ale rezultatelor corespunzătoare, stabilite pentru funcții obișnuite, în cazul cînd $E(t) = E$ pentru orice $t \in T$.

Propoziția 1. *Dacă* $\mathbf{x}$ *este un cîmp de vectori continuu într-un punct* $t_0 \in A$, *atunci funcția* $|\mathbf{x}|$ *este continuă în* t_0.

Fie $\varepsilon > 0$. Conform definiției 2, există o vecinătate V' a lui t_0 și un cîmp $\mathbf{y} \in \mathcal{A}$ astfel încît să avem

$$|\mathbf{x}(t) - \mathbf{y}(t)| < \frac{\varepsilon}{3}, \text{ pentru } t \in V' \cap A.$$

Urmează că :

$$||\mathbf{x}(t)| - |\mathbf{y}(t)|| < \frac{\varepsilon}{3}, \text{ pentru } t \in V' \cap A.$$

Dar funcția $|\mathbf{y}|$ este continuă pe T, deci în t_0. Există atunci o vecinătate V'' a lui t_0 astfel încît să avem

$$||\mathbf{y}(t)| - |\mathbf{y}(t_0)|| < \frac{\varepsilon}{3}, \text{ pentru } t \in V'' \cap A.$$

Dacă notăm $V = V' \cap V''$, pentru $t \in V \cap A$ avem

$$||\mathbf{x}(t)| - |\mathbf{x}(t_0)|| \leqslant ||\mathbf{x}(t)| - |\mathbf{y}(t)|| + ||\mathbf{y}(t)| - |\mathbf{y}(t_0)|| + |\mathbf{y}(t_0)| - |\mathbf{x}(t)|| < \varepsilon$$

deci funcția $t \to |\mathbf{x}(t)|$ este continuă în t_0.

Corolarul 1. *Dacă* $\mathbf{x}$ *este un cîmp de vectori continuu pe o mulțime* $A \subset T$, *atunci funcția* $|\mathbf{x}|$ *este continuă pe* A.

Corolarul 2. *Mulțimea cîmpurilor de vectori* $\mathcal{C}_{\mathcal{A}}(T)$ *definite pe* T *și continue (în raport cu* $\mathcal{A}$*) pe* T, *este o familie fundamentală.*

Într-adevăr, $\mathcal{C}_{\mathcal{A}}(T)$ este un spațiu vectorial; deoarece $\mathcal{A} \subset \mathcal{C}_{\mathcal{A}}(T)$, mulțimea $\{\mathbf{x}(t);\ \mathbf{x} \in \mathcal{C}_{\mathcal{A}}(T)\}$ este densă în $E(t)$ oricare ar fi $t \in T$, deoarece conține mulțimea densă $\{\mathbf{x}(t);\ \mathbf{x} \in \mathcal{A}\}$.

Conform corolarului 1, pentru orice $\mathbf{x} \in \mathcal{C}_{\mathcal{A}}(T)$, funcția $|\mathbf{x}|$ este continuă pe T, deci toate condițiile definiției 1 sînt verificate de $\mathcal{C}_{\mathcal{A}}(T)$.

Definiția 3. *Spunem că două familii fundamentale* $\mathcal{A}_1$ *și* $\mathcal{A}_2$ *sînt echivalente dacă mulțimea cîmpurilor de vectori continue pe* T *în raport cu* $\mathcal{A}_1$ *este egală cu mulțimea cîmpurilor de vectori continue pe* T *în raport cu* $\mathcal{A}_2$.

Din corolarul 2 rezultă că orice familie fundamentală $\mathcal{A}$ este echivalentă cu $\mathcal{C}_{\mathcal{A}}(T)$. Rezultă de aici că dacă $\mathcal{A}_1$ este un spațiu vectorial, obținut din $\mathcal{A}$ prin adăugare de cîmpuri de vectori continue din $\mathcal{C}_{\mathcal{A}}(T)$, atunci $\mathcal{A}_1$ este o familie fundamentală echivalentă cu $\mathcal{A}$.

Exemplu. Dacă $E(t) = E$ pentru orice $t \in T$, familiile fundamentale $\mathcal{C}_E(T)$ și $\mathcal{K}_E(T)$ sînt echivalente cu familia fundamentală a aplicațiilor constante ale lui T în E.

3. Proprietățile cîmpurilor de vectori continue

În cele ce urmează vom presupune că există o familie fundamentală $\mathcal{A} \subset \mathcal{C}(T)$ pe care o menținem fixă.

Propoziția 2. *Un cîmp de vectori* $\mathbf{x}$ *este continuu pe o mulțime* $A \subset T$ *dacă și numai dacă pentru orice* $\mathbf{y} \in \mathcal{A}$, *funcția* $|\mathbf{x} - \mathbf{y}|$ *este continuă pe* A.

Dacă $\mathbf{x}$ este continuu pe A, atunci pentru orice $\mathbf{y} \in \mathcal{A}$, cîmpul $\mathbf{x}-\mathbf{y}$ este continuu pe A deci funcția $|\mathbf{x}-\mathbf{y}|$ este continuă pe A.

Reciproc, să presupunem că funcția $|\mathbf{x}-\mathbf{y}|$ este continuă pe A oricare ar fi cîmpul $\mathbf{y} \in \mathcal{A}$. Fie $t_0 \in A$ și $\varepsilon > 0$.

Deoarece mulțimea $\{\mathbf{y}(t_0);\ \mathbf{y} \in \mathcal{A}\}$ este densă în $E(t_0)$, există un cîmp $\mathbf{y} \in \mathcal{A}$ astfel încît să avem $|\mathbf{y}(t_0) - \mathbf{x}(t_0)| < \varepsilon$.

Deoarece funcția $|\mathbf{x}-\mathbf{y}|$ este continuă în t_0, există o vecinătate V a lui t_0 astfel încît să avem

$$|\mathbf{y}(t) - \mathbf{x}(t)| < \varepsilon, \text{ pentru } t \in V \cap A,$$

deci $\mathbf{x}$ este continuu în t_0. Deoarece $t_0 \in A$ a fost ales arbitrar, rezultă că $\mathbf{x}$ este continuu pe A.

Propoziția 3. *Un cîmp de vectori* $\mathbf{x} \in \mathcal{C}(\mathcal{L})$ *este continuu pe* T, *dacă și numai dacă este limită uniformă, pe fiecare mulțime compactă, de cîmpuri de vectori de forma* $\sum_{i=1}^{n} f_i \mathbf{x}_i$ *cu* $\mathbf{x}_i \in \mathcal{A}$ *și* f_i *funcții scalare continue pe* T.

Să presupunem că $\mathbf{x}$ este limită uniformă pe fiecare compact de cîmpuri de forma $\Sigma f_i \mathbf{x}_i$.

Fie $t_0 \in T$ un punct, K o vecinătate compactă a lui t_0 și $\varepsilon > 0$. Există un cîmp $\mathbf{z} = \sum_{i=1}^{n} f_i \mathbf{x}_i$ astfel încît să avem $|\mathbf{x}(t) - \mathbf{z}(t)| < \frac{\varepsilon}{2}$ pentru $t \in K$. Deoarece $\mathbf{z}$ este un cîmp continuu, există o vecinătate V a lui t_0 și un cîmp $\mathbf{y} \in \mathcal{A}$ astfel încît să avem $|\mathbf{z}(t) - \mathbf{y}(t)| < \frac{\varepsilon}{2}$ pentru $t \in V$. Atunci $K \cap V$ este o vecinătate a lui t_0, și pentru $t \in K \cap V$ avem

$$|\mathbf{x}(t) - \mathbf{y}(t)| \leqslant \mathbf{x}(t) - \mathbf{z}(t)| + |\mathbf{z}(t) - \mathbf{y}(t)| < \varepsilon$$

deci $\mathbf{x}$ este continuu în t_0. Urmează că $\mathbf{x}$ este continuu pe T.

Reciproc, să presupunem că $\mathbf{x}$ este continuu pe T. Fie $K \subset T$ o mulțime compactă și $\varepsilon > 0$. Pentru orice punct $t_0 \in K$, există (definiția 2, condiția 2) un cîmp $\mathbf{x}_0 \in \mathcal{A}$ astfel încît să avem $|\mathbf{x}(t_0) - \mathbf{x}_0(t_0)| < \varepsilon$.

Deoarece $\mathbf{x} - \mathbf{x}_0$ este continuu pe T, există o vecinătate V_0 a lui t_0 astfel încît să avem

$$|\mathbf{x}(t) - \mathbf{x}_0(t)| < \varepsilon \text{ pentru } t \in V_0.$$

Deoarece K este compact, putem găsi o acoperire finită $(V_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ a lui K formată din mulțimi deschise, și o familie finită $(\mathbf{x}_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ de cîmpuri din $\mathcal{A}$, astfel încît pentru fiecare i să avem

$$|\mathbf{x}(t) - \mathbf{x}_i(t)| < \varepsilon \text{ pentru } t \in V_i.$$

Fie $(f_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ o partiție continuă a unității pe K, subordonată acoperirii $(V_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$. Avem atunci

$$|\mathbf{x}(t) - \sum_i f_i(t) \mathbf{x}_i(t)| < \varepsilon \text{ pentru } t \in V_i$$

și cu aceasta propoziția este demonstrată.

Observații. 1° Din prima parte a demonstrației deducem că dacă $(\mathbf{x}_n)$ este un șir de cîmpuri uniform convergent pe o mulțime $A \subset T$ către un cîmp $\mathbf{x}$ și dacă restricția fiecărui cîmp $\mathbf{x}_n$ la A este continuă, atunci restricția limitei $\mathbf{x}$ la A este de asemenea continuă.

2° Din a doua parte a demonstrației deducem că dacă $\mathcal{A}_0$ este o mulțime de cîmpuri de vectori continue, cu singura proprietate că pentru orice $t \in T$ mulțimea $\{\mathbf{x}(t); \mathbf{x} \in \mathcal{A}_0\}$ este densă în $E(t)$, atunci orice cîmp de vectori $\mathbf{x}$ continuu pe T este limita uniformă pe fiecare mulțime compactă, de cîmpuri de forma $\sum_{i=1}^{n} f_i \mathbf{x}_i$ cu $\mathbf{x}_i \in \mathcal{A}_0$ și f_i funcții scalare continue.

Lemă. Fie $K \subset T$ *o mulțime compactă,* $\mathbf{x}$ *un cîmp de vectori definit pe* K, $\eta > 0$ *și* $\mathbf{y} \in \mathscr{C}(\mathscr{L})$ *un cîmp de vectori continuu pe* T *astfel încît*

$$|\mathbf{y}(t) - \mathbf{x}(t)| < \eta, \text{ pentru } t \in K.$$

Pentru orice $\varepsilon > 0$ *există atunci un cîmp de vectori* $\mathbf{z}$ *continuu pe* T *astfel încît*

$$|\mathbf{z}(t) - \mathbf{x}(t)| < \varepsilon \text{ pentru } t \in K \text{ și } |\mathbf{z}(t) - \mathbf{y}(t)| < \varepsilon + \eta \text{ pentru } t \in T.$$

Fie $t_0 \in K$. Deoarece mulțimea $\{\mathbf{x}(t_0);\ \mathbf{x} \in \mathscr{A}\}$ este densă în $E(t_0)$, există un cîmp $\mathbf{z}_0 \in \mathrm{A}$ astfel încît să avem

$$|\mathbf{z}_0(t_0) - \mathbf{x}(t_0)| < \varepsilon.$$

Atunci

$$|\mathbf{z}_0(t_0) - \mathbf{y}(t_0)| \leqslant |\mathbf{z}_0(t_0) - \mathbf{x}(t_0)| + |\mathbf{x}(t_0) - \mathbf{y}(t_0)| < \varepsilon + \eta$$

Deoarece funcțiile $\mathbf{z}_0 - \mathbf{x}$ și $\mathbf{z}_0 - \mathbf{y}$ sînt continue în t_0, există o vecinătate deschisă V_0 a lui t_0 astfel încît să avem $|\mathbf{z}_0(t) - \mathbf{x}(t)| < \varepsilon$ pentru $t \in V_0 \cap K$ și $|\mathbf{z}_0(t) - \mathbf{y}(t)| < \varepsilon + \eta$ pentru $t \in V_0$. Deoarece K este compact, există o acoperire finită $(V_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ a lui K formată din mulțimi deschise și o familie finită $(\mathbf{z}_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ de cîmpuri din $\mathscr{A}$, astfel încît pentru fiecare i să avem $|\mathbf{z}_i(t) - \mathbf{x}(t)| < \varepsilon$ pentru $t \in V_i \cap K$ și $|\mathbf{z}_i(t) - \mathbf{y}(t)| < \varepsilon + \eta$ pentru $t \in V_i$.

Fie $(f_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ o partiție continuă a unității pe K, subordonată acoperirii $(V_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$. Dacă notăm $\mathbf{z}' = \sum_{i=1}^{n} f_i \mathbf{z}_i$, atunci $\mathbf{z}'$ este continuu pe T și notînd $U = \bigcup_{i=1}^{n} V_i$, avem

$$|\mathbf{z}'(t) - \mathbf{x}(t)| < \varepsilon \text{ pentru } t \in K \text{ și } |\mathbf{z}'(t) - \mathbf{y}(t)| < \varepsilon + \eta \text{ pentru } t \in U.$$

Deoarece U este o vecinătate deschisă a lui K, există o funcție continuă $f: T \to [0, 1]$, astfel încît $f(t) = 1$ pentru $t \in K$ și $f(t) = 0$ pentru $t \notin U$. Dacă notăm

$$\mathbf{z}(t) = [1 - f(t)]\mathbf{y}(t) + f(t)\mathbf{z}'(t)$$

atunci $\mathbf{z}$ este un cîmp de vectori continuu pe T și

$$|\mathbf{z}(t) - \mathbf{x}(t)| < \varepsilon \text{ pentru } t \in K \text{ și } |\mathbf{z}(t) - \mathbf{y}(t)| < \varepsilon + \eta \text{ pentru } t \in T$$

Cu aceasta lema este demonstrată.

Propoziția 4. *Fie* $K \subset T$ *o mulțime compactă și* $\varepsilon > 0$. *Orice cîmp de vectori* $\mathbf{x}$ *definit și continuu pe* K *se poate prelungi la un cîmp de vectori* $\mathbf{y}$ *definit și continuu pe* T *astfel încît*

$$\|\mathbf{y}\| \leqslant \|\mathbf{x}\|_K + \varepsilon.$$

Din a doua parte a demonstrației propoziției 3, rezultă că $\mathbf{x}$ poate fi aproximat uniform pe K prin cîmpuri de vectori de forma

$$\mathbf{y}_\alpha = \Sigma f_i \mathbf{x}_i,$$

cu $\mathbf{x}_i \in \mathcal{A}$ și f_i funcții scalare definite și continue pe T. Există deci un cîmp de vectori $\mathbf{y}_1$ continuu pe T astfel încît să avem

$$|\mathbf{y}_1(t) - \mathbf{x}(t)| < \frac{1}{2} \text{ pentru } t \in K.$$

Conform lemei, pentru $\varepsilon = \frac{1}{2^2}$, există atunci un cîmp de vectori $\mathbf{y}_2$ continuu pe T astfel încît să avem

$$|\mathbf{y}_2(t) - \mathbf{x}(t)| < \frac{1}{2^2}, \text{ pentru } t \in K$$

și

$$|\mathbf{y}_n(t) - \mathbf{y}_1(t)| < 2 \cdot \frac{1}{2}, \text{ pentru } t \in T.$$

Prin recurență, deducem că există un șir $(\mathbf{y}_n)$ de cîmpuri continue pe T, care pentru fiecare n verifică inegalitățile

$$|\mathbf{y}_n(t) - \mathbf{x}(t)| < 2^{-n}, \text{ pentru } t \in K,$$

$$|\mathbf{y}(t) - \mathbf{y}_{n-1}(t)| < 2^{-n+2}, \text{ pentru } t \in T.$$

Șirul $(\mathbf{y}_n)$ converge uniform pe T către un cîmp de vectori $\mathbf{y}'$ continuu pe T. Trecînd la limită în prima din inegalitățile precedente, deducem că $\mathbf{y}'(t) = \mathbf{x}(t)$ pentru $t \in K$, deci $\mathbf{y}'$ este o prelungire a lui $\mathbf{x}$.

Pentru orice punct $t_0 \in K$ avem

$$|\mathbf{y}'(t_0)| \leqslant \|\mathbf{y}'\|_K = \|\mathbf{y}\|_K < \|\mathbf{x}\|_K + \varepsilon.$$

Deoarece $|\mathbf{y}'|$ este continuă, inegalitatea $|\mathbf{y}'(t)| < \|\mathbf{x}\|_K + \varepsilon$ rămîne adevărată pe o vecinătate deschisă V a lui t_0.

Deoarece K este compact, putem găsi o acoperire $(V_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ a lui K formată din mulțimi deschise astfel încît, notînd $U = \bigcup_{i=1}^{n} V_i$, să avem

$$|\mathbf{y}'(t)| < \|\mathbf{x}\|_K + \varepsilon, \text{ pentru } t \in U.$$

Luînd acum o funcție continuă $f: T \to [0, 1]$, egală cu 1 pe K și nulă pe $T - U$, și notînd cu $\mathbf{y} = f\mathbf{y}'$, cîmpul $\mathbf{y}$ este continuu pe T, $\mathbf{y}(t) = \mathbf{x}(t)$ pentru $t \in K$ și

$$|\mathbf{y}(t)| \leqslant \|\mathbf{x}\|_K + \varepsilon, \text{ pentru orice } t \in T.$$

Corolar. *Fie $(t_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ o familie finită de puncte din T și pentru fiecare i, fie $a_i \in E(t_i)$. Există un cîmp de vectori $\mathbf{x}$ continuu pe T astfel încît să avem*

$$\mathbf{x}(t_i) = a_i, \text{ pentru } i = 1, 2, \ldots, n.$$

Într-adevăr, mulțimea K formată din punctele t_i este compactă iar cîmpul de vectori

$$\mathbf{y}(t) = \begin{cases} a_i \text{ pentru } t = t_i, \ i = 1, 2, \cdots, n, \\ 0 \text{ pentru } t \notin K. \end{cases}$$

este continuu pe K.

Vom nota cu $\mathcal{X}_{\mathcal{A}}(T)$ mulțimea cîmpurilor de vectori continue pe T (în raport cu familia fundamentală $\mathcal{A}$) cu suportul compact.

Pentru orice mulțime $A \subset T$, $\mathcal{X}_{\mathcal{A}}(T, A)$ este subspațiul lui $\mathcal{X}_{\mathcal{A}}(T)$ format din cîmpurile cu suportul conținut în A.

Mulțimile $\mathcal{X}_{\mathcal{A}}(T)$ și $\mathcal{X}_{\mathcal{A}}(T, A)$ sînt spații vectoriale și module pe spațiul funcțiilor scalare continue pe T.

În cazul cînd $E(t) = E$ pentru orice $t \in T$, avem

$$\mathcal{X}_{\mathcal{A}}(T) = \mathcal{X}_E(T) \text{ și } \mathcal{X}_{\mathcal{A}}(T, A) = \mathcal{X}_E(T, A).$$

Definiția 4. *Spunem că un subspațiu $\mathcal{V} \subset \mathcal{X}_{\mathcal{A}}(T)$ este bogat dacă pentru orice mulțime compactă $K \subset T$ există o vecinătate relativ compactă $U \supset K$, astfel încît orice cîmp $\mathbf{x} \in \mathcal{X}_{\mathcal{A}}(T, K)$ se poate aproxima uniform prin cîmpuri din $\mathcal{V}$ cu suportul conținut în U.*

Propoziția 5. *Spațiul $\mathcal{H}_{\mathcal{A}}(T)$ al combinațiilor liniare de forma*

$$\sum_{i=1}^{n} f_i \mathbf{x}_i \text{ cu } \mathbf{x}_i \in \mathcal{A} \text{ și } f_i \in \mathcal{X}(T)$$

este bogat.

Fie K o mulțime compactă și U o vecinătate relativ compactă a lui K. Fie $\mathbf{x} \in \mathcal{X}_{\mathcal{A}}(T, \mathrm{K})$. Conform propoziției 3, pentru fiecare $\varepsilon > 0$, există un cîmp de forma $\mathbf{y}_\varepsilon = \sum_i^n g_i \mathbf{x}_i$ cu $\mathbf{x}_i \in \mathcal{A}$ și f_i funcții scalare continue, astfel încît

$$|\mathbf{x}(t) - \mathbf{y}_\varepsilon(t)| < \varepsilon, \text{ pentru } t \in \overline{U}.$$

Fie $\varphi : T \to [0, 1]$ o funcție continuă, egală cu 1 pe K și nulă pe $T - U$. Fiecare funcție $f_i = g_i \varphi$ este continuă, cu suportul în U și pentru cîmpul $\mathbf{x}_\varepsilon = \sum_{i=1}^{n} f_i \mathbf{x}_i$ avem

$$|\mathbf{x}(t) - \mathbf{x}_\varepsilon(t)| < \varepsilon, \text{ pentru } t \in T.$$

Observație. Fie $\mathcal{A}_0$ o mulțime de cîmpuri de vectori continue cu singura proprietate că pentru fiecare $t \in T$ mulțimea $\{\mathbf{x}(t);\ \mathbf{x} \in \mathcal{A}_0\}$ este densă în $E(t)$. Ținînd seama de observația 2 care urmează propoziția 3, deducem că spațiul combinațiilor liniare de forma $\sum_i^n f_i \mathbf{x}_i$, cu $\mathbf{x}_i \in \mathcal{A}_0$ și $f_i \in \mathcal{X}_+(T)$, este bogat.

4. Cîmpuri de vectori p-integrabile

Fie μ o măsură pozitivă pe T.
Pentru fiecare cîmp de vectori $\mathbf{x} \in \mathcal{C}(\mathcal{L})$ notăm

$$N_p(\mathbf{x}, \mu) = \left(\int^* |\mathbf{x}(t)|^p \, d\mu \right)^{\frac{1}{p}}, \quad (1 \leqslant p < +\infty).$$

În loc de $N_p(\mathbf{x}, \mu)$ vom scrie $N_p(\mathbf{x})$ dacă nu este pericol de confuzie asupra măsurii μ. Următoarele două proprietăți se deduc, ca și în cazul funcțiilor obișnuite:

1) $N_p\left(\sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{x}_n\right) \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} N_p(\mathbf{x}_n)$, (*teorema* 1, § 7);

2) *Dacă* $N_p(\mathbf{x}) < +\infty$, *atunci* $\mathbf{x}(t) = 0$, μ *-aproape peste tot, pe complementara reuniunii unui șir de mulțimi compacte* (*corolarul* 1 *al propoziției* 3, § 11).

Pentru fiecare număr p care verifică inegalitățile $1 \leqslant p < +\infty$, însemnăm cu $\mathcal{F}^p_{\mathcal{L}}(T, \mu)$ sau $\mathcal{F}^p_{\mathcal{L}}(\mu)$ sau $\mathcal{F}^p_{\mathcal{L}}$, mulțimea cîmpurilor de vectori $\mathbf{x} \in \mathcal{C}(\mathcal{L})$ pentru care $N_p(\mathbf{x}) < +\infty$.

În cazul cînd $E(t) = E$ pentru fiecare $t \in T$, avem $\mathcal{F}^p_{\mathcal{L}} = \mathcal{F}^p_E$ (a se vedea § 7, punctul 3).

$\mathcal{F}^p_{\mathcal{L}}$ este un spațiu vectorial iar aplicația $\mathbf{x} \to N_p(\mathbf{x})$ este o semi-normă care definește pe $\mathcal{F}^p_{\mathcal{L}}$ topologia convergenței în medie de ordin p. Aderența cîmpului identic nul, în această topologie, este subspațiul $\mathcal{N}_{\mathcal{L}}$ al cîmpurilor μ -neglijabile (nule μ -aproape peste tot).

Spațiul cît $\mathcal{F}^p_{\mathcal{L}}/\mathcal{N}_{\mathcal{L}}$ se notează $F^p_{\mathcal{L}}$ iar aplicația $\tilde{\mathbf{x}} \to \|\tilde{\mathbf{x}}\|_p = N_p(\mathbf{x})$ este o normă pe acest spațiu.

Toate proprietățile spațiilor $\mathcal{F}^p_E$ rămîn valabile, și cu aceleași demonstrații pentru spațiile $\mathcal{F}^p_{\mathcal{L}}$:

1) *Dacă* $\sum_{n=1}^{\infty} N_p(\mathbf{x}_n) < +\infty$, *atunci seria* $\sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{x}_n(t)$ *este absolut convergentă aproape peste tot. Orice cîmp* $\mathbf{x} \in \mathcal{C}(\mathcal{L})$ *egal aproape peste tot cu suma seriei, aparține spațiului* $\mathcal{F}^p_{\mathcal{L}}$ *și* $N_p\left(\mathbf{x} - \sum_{k \leqslant n} \mathbf{x}_k\right) \leqslant \sum_{n>1} N_p(\mathbf{x}_k)$ (*propoziția* 4, § 7).

2) *Din orice șir Cauchy* $(\mathbf{x}_n)$ *din* $\mathcal{F}^p_{\mathcal{L}}$ *se poate extrage un subșir* $(\mathbf{x}_{n_k})$ *convergent aproape peste tot și în medie de ordin p către un cîmp* $\mathbf{x} \in \mathcal{F}^p_{\mathcal{L}}$, *și există o funcție* $g \geqslant 0$ *cu* $N_p(g) < +\infty$ *și* $|\mathbf{x}_{n_k}(t)| \leqslant g(t)$, *oricare ar fi* $t \in T$ *și* $k \in N$ (*propoziția* 6, § 7).

3) *Spațiul* $\mathcal{F}^p_{\mathcal{L}}$ *este complet* (*teorema* 2, § 7).

Dacă $\mathbf{x} \in \mathcal{K}_{\mathcal{A}}(T)$, atunci $|\mathbf{x}| \in \mathcal{K}(T)$, deci $N_p(\mathbf{x}) < +\infty$. Rezultă că spațiul $\mathcal{K}_{\mathcal{A}}(T)$ este conținut în fiecare spațiu $\mathcal{F}^p_{\mathcal{E}}$.

Definiția 5. *Pentru fiecare* p, $1 \leqslant p < +\infty$, *notăm cu* $\mathcal{L}^p_{\mathcal{A}}(T, \mu)$ *sau* $\mathcal{L}^p_{\mathcal{A}}(\mu)$ *sau* $\mathcal{L}^p_{\mathcal{A}}$, *aderența spațiului* $\mathcal{K}_{\mathcal{A}}(T)$ *în* $\mathcal{F}^p_{\mathcal{E}}$. *Cîmpurile din* $\mathcal{L}^p_{\mathcal{A}}$ *se numesc cîmpuri de vectori de putere p integrabile sau cîmpuri p -integrabile.*

În cazul cînd $E(t) = E$ pentru orice $t \in T$, avem $\mathcal{L}^p_{\mathcal{A}} = \mathcal{L}^p_E$ (a se vedea § 7, punctul 4).

Din definiția 5 rezultă în primul rînd că $\mathcal{L}^p_{\mathcal{A}}$ este complet pentru topologia definită de seminorma N_p, iar $\mathcal{K}_{\mathcal{A}}(T)$ este dens în $\mathcal{L}^p_{\mathcal{A}}$ pentru această topologie.

Toate proprietățile spațiilor $\mathcal{L}^p_{\mathcal{A}}$ de funcții obișnuite se păstrează cu aceleași demonstrații pentru spațiile $\mathcal{L}^p_{\mathcal{A}}$:

1) *Dacă* $(\mathbf{x}_n)$ *este un șir Cauchy de cîmpuri din* $\mathcal{L}^p_{\mathcal{A}}$, *convergent aproape peste tot către un cîmp* $\mathbf{x} \in \mathcal{C}(\mathcal{E})$, *atunci* $\mathbf{x} \in \mathcal{L}^p_{\mathcal{A}}$ *iar* $(\mathbf{x}_n)$ *converge către* $\mathbf{x}$ *și în medie de ordin p* (*corolarul prop.* 11, § 7).

2) *Dacă* $\mathcal{L}$ *este o mulțime densă în* $\mathcal{L}^p_{\mathcal{A}}$, *atunci pentru orice cîmp* $\mathbf{x} \in \mathcal{L}^p_{\mathcal{A}}$ *există un șir* $(\mathbf{x}_n)$ *de cîmpuri din* $\mathcal{L}$, *convergent către* $\mathbf{x}$ *în medie de ordin p și aproape peste tot, și o funcție* $g \geqslant 0$ *cu* $N_p(g) < +\infty$ *și* $|\mathbf{x}_n(t)| \leqslant g(t)$, *pentru orice* $t \in T$ *și orice* $n \in N$ (*prop.* 12, § 7).

În particular, putem lua $\mathcal{L} = \mathcal{K}_{\mathcal{A}}(T)$.

3) *Dacă* $\mathbf{x} \in \mathcal{L}^p_{\mathcal{A}}$ *atunci* $|\mathbf{x}| \in \mathcal{L}^p$ (*prop.* 14, § 7).

4) *Teorema lui Lebesgue*: *Fie* $(\mathbf{x}_n)$ *un șir de cîmpuri de vectori din* $\mathcal{L}^p_{\mathcal{A}}$. *Dacă* $(\mathbf{x}_n)$ *converge aproape peste tot către un cîmp* $\mathbf{x} \in \mathcal{C}(\mathcal{E})$ *și dacă există o funcție* $f \geqslant 0$ *cu* $N_p(f) < +\infty$ *și* $|\mathbf{x}_n(t)| \leqslant f(t)$ *aproape peste tot, pentru fiecare n, atunci* $\mathbf{x} \in \mathcal{L}^p_{\mathcal{A}}$ *și* $\lim_{n\to\infty} N_p(\mathbf{x}_n - \mathbf{x}) = 0$.

5) $\mathbf{x} \in \mathcal{L}^p_{\mathcal{A}}$ *dacă și numai dacă* $|\mathbf{x}|^{p-1}\mathbf{x} \in \mathcal{L}^1_{\mathcal{A}}$ (corolarul teoremei 6, § 7).

5. Cîmpuri de vectori măsurabile

Fie μ o măsură, pozitivă pe T.

Definiția 6. *Spunem că un cîmp* $\mathbf{x} \in \mathcal{C}(\mathcal{E})$ *este măsurabil* (*în raport cu* $\mathcal{A}$ *și* μ) *dacă pentru orice mulțime compactă* $K \subset T$ *și orice* $\varepsilon > 0$, *există o mulțime compactă* $K' \subset K$ *astfel încît* $\mu(K - K') < \varepsilon$, *iar restricția lui* $\mathbf{x}$ *la* K' *este continuă.*

În cazul cînd $E(t) = E$ pentru orice $t \in T$ definiția 6 se reduce la definiția funcțiilor măsurabile obișnuite (a se vedea § 9).

Mulțimea $\mathscr{M}_{\mathscr{A}}(T, \mu)$ a cîmpurilor $\mathbf{x} \in \mathscr{C}(\mathscr{E})$ măsurabile în raport cu $\mathscr{A}$ și μ este un spațiu vectorial și un modul pe algebra funcțiilor scalare μ -măsurabile definite pe T.

Se demonstrează ca și pentru funcțiile măsurabile obișnuite, următoarele proprietăți :

1) *Un cîmp* $\mathbf{x} \in \mathscr{C}(\mathscr{E})$ *este măsurabil dacă și numai dacă pentru orice mulțime compactă* $K \subset T$ *există o partiție a lui* K *formată dintr-o mulțime neglijabilă* N *și un șir* (K_n) *de mulțimi compacte, astfel încît restricția lui* $\mathbf{x}$ *la fiecare* K_n *să fie continuă* (*prop.* 4, § 9).

În această proprietate, ca și în definiția 6, mulțimile compacte pot fi înlocuite prin mulțimi integrabile.

2) *Dacă* $\mathbf{x}$ *este un cîmp măsurabil, atunci* $|\mathbf{x}|$ *este o funcție măsurabilă* (a se vedea prop. 1).

3) *Dacă* $\mathbf{x}$ *are proprietatea că pentru fiecare mulțime compactă* $K \subset T$, *cîmpul* $\varphi_K \mathbf{x}$ *este măsurabil, atunci* $\mathbf{x}$ *este măsurabil* (*corolarul* 2 *al prop.* 27, § 9)

4) *Teorema lui Egoroff. Dacă* $(\mathbf{x}_n)$ *este un șir de cîmpuri măsurabile și dacă există* $\lim_{n \to \infty} \mathbf{x}_n(t) = \mathbf{x}(t)$, *aproape peste tot, atunci pentru orice mulțime compactă* $K \subset T$ *și orice* $\varepsilon > 0$ *există o mulțime compactă* $K_1 \subset K$ *cu* $\mu(K - K_1) < \varepsilon$ *astfel încît restricțiile cîmpurilor* $\mathbf{x}_n$ *la* K_1 *să fie continue și să conveargă uniform către* $\mathbf{x}$ (*teorema* 1, § 10).

Pentru demonstrație se observă că deoarece cîmpurile $\mathbf{x}_n$ sînt măsurabile, se poate găsi o mulțime compactă $K_0 \subset K$ cu $\mu(K - K_0) < \frac{\varepsilon}{2}$, astfel încît restricțiile tuturor cîmpurilor $\mathbf{x}_n$ la K_0 să fie continue. Demonstrația continuă ca în teorema lui Egoroff pentru funcții obișnuite, înlocuind distanța $d(f_p(t), f_q(t))$ cu norma $|\mathbf{x}_p(t) - \mathbf{x}_q(t)|$.

5) *Dacă* $(\mathbf{x}_n)$ *este un șir de cîmpuri măsurabile convergent aproape peste tot către un cîmp* $\mathbf{x} \in \mathscr{C}(\mathscr{E})$, *atunci* $\mathbf{x}$ *este măsurabil* (*corolarul teoremei* 1, § 10).

6) *Criteriu de integrabilitate. Un cîmp de vectori* $\mathbf{x} \in \mathscr{C}(\mathscr{E})$ *aparține spațiului* $\mathscr{L}^p_{\mathscr{A}}$, $1 \leqslant p < +\infty$, *dacă și numai dacă* $\mathbf{x}$ *este măsurabil și* $N_p(\mathbf{x}) < +\infty$ (*teorema* 1, § 11).

7) *Dacă* $\mathbf{x} \in \mathscr{L}^p_{\mathscr{A}}$ *iar* A *este o mulțime măsurabilă, atunci* $\varphi_A \mathbf{x} \in \mathscr{L}^p_{\mathscr{A}}$ (*corolarul* 4 *al teoremei* 1, § 11).

8) *Dacă* $\mathbf{x}$ *este un cîmp de vectori continuu pe* T *iar* A *este o mulțime boreliană relativ compactă, atunci* $\varphi_A \mathbf{x} \in \mathscr{L}^p_{\mathscr{A}}$.

Într-adevăr, $\|\mathbf{x}\|_A = \sup_{t \in A} |\mathbf{x}(t)| < +\infty$, deci

$$N_p(\varphi_A \mathbf{x}) = \left(\int \varphi_A |\mathbf{x}|^p \, d\mu \right)^{\frac{1}{p}} \leqslant \|\mathbf{x}\|_A \, \mu(A)^{\frac{1}{p}} < +\infty$$

iar $\varphi_A \mathbf{x}$ este măsurabil, deci $\varphi_A \mathbf{x} \in \mathscr{L}^p_{\mathscr{A}}$.

Observații. Se poate lua A o mulțime măsurabilă relativ compactă, sau o mulțime integrabilă pe care $\mathbf{x}$ este mărginit. Rezultă că orice cîmp etajat din $\mathcal{E}_{\mathcal{A}}(\mathcal{B})$ de forma

$$\mathbf{x} = \sum_i \varphi_{A_i} \mathbf{x}_i \quad , \quad A_i \in \mathcal{B}, \ \mathbf{x}_i \in \mathcal{A}, \ 1 \leqslant i \leqslant n,$$

aparține fiecărui spațiu $\mathcal{L}^p_{\mathcal{A}}$. Mai mult :

9) *Spațiul $\mathcal{E}_{\mathcal{A}}(\mathcal{B})$ al cîmpurilor etajate este dens în fiecare spațiu $\mathcal{L}^p_{\mathcal{A}}$, $1 \leqslant p < +\infty$.*

Această proprietate rezultă din faptul că orice cîmp $\mathbf{x}$ din $\mathcal{K}_{\mathcal{A}}(T)$ se poate aproxima uniform cu cîmpuri etajate din $\mathcal{E}_{\mathcal{A}}(\mathcal{B})$.

Într-adevăr, fie $\mathbf{x} \in \mathcal{K}_{\mathcal{A}}(T)$, K suportul lui $\mathbf{x}$ și $\varepsilon > 0$. Fie $t_0 \in K$. Deoarece $\mathbf{x}$ este continuu în t_0, există un cîmp $\mathbf{x}_0 \in \mathcal{A}$ și o vecinătate V_0 a lui t_0 astfel încît să avem $|\mathbf{x}(t) - \mathbf{x}_0(t)| < \varepsilon$ pentru $t \in V_0$.

Deoarece K este compact, există o familie finită $(V_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ de mulțimi deschise relativ compacte, care acoperă pe K și o familie finită $(\mathbf{x}_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ de cîmpuri din $\mathcal{A}$ astfel încît, pentru fiecare, i să avem

$$|\mathbf{x}(t) - \mathbf{x}_i(t)| < \varepsilon \qquad \text{pentru } t \in V_i .$$

Există o familie finită $(A_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ de mulțimi boreliene din $\mathcal{B}$ cu $A_i \subset V_i$ pentru fiecare i și $\bigcup_{i=1}^{n} A_i = \bigcup_{i=1}^{n} V_i$.

Atunci $\sum_i \varphi_{A_i} \mathbf{x}_i$ este un cîmp etajat și

$$|\mathbf{x}(t) - \sum_i \varphi_{A_i}(t) \mathbf{x}_i(t)| < \varepsilon \text{ pentru orice } t \in T.$$

Așadar $\mathcal{E}_{\mathcal{A}}(\mathcal{B})$ este dens în $\mathcal{K}_{\mathcal{A}}(T)$ pentru topologia convergenței uniforme, deci și pentru topologia convergenței în medie de ordin p, care este mai puțin fină. Cum $\mathcal{K}_{\mathcal{A}}(T)$ este dens în $\mathcal{L}^p_{\mathcal{A}}$ pentru această topologie, urmează că $\mathcal{E}_{\mathcal{A}}(\mathcal{B})$ este dens în $\mathcal{L}^p_{\mathcal{A}}$.

10) *Există cîmpuri măsurabile $\mathbf{x} \in \mathcal{C}(\mathcal{E})$ diferite de zero pe T.*

Fie $K \subset T$ o mulțime compactă și $t_0 \in K$. Deoarece mulțimea $\{\mathbf{x}(t_0) \mid \mathbf{x} \in \mathcal{A}\}$ este densă în $E(t_0)$, există un cîmp $x_0 \in \mathcal{A}$ cu $\mathbf{x}_0(t_0) \neq 0$. Deoarece $\mathbf{x}_0$ este continuu, există o vecinătate deschisă V_0 a lui t_0 astfel încît $\mathbf{x}_0(t) \neq 0$ pentru $t \in V$. Deoarece K este compact, există o familie finită $(V_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ de mulțimi deschise care acoperă pe K și o familie finită $(\mathbf{x}_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ de cîmpuri din $\mathcal{A}$, astfel încît pentru fiecare i să avem

$$\mathbf{x}_i(t) \neq 0 \qquad \text{pentru } t \in V_i .$$

Fie $(A_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ o familie finită de mulțimi boreliene disjuncte astfel încît $\bigcup_i A_i = K$ și $A_i \subset V_i$ pentru fiecare i. Atunci cîmpul $\mathbf{x} = \sum_{i=1}^{n} \varphi_{A_i} \mathbf{x}_i$ este măsurabil și $\mathbf{x}(t) \neq 0$ pentru $t \in K$.

Fie $\mathcal{K}$ o clasă de mulțimi compacte, disjuncte două cîte două astfel încît mulțimea $N = T - \bigcup_{K \in \mathcal{K}} K$ este neglijabilă și astfel încît orice punct $t \in T$ posedă o vecinătate care intersectează o mulțime cel mult numărabilă de părți din $\mathcal{K}$ (prop. 9, § 11).

Pentru fiecare mulțime $K \in \mathcal{K}$ există un cîmp măsurabil $\mathbf{x}_K \in \mathcal{C}(\mathcal{L})$ cu $\mathbf{x}_K(t) \neq 0$ pentru $t \in K$. Să definim cîmpul $\mathbf{x}$ pe T prin egalitatea

$$\mathbf{x}(t) = \sum_{K \in \mathcal{K}} \varphi_K(t)\, \mathbf{x}_K(t), \quad t \in T.$$

Cîmpul $\mathbf{x}$ se anulează numai pe mulțimea neglijabilă N. Să arătăm că $\mathbf{x}$ este măsurabil. Fie $K \subset T$ o mulțime compactă oarecare. Pentru fiecare punct $t \in K$ să alegem o vecinătate V_t a lui t care intersectează o mulțime cel mult numărabilă de mulțimi din $\mathcal{K}$. Cum K poate fi acoperit de o familie finită de astfel de vecinătăți, rezultă că mulțimea K intersectează numai un șir (K_n) de mulțimi din $\mathcal{K}$.

Urmează că restricția lui $\mathbf{x}$ la K este egală aproape peste tot cu restricția la K a cîmpului măsurabil $\sum_{n=1}^{\infty} \varphi_{K_n} \mathbf{x}_n$ deci $\mathbf{x}$ este măsurabil. Modificînd acum $\mathbf{x}$ pe mulțimea neglijabilă N, cîmpul $\mathbf{x}$ rămîne măsurabil și putem realiza să nu se anuleze în nici un punct.

11) *Pentru orice funcție scalară măsurabilă f, există un cîmp de vectori măsurabil $\mathbf{x} \in \mathcal{C}(\mathcal{L})$ astfel încît să avem $|\mathbf{x}(t)| = |f(t)|$ pentru orice $t \in T$.*

Într-adevăr, există un cîmp măsurabil $\mathbf{y}$, diferit de zero pe T. Atunci cîmpul $\mathbf{z}(t) = \dfrac{\mathbf{y}(t)}{|\mathbf{y}(t)|}$, pentru $t \in T$, este măsurabil și $|\mathbf{z}(t)| = 1$ pentru $t \in T$. Cîmpul $\mathbf{x} = f\mathbf{z}$ este măsurabil și pentru orice $t \in T$ avem $|\mathbf{x}(t)| = |f(t)|$.

Să notăm cu $\mathcal{L}'$ familia $(E'(t))_{t \in T}$ a dualelor spațiilor $E(t)$ și cu $\mathcal{C}(\mathcal{L}')$ mulțimea cîmpurilor de funcționale $\mathbf{x}'$ definite pe T astfel încît $\mathbf{x}'(t) \in E'(t)$ pentru orice $t \in T$.

Să presupunem că există o familie fundamentală $\mathcal{A}' \subset \mathcal{C}(\mathcal{L}')$ de cîmpuri de funcționale continue, astfel încît funcția scalară $t \to \langle \mathbf{x}(t), \mathbf{x}'(t) \rangle$ să fie continuă, oricare ar fi $\mathbf{x} \in \mathcal{A}$ și $\mathbf{x}' \in \mathcal{A}'$.

Propoziția 6. *Fie $\mathbf{x} \in \mathcal{C}(\mathcal{L})$ un cîmp de vectori măsurabil relativ la $\mathcal{A}$ și μ și $0 < a < 1$. Există un cîmp de funcționale $\mathbf{x}' \in \mathcal{A}'$ măsurabil relativ la $\mathcal{A}'$ și μ astfel încît*

$$a\,|\mathbf{x}(t)| < |\langle \mathbf{x}(t), \mathbf{x}'(t) \rangle| \quad \text{și} \quad a < |\mathbf{x}'(t)| < 2 - a$$

μ-aproape peste tot.

Fie $K \subset T$ o mulțime compactă. Să presupunem întîi că restricția lui $\mathbf{x}$ la K este continuă și fie $\varepsilon > 0$ astfel încît $a + \varepsilon < 1$. Fie $t_0 \in K$. Există un element $x_0' \in E'(t_0)$ cu $|x_0'| = 1$ și

$$|\langle \mathbf{x}(t_0), x_0' \rangle| > |\mathbf{x}(t_0)|\,(a + \varepsilon).$$

Există apoi un cîmp de funcționale $\mathbf{x}' \in \mathcal{A}'$ astfel încît

$$|x'_0 - \mathbf{x}'(t_0)| < \varepsilon.$$

Atunci

$$|<\mathbf{x}(t_0), \mathbf{x}'(t_0)>| = |<\mathbf{x}(t_0), \mathbf{x}'(t_0) - x'_0> + <\mathbf{x}(t_0), x'_0>| \geqslant$$
$$\geqslant |<\mathbf{x}(t_0), x'_0>| - |<\mathbf{x}(t_0), \mathbf{x}'(t_0) - x'_0>| \geqslant$$
$$\geqslant |\mathbf{x}(t_0)|\,(a+\varepsilon) - |\mathbf{x}(t_0)|\,|\mathbf{x}'(t_0) - x'_0| \geqslant |\mathbf{x}(t_0)|\,(a+\varepsilon) -$$
$$- |\mathbf{x}(t_0)|\,\varepsilon = a\,|\mathbf{x}(t_0)|$$

și

$$a < 1 - \varepsilon = |x'_0| - \varepsilon < |\mathbf{x}'(t_0)| < |x'_0| + \varepsilon = 1 + \varepsilon < 2 - a.$$

Deoarece restricțiile la K ale funcțiilor care intervin în aceste inegalități sînt continue, există o vecinătate V_0 a lui t_0 astfel încît pentru $t \in V_0 \cap K$ să avem

$$|<\mathbf{x}(t), \mathbf{x}'(t)>| > a\,|\mathbf{x}(t)| \quad \text{și} \quad a < |\mathbf{x}'(t)| < 2 - a.$$

Deoarece K este compact, există o familie finită $V_1, \ldots, V_n$ de mulțimi deschise care acoperă pe K și o familie finită de cîmpuri de funcționale $\mathbf{x}'_1, \ldots, \mathbf{x}'_n$ din $\mathcal{A}'$ astfel încît pentru fiecare i să avem

$$|<\mathbf{x}(t), \mathbf{x}'_i(t)>| > a\,|\mathbf{x}(t)| \text{ și } a < |\mathbf{x}'_i(t)| < 2 - a,\ t \in V_i \cap K.$$

Fie $A_1, \ldots, A_n$ mulțimi măsurabile disjuncte astfel încît $A_i \subset V_i$ pentru fiecare i și $K = \bigcup_{i=1}^{n} A_i$. Cîmpul de funcționale $\mathbf{x}_K = \sum_{i=1}^{n} \varphi_{A_i} \mathbf{x}'_i$ este măsurabil relativ la $\mathcal{A}'$ și μ și pentru orice $t \in K$ avem

$$|<\mathbf{x}(t), \mathbf{x}'_K(t)>| > a\,|\mathbf{x}(t)| \quad \text{și} \quad a < |\mathbf{x}'_K(t)| < 2 - a.$$

Pentru $t \notin K$ avem $\mathbf{x}'_K(t) = 0$.

Să presupunem acum că $\mathbf{x}$ este măsurabil. Există o mulțime neglijabilă $A \subset K$ și o partiție (K_n) a lui $K - A$ formată dintr-un șir de mulțimi compacte astfel încît restricția lui $\mathbf{x}$ la fiecare K_n să fie continuă.

Pentru fiecare n există un cîmp de funcționale $\mathbf{x}'_n \in \mathcal{C}(\mathcal{C}')$ măsurabil relativ la $\mathcal{A}'$ și μ, astfel încît pentru $t \in K_n$ să avem

$$a\,|\mathbf{x}(t)| < |<\mathbf{x}(t), \mathbf{x}'_n(t)>| \quad \text{și} \quad a < |\mathbf{x}'_n(t)| < 2 - a.$$

Atunci cîmpul de funcționale $\mathbf{x}'_K = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{x}'_n$ este măsurabil și pentru $t \in K - A$ avem

$$a\,|\mathbf{x}(t)| < |<\mathbf{x}(t), \mathbf{x}'_K(t)>| \quad \text{și} \quad a < |\mathbf{x}'_K(t)| < 2 - a.$$

Fie acum $\mathcal{K}$ o familie de mulțimi compacte nevide disjuncte două cîte două (prop. 9, § 11) a căror reuniune diferă de T printr-o mulțime neglijabilă.

Cîmpul $\mathbf{x}'(t) = \sum_{K \in \mathcal{K}} \mathbf{x}'_K(t)$ este măsurabil relativ la $\mathcal{A}'$ și μ și îndeplinește condițiile cerute.

Se demonstrează în același mod propoziția următoare :

Propoziția 7. *Fie* $\mathbf{x}' \in \mathcal{C}(\mathcal{E}')$ *un cîmp de funcționale măsurabil relativ la* $\mathcal{A}'$ *și* μ *și* $0 < a < 1$. *Există un cîmp de vectori* $\mathbf{x} \in \mathcal{C}(\mathcal{E})$, *măsurabil relativ la* $\mathcal{A}$ *și* μ *astfel încît să avem*

$$a\,|\,\mathbf{x}'(t)\,| < |\,\mathbf{x}(t),\ \mathbf{x}'(t)\,\rangle| \quad \text{și} \quad a < |\,\mathbf{x}(t)\,| < 2 - a,$$

μ-*aproape peste tot.*

6. Spațiul $\mathcal{L}^\infty_{\mathcal{A}}$

Fie μ o măsură pozitivă pe T.

Pentru fiecare cîmp $\mathbf{x} \in \mathcal{C}(\mathcal{E})$ vom nota cu $N_\infty(\mathbf{x}, \mu)$ sau $N_\infty(\mathbf{x})$, numărul pozitiv, finit sau $+\infty$, definit de egalitatea

$$N_\infty(\mathbf{x}) = N_\infty(|\,\mathbf{x}\,|).$$

Vom nota cu $\mathcal{F}^\infty_{\mathcal{E}}(\mu)$ sau $\mathcal{F}^\infty_{\mathcal{E}}$, mulțimea cîmpurilor de vectori $\mathbf{x} \in \mathcal{C}(\mathcal{E})$ cu $N_\infty(\mathbf{x}) < +\infty$. Mulțimea $\mathcal{F}^\infty_{\mathcal{E}}$ este un spațiu vectorial și un modul pe algebra $\mathcal{F}^\infty$ de funcții scalare. Acest spațiu este complet pentru topologia convergenței uniforme aproape peste tot, definită de seminorma N_∞.

Orice cîmp $\mathbf{x} \in \mathcal{C}(\mathcal{E})$ mărginit, aparține spațiului $\mathcal{F}^\infty_{\mathcal{E}}$. În particular $\mathcal{K}_{\mathcal{A}}(T) \subset \mathcal{F}^\infty_{\mathcal{E}}$.

Vom nota cu $\mathcal{L}^\infty_{\mathcal{A}}$ mulțimea cîmpurilor de vectori măsurabile din $\mathcal{F}^\infty_{\mathcal{E}}$. Mulțimea $\mathcal{L}^\infty_{\mathcal{A}}$ este un spațiu vectorial, complet pentru topologia definită de seminorma N_∞. Aderența originii în această topologie este subspațiul cîmpurilor neglijabile.

Evident, avem $\mathcal{K}_{\mathcal{A}}(T) \subset \mathcal{L}^\infty_{\mathcal{A}}$ și de asemenea $\mathcal{E}_{\mathcal{A}}(\mathcal{B}) \subset \mathcal{L}^\infty_{\mathcal{A}}$. Dacă $E(t) = E$ pentru orice $t \in T$, avem $\mathcal{F}^\infty_{\mathcal{E}} = \mathcal{F}^\infty_E$ și $\mathcal{L}^\infty_{\mathcal{A}} = \mathcal{L}^\infty_E$.

7. Măsuri definite pe cîmpuri de vectori

Fie F un spațiu Banach.

Definiția 7. *Se numește* $(\mathcal{A}, F)$ *măsură vectorială pe* T, *orice aplicație liniară* $\mathbf{m} : \mathcal{K}_{\mathcal{A}}(T) \to F$ *care are proprietatea că pentru orice mulțime compactă* $K \subset T$, *restricția lui* $\mathbf{m}$ *la subspațiul* $\mathcal{K}_{\mathcal{A}}(T, K)$ *este continuă pentru topologia convergenței uniforme.*

A spune că aplicația liniară $\mathbf{m} : \mathcal{K}_{\mathcal{A}}(T) \to F$ este o măsură, înseamnă deci că pentru fiecare mulțime compactă $K \subset T$, există un număr $a_K > 0$ astfel încît să avem

$$|\mathbf{m}(\mathbf{x})| \leqslant a_K \|\mathbf{x}\| \qquad \text{pentru orice } \mathbf{x} \in \mathcal{K}_{\mathcal{A}}(T, K).$$

Valoarea $\mathbf{m}(\mathbf{x})$ a lui $\mathbf{m}$ în $\mathbf{x}$ se numește integrala lui $\mathbf{x}$ în raport cu $\mathbf{m}$ și se mai notează $\int \mathbf{x}\, d\mathbf{m}$ sau $\int \mathbf{x}(t)\, d\mathbf{m}(t)$.

Dacă $E(t) = E$ pentru fiecare $t \in T$, se regăsește definiția măsurii obișnuite $\mathbf{m} : \mathcal{K}_E(T) \to F$ (definiția 2, § 1).

Notăm $\|\mathbf{m}\| = \sup |\mathbf{m}(\mathbf{x})|$ pentru $\|\mathbf{x}\| \leqslant 1$ din $\mathcal{K}_{\mathcal{A}}(T)$. Dacă $\mathbf{m} : \mathcal{K}_{\mathcal{A}}(T) \to F$ este o măsură, atunci pentru fiecare $z' \in F'$ aplicația $z' \circ \mathbf{m} : \mathcal{K}_{\mathcal{A}}(T) \to C$ definită prin egalitatea

$$(z' \circ \mathbf{m})(\mathbf{x}) = < \mathbf{m}(\mathbf{x}), z' >, \quad \mathbf{x} \in \mathcal{K}_{\mathcal{A}}(T)$$

este o măsură.

Definiția 8. *Spunem că o măsură* $\mathbf{m} : \mathcal{K}_{\mathcal{A}}(T) \to F$ *este majorată dacă există o măsură pozitivă* ν *pe* T *astfel încît să avem*

$$|\mathbf{m}(\mathbf{x})| \leqslant \nu(|\mathbf{x}|) \qquad \textit{pentru orice } \mathbf{x} \in \mathcal{K}_{\mathcal{A}}(T).$$

Se demonstrează ca și în cazul măsurilor obișnuite, că dacă $\mathbf{m} : \mathcal{K}_{\mathcal{A}}(T) \to F$ este o *aplicație liniară majorată*, atunci $\mathbf{m}$ este o măsură majorată (propoziția 6, § 3).

Vom arăta că pentru orice măsură majorată există o cea mai mică măsură pozitivă care o majorează. Pentru aceasta vom demonstra mai întîi următoarea

Lemă. *Fie* $\mathbf{x} \in \mathcal{K}_{\mathcal{A}}(T)$ *și* $g \in \mathcal{K}_+(T)$ *cu* $0 \leqslant g \leqslant |\mathbf{x}|$ *și să definim cîmpul de vectori*

$$\sigma_{\mathbf{x}}(t) = \begin{cases} \dfrac{\mathbf{x}(t)}{|\mathbf{x}(t)|} & \textit{dacă } \mathbf{x}(t) \neq 0, \\ 0 & \textit{dacă } \mathbf{x}(t) = 0. \end{cases}$$

Atunci $\sigma_{\mathbf{x}} |\mathbf{x}| = \mathbf{x}$ *și* $g\sigma_{\mathbf{x}} \in \mathcal{K}_{\mathcal{A}}(T)$.

Egalitatea $\sigma_{\mathbf{x}} |\mathbf{x}| = \mathbf{x}$ este evidentă. Să arătăm că $g\sigma_{\mathbf{x}} \in \mathcal{K}_{\mathcal{A}}(T)$. Fie $t_0 \in T$. Dacă $\mathbf{x}(t_0) \neq 0$, există o vecinătate V a lui t_0 astfel încît să avem $\mathbf{x}(t) \neq 0$ pentru $t \in V$. Funcția h definită pe T astfel

$$h(t) = \begin{cases} \dfrac{1}{|\mathbf{x}(t)|} & \text{pentru } t \in V, \\ 1 & \text{pentru } t \notin V, \end{cases}$$

este continuă în t_0. Atunci $\sigma_{\mathbf{x}}(t) = h(t)\,\mathbf{x}(t)$, deci $\sigma_{\mathbf{x}}(t)$ este continuu în t_0. Urmează că $g\sigma_{\mathbf{x}}$ este de asemenea continuu în t_0.

Dacă $\mathbf{x}(t_0) = 0$, atunci $g(t_0) = 0$. Fie $\varepsilon > 0$; există un cîmp de vectori $\mathbf{y} \in \mathcal{A}$ și o vecinătate V a lui t_0 astfel încît pentru $t \in V$ să avem

$$|\mathbf{x}(t) - \mathbf{y}(t)| < \frac{\varepsilon}{4}, \quad g(t) < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{și} \quad |\mathbf{x}(t)| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Atunci, pentru $t \in V$ avem $|\mathbf{y}(t)| < \frac{\varepsilon}{2}$ deci

$$|g(t)\,\sigma_{\mathbf{x}}(t) - \mathbf{y}(t)| \leqslant g(t)\ |\sigma_{\mathbf{x}}(t)| + |\mathbf{y}(t)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

deci $g\sigma_{\mathbf{x}}$ este continuu în t_0.

Fie $\mathbf{m} : \mathcal{X}_{\mathcal{A}}(T) \to C$ o măsură cu valori scalare. Pentru orice funcție pozitivă $\varphi \in \mathcal{X}_+(T)$ să punem

$$\mu(\varphi) = \sup_{|\mathbf{x}| \leqslant \varphi} |\mathbf{m}(\mathbf{x})|, \qquad \mathbf{x} \in \mathcal{X}_{\mathcal{A}}(T).$$

Folosind lema precedentă, se demonstrează ca și pentru măsuri obișnuite, că μ este *aditivă* și *pozitivă* pe $\mathcal{X}_+(T)$ (prop. 11, § 2), deci se poate prelungi la $\mathcal{X}(T)$ ca o măsură pozitivă notată tot μ. Această măsură pozitivă verifică inegalitatea

$$|\mathbf{m}(\mathbf{x})| \leqslant \mu(|\mathbf{x}|) \qquad \text{pentru } \mathbf{x} \in \mathcal{X}_{\mathcal{A}}(T)$$

și este cea mai mică măsură pozitivă care verifică această inegalitate (prop. 12, § 2). Măsura μ astfel definită se notează $|\mathbf{m}|$ și se numește modulul lui $\mathbf{m}$.

Prin aceasta s-a arătat că orice măsură cu valori scalare $\mathbf{m} : \mathcal{X}_{\mathcal{A}}(T) \to C$ este majorată.

Dacă $\mathbf{m} : \mathcal{X}_{\mathcal{A}}(T) \to F$ este o măsură majorată, atunci există o cea mai mică măsură pozitivă care o majorează, notată $|\mathbf{m}|$ și numită, de asemenea, modulul lui $\mathbf{m}$.

Demonstrația se face ca și pentru măsuri obișnuite (prop. 8, § 3).

Spunem că o măsură majorată $\mathbf{m}$ este *mărginită* dacă modulul său $|\mathbf{m}|$ este o măsură mărginită.

8. Integrarea cîmpurilor de vectori

Fie $\mathbf{m} : \mathcal{X}_{\mathcal{A}}(T) \to F$ o măsură majorată.

Spunem că un cîmp $\mathbf{x} \in \mathcal{C}(\mathcal{C})$ este $\mathbf{m}$-integrabil dacă $\mathbf{x}$ este $|\mathbf{m}|$-integrabil.

Mulțimea cîmpurilor $\mathbf{m}$-integrabile $\mathbf{x} \in \mathcal{C}(\mathcal{C})$ va fi notată $\mathcal{L}^1_{\mathcal{A}}(\mathbf{m})$. Avem deci $\mathcal{L}^1_{\mathcal{A}}(\mathbf{m}) = \mathcal{L}^1_{\mathcal{A}}(|\mathbf{m}|)$.

Pe spațiul $\mathcal{L}^1_{\mathcal{A}}(\mathbf{m})$ se consideră topologia convergenței în medie, definită de seminorma

$$N_1(\mathbf{x}, \mathbf{m}) = N_1(\mathbf{x}, |\mathbf{m}|) = \int |\mathbf{x}(t)|\, \mathrm{d}|\mathbf{m}|(t).$$

Pentru orice cîmp $\mathbf{x}$ din $\mathcal{X}_{\mathcal{A}}(T)$ avem

$$\left|\int \mathbf{x}\, \mathrm{d}\mathbf{m}\right| \leqslant \int |\mathbf{x}|\, \mathrm{d}|\mathbf{m}| = N_1(\mathbf{x}).$$

Această inegalitate arată că aplicația $\mathbf{x} \to \int \mathbf{x}\, \mathrm{d}\mathbf{m}$ a lui $\mathcal{X}_{\mathcal{A}}(T)$ în F este continuă pentru topologia convergenței în medie și deci poate fi prelungită în mod unic la o aplicație liniară și continuă $\mathbf{x} \to \int \mathbf{x}\, \mathrm{d}\mathbf{m}$ a lui $\mathcal{L}^1_{\mathcal{A}}(\mathbf{m})$ în F.

Pentru fiecare cîmp $\mathbf{x} \in \mathcal{L}^1_{\mathcal{A}}(\mathbf{m})$, $\int \mathbf{x}\, \mathrm{d}\mathbf{m}$ se numește integrala lui $\mathbf{x}$ în raport cu $\mathbf{m}$ și se mai notează $\mathbf{m}(\mathbf{x})$. Ea verifică, încă, inegalitatea

$$\left|\int \mathbf{x}\, \mathrm{d}\mathbf{m}\right| \leqslant \int |\mathbf{x}|\, \mathrm{d}|\mathbf{m}| \qquad \text{pentru } \mathbf{x} \in \mathcal{L}^1_{\mathcal{A}}(\mathbf{m}).$$

Urmează că dacă un șir $(\mathbf{x}_n)$ converge în medie către $\mathbf{x}$ atunci

$$\lim_{n\to\infty} \int \mathbf{x}_n\, \mathrm{d}\mathbf{m} = \int \mathbf{x}\, \mathrm{d}\mathbf{m}.$$

Într-adevăr,

$$\left|\int \mathbf{x}_n\, \mathrm{d}\mathbf{m} - \int \mathbf{x}\, \mathrm{d}\mathbf{m}\right| = \left|\int (\mathbf{x}_n - \mathbf{x})\, \mathrm{d}\mathbf{m}\right| \leqslant \int |\mathbf{x}_n - \mathbf{x}|\, \mathrm{d}|\mathbf{m}| = \mathbf{N}_1(\mathbf{x}_n - \mathbf{x}).$$

Teorema 1. *Fie $(\mathbf{x}_n)$ un șir de cîmpuri $\mathbf{m}$-integrabile din $\mathcal{L}^1_{\mathcal{A}}(\mathbf{m})$. Dacă șirul $(\mathbf{x}_n)$ converge $\mathbf{m}$-aproape peste tot către un cîmp $\mathbf{x}_0 \in \mathcal{C}(\mathcal{E})$ și dacă există o funcție $\varphi \geqslant 0$ definită pe T astfel încît $\int^* \varphi\, \mathrm{d}|\mathbf{m}| < +\infty$ și $|\mathbf{x}_n(t)| \leqslant \varphi(t)$, $\mathbf{m}$-aproape peste tot, pentru fiecare $n \in N$ atunci cîmpul $\mathbf{x}_0$ este $\mathbf{m}$-integrabil și*

$$\lim_{n\to\infty} \int \mathbf{x}_n\, \mathrm{d}\mathbf{m} = \int \mathbf{x}\, \mathrm{d}\mathbf{m}.$$

Într-adevăr, din teorema lui Lebesgue rezultă că șirul $(\mathbf{x}_n)$ converge în medie către $\mathbf{x}_0$.

Corolar. *Fie* $(\mathbf{x}_n)$ *un șir de cîmpuri* $\mathbf{m}$*-integrabile, din* $\mathcal{L}^1_{\mathcal{A}}(\mathbf{m})$. *Dacă seria* $\sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{x}_n(t)$ *converge* $\mathbf{m}$*-aproape peste tot către un cîmp* $\mathbf{x}_0 \in \mathcal{C}(\mathcal{L})$ *și dacă există o funcție* $\varphi \geqslant 0$ *definită pe* T *cu* $\int^* \varphi \, d|\mathbf{m}| < +\infty$ *și* $|\sum_{k \leqslant n} \mathbf{x}_k(t)| \leqslant \varphi(t)$, μ*-aproape peste tot, pentru fiecare* $n \in N$, *atunci cîmpul* $\mathbf{x}_0$ *este* $\mathbf{m}$*-integrabil și*

$$\int \mathbf{x}_0 \, d\mathbf{m} = \sum_{n=1}^{\infty} \int \mathbf{x}_n \, d\mathbf{m}.$$

9. Cîmpuri de operații slab măsurabile și slab local integrabile

Pentru fiecare $t \in T$ să notăm $G(t) = \mathcal{L}(E(t), F)$, cu $\mathcal{G}$ familia $(G(t))_{t \in T}$ și cu $\mathcal{C}(\mathcal{G}_F)$ mulțimea cîmpurilor de operații U definite pe T astfel încît $U(t) \in G(t) = \mathcal{L}(E(t), F)$ pentru fiecare $t \in T$. Fie $Z \subset F'$ un subspațiu normant pentru F:

$$|y| = \sup_{z \in Z} \frac{|< y, z >|}{|z|}, \qquad \text{pentru orice } y \in F.$$

Dacă $F = C$, atunci $G(t) = E'(t)$ pentru fiecare $t \in T$. În acest caz am notat $\mathcal{E}' = (E'(t))_{t \in T}$ și cu $\mathcal{C}(\mathcal{E}')$ familia de funcționale $\mathbf{x}'$ definită pe T astfel încît $\mathbf{x}'(t) \in E'(t)$ pentru fiecare $t \in T$.

Fie μ o măsură pozitivă pe T.

Definiția 9. *Spunem că un cîmp de operații* $U \in \mathcal{C}(\mathcal{G}_F)$ *este* Z*-slab* μ*-măsurabil, dacă pentru orice cîmp* $\mathbf{x} \in \mathcal{A}$ *și orice* $z \in Z$ *funcția* $t \to < U(t)\,\mathbf{x}(t), z >$ *este* μ*-măsurabilă.*

Spunem că U *este simplu* μ*-măsurabil, dacă pentru orice* $\mathbf{x} \in \mathcal{A}$, *funcția* $t \to U(t)\,\mathbf{x}(t)$ *cu valori în* F *este* μ*-măsurabilă.*

Propoziția 8. *Un cîmp de operații* $U \in \mathcal{C}(\mathcal{G}_F)$ *este* Z*-slab* μ*-măsurabil (respectiv simplu* μ*-măsurabil), dacă și numai dacă pentru orice cîmp* $\mathbf{x} \in \mathcal{C}(\mathcal{L})$, *măsurabil în raport cu* $\mathcal{A}$ *și* μ *și orice* $z \in Z$, *funcția* $t \to < U(t)\,\mathbf{x}(t), z >$ *este* μ*-măsurabilă (respectiv funcția* $t \to U(t)\,\mathbf{x}(t)$ *este* μ*-măsurabilă).*

Să presupunem că U este Z-slab μ-măsurabil. Dacă $\mathbf{x}$ este un cîmp de vectori continuu în raport cu $\mathcal{A}$, atunci $\mathbf{x}$ este limită uniformă pe fiecare mulțime compactă $K \subset T$, de cîmpuri de forma $\sum_{i=1}^{n} \varphi_i \mathbf{x}_i$ cu $\mathbf{x}_i \in \mathcal{A}$ și φ_i complexe continue pe T. Urmează că pentru fiecare $z \in Z$, funcția $t \to < U(t)\,\mathbf{x}(t), z >$ este limita uniformă pe fiecare mulțime compactă de funcții μ-măsurabile de forma $\sum_{i=1}^{n} \varphi_i(t) < U(t)\,\mathbf{x}_i(t), z >$ cu $\varphi_i \in \mathcal{K}_C(T)$, $\mathbf{x}_i \in \mathcal{A}$ și $z \in Z$, deci funcția $t \to < U(t)\,\mathbf{x}(t), z >$ este de asemenea măsurabilă.

Fie acum un cîmp oarecare $\mathbf{x} \in \mathcal{C}(\mathcal{E})$, măsurabil în raport cu $\mathcal{A}$ și μ. Fie $z \in Z$ și $K \subset T$ compact. Există o mulțime compactă $K' \subset K$ astfel încît $\mu(K - K') < \frac{\varepsilon}{2}$ și restricția lui $\mathbf{x}$ la K' să fie continuă. Restricția lui $\mathbf{x}$ la K' poate fi extinsă la un cîmp de vectori $\mathbf{y}$ continuu pe întreg spațiul T. Urmează că funcția

$$< U(t)\,\mathbf{x}(t),\ z > \varphi_{K'}(t) = < U(t)\,\mathbf{y}(t),\ z > \varphi_{K'}(t)$$

este μ-măsurabilă. Există atunci o mulțime compactă $K_1 \subset K'$ astfel ca $\mu(K' - K_1) < \frac{\varepsilon}{2}$ deci $\mu(K - K_1) < \varepsilon$, iar restricția funcției $< U(t)\,\mathbf{x}(t),\ z >$ la K_1 să fie continuă. Urmează că această funcție este μ-măsurabilă.

Implicația reciprocă este evidentă, și astfel afirmația relativă la măsurabilitatea slabă este demonstrată.

Afirmația relativă la măsurabilitatea simplă se demonstrează în același mod.

Observații. 1° Orice cîmp de operații simplu măsurabil este slab măsurabil. Reciproc, dacă F este de tip numărabil, orice cîmp de operații slab măsurabil, este simplu măsurabil.

2° Dacă U este un cîmp de operații simplu măsurabil, atunci pentru orice cîmp de vectori $\mathbf{x}$, măsurabil în raport cu $\mathcal{A}$ și μ, funcția $t \to |U(t)\,\mathbf{x}(t)|$ este măsurabilă.

În anumite condiții, această funcție este măsurabilă chiar dacă U este slab măsurabil.

Fie U un cîmp de operații *Z-slab măsurabil* și $\mathbf{x}$ un cîmp de vectori *măsurabil* în raport cu $\mathcal{A}$ și μ.

1) *Dacă există o mulțime numărabilă $S \subset Z$ normantă pentru F, atunci funcția $t \to |U(t)\,\mathbf{x}(t)|$ este măsurabilă.*

Demonstrația este aceeași ca pentru funcțiile obișnuite (prop. 19, § 15)

În particular :

2) *Dacă F este dualul unui spațiu Banach S de tip numărabil, atunci funcția $t \to |U(t)\,\mathbf{x}(t)|$ este măsurabilă.*

3) *Dacă funcția $t \to |U(t)\,\mathbf{x}(t)|$ este măsurabilă pentru orice cîmp de vectori $\mathbf{x} \in \mathcal{A}$ și dacă familia $\mathcal{A}$ verifică axioma de numărabilitate (G) a lui Godement, atunci funcția $t \to |U(t)|$ este măsurabilă.*

Într-adevăr, fie $(\mathbf{x}_n)$ un șir din $\mathcal{A}$, astfel încît pentru fiecare $t \in T$, șirul $(\mathbf{x}_n(t))$ să fie dens în $E(t)$.

Avem

$$|U(t)| = \sup_n \frac{|U(t)\,\mathbf{x}_n(t)|}{|\mathbf{x}_n(t)|},$$

unde am convenit să punem $\frac{|U(t)\,\mathbf{x}_n(t)|}{|\mathbf{x}_n(t)|} = 0$ dacă $\mathbf{x}_n(t) = 0$.

Cum fiecare funcție $\frac{|U(t)\,\mathbf{x}_n(t)|}{|\mathbf{x}_n(t)|}$ este μ-măsurabilă, rezultă că funcția $t \to |U(t)|$ este măsurabilă.

În particular :

Dacă familia $\mathcal{A}$ verifică axioma (G) iar F este de tip numărabil sau dualul unui spațiu Banach de tip numărabil, pentru orice cîmp de operații U slab măsurabil, funcția $t \to |U(t)|$ este măsurabilă.

4) *Să presupunem că există o familie fundamentală $\mathcal{D} \subset \mathcal{C}(\mathcal{G}_F)$ de cîmpuri de operații continue care verifică axioma următoare :*

(T) Funcția $t \to V(t)\,\mathbf{x}(t)$ este μ-măsurabilă oricare ar fi $V \in \mathcal{D}$ și $\mathbf{x} \in \mathcal{A}$.

Dacă $\mathcal{A}$ și $\mathcal{D}$ verifică axioma (G) și dacă U este slab μ-măsurabil, atunci U este măsurabil relativ la $\mathcal{D}$ și μ.

Într-adevăr, fie (V_n) un șir de elemente din $\mathcal{D}$ astfel încît pentru fiecare $t \in T$, șirul $(V_n(t))$ să fie dens în spațiul $G(t) = \mathcal{L}(E(t), F)$. Deducem că $G(t)$ este de tip numărabil, deci E este de tip numărabil. Atunci pentru orice cîmp $\mathbf{x} \in \mathcal{A}$ funcția $t \to U(t)\,\mathbf{x}(t)$ este μ-măsurabilă. Urmează că funcția $t \to |V_n(t) - U(t)|$ este μ-măsurabilă.

Fie $\varepsilon > 0$ și $K \subset T$ o mulțime compactă. Pentru fiecare n, mulțimea

$$B_n = \{t \mid |V_n(t) - U(t)| \leqslant \varepsilon\} \cap K$$

este μ-măsurabilă și $\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n = K$. Să alegem un șir (A_n) de mulțimi μ-măsurabile disjuncte, cu $A_n \subset B_n$ pentru fiecare n și $\bigcup_n A_n = K$. Să punem

$$U_\varepsilon = \sum_n \varphi_{A_n} V_n .$$

Cîmpul de operații U_ε este măsurabil relativ la μ și $\mathcal{D}$ și pentru orice $t \in K$ avem $|U_\varepsilon(t) - U(t)| \leqslant \varepsilon$.

Urmează că U este limita uniformă, pe fiecare compact, de cîmpuri de operații măsurabile, relativ la $\mathcal{D}$ și μ, deci U este măsurabil relativ la $\mathcal{D}$ și μ.

Definiția 10. *Spunem că un cîmp de operații $U \in \mathcal{C}(\mathcal{G}_F)$ este Z-slab local μ-integrabil (respectiv simplu local μ-integrabil), dacă U este Z-slab μ-măsurabil (respectiv simplu μ-măsurabil) și dacă funcția $t \to |U(t)|$ este local μ-integrabilă.*

Orice cîmp de operații simplu local integrabil este slab local integrabil.

Propoziția 9. *Dacă U este un cîmp de operații Z-slab local μ-integrabil, atunci pentru orice cîmp $\mathbf{x} \in \mathcal{X}_{\mathcal{A}}(T)$ și orice $z \in Z$, funcția $< U\mathbf{x}, z >$ este μ-integrabilă.*

În adevăr, funcția $< U\mathbf{x}, z >$ este μ-măsurabilă și

$$\int^* | < U(t)\,\mathbf{x}(t), z > |\, \mathrm{d}\mu(t) \leqslant |z| \int^* |U(t)|\, |\mathbf{x}(t)|\, \mathrm{d}\mu(t) < \infty$$

deoarece funcția $|U|$ este local μ-integrabilă și $|\mathbf{x}| \in \mathcal{X}(T)$.

Propoziția 10. *Fie U și V două cîmpuri astfel încît pentru orice $\mathbf{x} \in \mathcal{K}_{\mathcal{A}}(T)$ și $z \in Z$, funcțiile $< U\mathbf{x}, z >$ și $< V\mathbf{x}, z >$ să fie μ-integrabile și să avem*

$$\int < U\mathbf{x}, z > \mathrm{d}\mu = \int < V\mathbf{x}, z > \mathrm{d}\mu.$$

Atunci, pentru orice cîmp continuu $\mathbf{x}$ și orice $z \in Z$, avem

$$< U(t)\mathbf{x}(t), z > | = < V(t)\mathbf{x}(t), z >, \quad \mu\text{-aproape peste tot.}$$

În fiecare din cazurile următoare avem

$$U(t) = V(t), \qquad \mu\text{-aproape peste tot.}$$

1) *Există o ridicare ρ a lui $\mathcal{L}^\infty(\mu)$ și o mulțime numărabilă $\mathcal{B} \subset \mathcal{A}$ astfel încît mulțimea $\{\mathbf{x}(t);\ \mathbf{x} \in \mathcal{B}\}$ să fie densă în $E(t)$ pentru orice $t \in T$, și astfel încît să avem*

$$\rho[U\mathbf{x}] = U\mathbf{x} \quad \text{și} \quad \rho[V\mathbf{x}] = V\mathbf{x}, \qquad \text{pentru orice } \mathbf{x} \in \mathcal{B}.$$

2) *$\mathcal{A}$ verifică axioma (G) și există o mulțime numărabilă $S \subset Z$ cu proprietatea că dacă $y \in F$ și $< y, s > = 0$ pentru orice $s \in S$, atunci $y = 0$.*

3) *$\mathcal{A}$ verifică axioma (G) iar $U\mathbf{x}$ și $V\mathbf{x}$ sînt μ-integrabile, pentru orice $\mathbf{x} \in \mathcal{K}_{\mathcal{A}}(T)$.*

Fie $\mathbf{x}$ un cîmp continuu și $z \in Z$. Pentru orice funcție $\varphi \in \mathcal{K}(T)$ avem $\mathbf{x}\varphi \in \mathcal{K}_{\mathcal{A}}(T)$ deci

$$\int < U\mathbf{x}, z > \varphi \, \mathrm{d}\mu = \int < V\mathbf{x}, z > \varphi \, \mathrm{d}\mu,$$

de unde

$$< U(t)\mathbf{x}(t), z > = < V(t)\mathbf{x}(t), z >, \quad \mu\text{-aproape peste tot.}$$

Să observăm că în toate cele trei cazuri, $\mathcal{A}$ verifică axioma (G). Fie $\mathcal{B} \subset \mathcal{A}$ o mulțime numărabilă astfel încît mulțimea $\{\mathbf{x}(t);\ \mathbf{x} \in \mathcal{B}\}$ să fie densă în $E(t)$ pentru orice $t \in T$.

Să notăm $W = U - V$. Pentru fiecare cîmp continuu $\mathbf{x}$ și fiecare $z \in Z$ avem

$$< W(t)\mathbf{x}(t), z > = 0, \qquad \mu\text{-aproape peste tot.}$$

Vom arăta că în toate cele trei cazuri avem $W(t)\mathbf{x}(t) = 0$, μ-aproape peste tot, pentru fiecare $\mathbf{x} \in \mathcal{B}$.

În adevăr, în cazul 1 deducem $\rho[W\mathbf{x}] = W\mathbf{x}$ pentru fiecare $\mathbf{x} \in \mathcal{B}$, deci $W(t)\mathbf{x}(t) = 0$, μ-aproape peste tot.

În cazul 2 deducem că pentru fiecare $\mathbf{x} \in \mathcal{B}$, și chiar pentru fiecare cîmp continuu $\mathbf{x}$ și pentru orice $s \in S$ există o mulțime μ-neglijabilă $N(\mathbf{x}, s)$ astfel încît pentru $t \notin N(\mathbf{x}, s)$ să avem $< U(t)\mathbf{x}(t), s > = 0$. Mulțimea $N(\mathbf{x}) = \bigcup_{s \in S} N(\mathbf{x}, s)$ este μ-neglijabilă și pentru $t \notin N(\mathbf{x})$ avem $U(t)\mathbf{x}(t) = 0$.

Dacă Ux și Vx sînt μ-integrabile pentru orice $x \in \mathcal{K}_{\mathcal{A}}(T)$, atunci Wx este μ-integrabilă pentru orice $x \in \mathcal{K}_{\mathcal{A}}(T)$ și avem

$$< \int Wx \, d\mu, z > = \int < Wx, z > d\mu = 0,$$

pentru orice $x \in \mathcal{K}_{\mathcal{A}}(T)$ și orice $z \in Z$, deci

$$\int Wx \, d\mu = 0, \text{ pentru orce } x \in \mathcal{K}_{\mathcal{A}}(T).$$

Dacă x este un cîmp continuu, atunci pentru orice $\varphi \in \mathcal{K}(T)$ avem $x\varphi \in \mathcal{K}_{\mathcal{A}}(T)$ deci

$$\int Wx \, \varphi \, d\mu = 0,$$

de unde $W(t)\,x(t) = 0$, μ-aproape peste tot. În particular, această relație are loc pentru $x \in \mathcal{B}$.

Pentru fiecare $x \in \mathcal{B}$ fie $A(x)$ o mulțime μ-neglijabilă astfel încît să avem

$$W(t)\,x(t) = 0, \text{ pentru } t \notin A(x).$$

Reuniunea $A = \bigcup A(x)$ cînd x parcurge mulțimea numărabilă $\mathcal{B}$, este μ-neglijabilă și avem

$$W(t)\,x(t) = 0, \text{ pentru orice } t \notin A \text{ și orice } x \in \mathcal{B}.$$

Pentru $t \notin A$ avem deci

$$|W(t)| = \sup_{x \in \mathcal{B}} \frac{|W(t)\,x(t)|}{|x(t)|} = 0,$$

unde am convenit să punem $\dfrac{W(t)\,x(t)}{|x(t)|} = 0$ dacă $x(t) = 0$.

Urmează că $W(t) = 0$ μ-aproape peste tot, adică

$$U(t) = V(t), \text{ } \mu\text{-aproape peste tot.}$$

10. Măsuri definite prin densități

Teorema 2. *Fie $Z \subset F'$ un subspațiu normant pentru F, μ o măsură scalară pe T și $U \in \mathcal{C}(\mathcal{G}_F)$ un cîmp de operatori Z-slab local μ-integrabil. Există atunci o măsură majorată $\mathbf{m} : \mathcal{K}_{\mathcal{A}}(T) \to Z'$ astfel încît să avem*

$$< \mathbf{m}(x), z > = \int < U(t)\,x(t), z > d\mu, \text{ } \textit{pentru } x \in \mathcal{K}_{\mathcal{A}}(T) \text{ } \textit{și } z \in Z$$

și

$$|\mathbf{m}| \leqslant |U|\,|\mu|.$$

Măsura $\mathbf{m}$ *are valori în* F *în fiecare din cazurile următoare :*
1) $F = Z'$;
2) U *este simplu* μ*-măsurabilă ; în particular* F *este de tip numărabil ;*
3) *pentru orice* $\mathbf{x} \in \mathcal{A}$ *există o familie local numărabilă* $(K_j)_{j \in J}$ *de părți compacte disjuncte cu* $T - \bigcup K_j$ μ*-neglijabilă, astfel încît acoperirea convexă și cercuită a mulțimii* $\{U(t)\,\mathbf{x}(t)\,;\ t \in K_j\}$ *să fie relativ compactă în* F *pentru topologia* $\sigma(F, Z)$.

Pentru orice $\mathbf{x} \in \mathcal{K}_{\mathcal{A}}(T)$ și $z \in Z$, funcția $< U\mathbf{x}, z >$ este μ-integrabilă (prop. 9). Să punem

$$M(\mathbf{x}, z) = \int < U(t)\,\mathbf{x}(t), z > \mathrm{d}\mu.$$

Avem

$$|M(\mathbf{x}, z)| \leqslant |z| \int |U|\,|\mathbf{x}|\,\mathrm{d}|\mu| < \infty.$$

Aplicația $\mathbf{m}(\mathbf{x}) : z \to M(\mathbf{x}, z)$ este o funcțională liniară continuă pe Z și avem

$$|\mathbf{m}(x)| \leqslant \int |U|\,|x|\,\mathrm{d}|\mu|,$$

deci $\mathbf{m}(\mathbf{x}) \in Z'$ pentru fiecare $\mathbf{x} \in \mathcal{K}_{\mathcal{A}}(T)$. Aplicația $\mathbf{m} : \mathbf{x} \to \mathbf{m}(\mathbf{x})$ a lui $\mathcal{K}_{\mathcal{A}}(T)$ în Z' este liniară și majorată de măsura pozitivă $|U|\,|\mu|$, deci $\mathbf{m}$ este o măsură majorată și avem $|\mathbf{m}| \leqslant |U|\,|\mu|$.

Pentru $\mathbf{x} \in \mathcal{K}_{\mathcal{A}}(T)$ și orice $z \in Z$ avem

$$< \mathbf{m}(\mathbf{x}), z > = M(\mathbf{x}, z) = \int < U\mathbf{x}, z > \mathrm{d}\mu.$$

Fie $\mathbf{x} \in \mathcal{K}_{\mathcal{A}}(T)$, $z \in Z$ și K o mulțime compactă și să arătăm că avem

$$< \int_K \mathbf{x}\,\mathrm{d}\mathbf{m}, z > = \int_K < U\mathbf{x}, z > \mathrm{d}\mu.$$

Deoarece $\mathbf{x}\,\varphi_K$ este un cîmp integrabil în raport cu orice măsură, există un șir $(\mathbf{x}_n)$ de cîmpuri din $\mathcal{K}_{\mathcal{A}}(T)$, astfel încît

$$\lim_{n \to \infty} \int |\mathbf{x}_n - \mathbf{x}\,\varphi_K|\,\mathrm{d}(|U|\,|\mu|) = 0.$$

Deoarece $|\mathbf{m}| \leqslant |U|\,|\mu|$, deducem că

$$\lim_{n \to \infty} \int |\mathbf{x}_n - \mathbf{x}\,\varphi_K|\,\mathrm{d}|\mathbf{m}| = 0,$$

deci

$$\lim_{n\to\infty} \int \mathbf{x}_n \, \mathbf{dm} = \int \mathbf{x}\, \varphi_K \, \mathbf{dm}$$

și deci

$$\lim_{n\to\infty} < \int \mathbf{x}_n \, \mathbf{dm}, z > = < \int \mathbf{x}\, \varphi_K \, \mathbf{dm}, z >.$$

Deoarece funcțiile $< U\mathbf{x}_n, z >$ și $< U\mathbf{x}_n \varphi_K, z >$ sînt μ-integrabile, avem

$$\left| \int < U\mathbf{x}_n, z > \mathrm{d}\mu - \int < U\mathbf{x}_n \varphi_K, z > \mathrm{d}\mu \right| \leqslant |z| \int |U| \, |\mathbf{x}_n - \mathbf{x}| \, \varphi_K \, \mathrm{d}\,|\mu| =$$

$$= |z| \int |\mathbf{x}_n - \mathbf{x}\varphi_K| \, \mathrm{d}\ (|U|\,|\mu|).$$

deci

$$\lim_{n\to 8} \int < U\mathbf{x}_n, z > \mathrm{d}\mu = \int < U\mathbf{x}\varphi_K, z > \mathrm{d}\mu.$$

Cum pentru fiecare n avem

$$< \int \mathbf{x}_n \, \mathbf{dm}, z > = \int < U\mathbf{x}_n, z > \mathrm{d}\mu,$$

prin trecere la limită obținem

$$< \int \mathbf{x}\varphi_K \mathbf{dm}, z > = \int < U\mathbf{x}\varphi_K, z > \mathrm{d}\mu.$$

Să considerăm acum cazul cînd $\mathbf{m}$ are valori în F. Cazul $F = Z'$ este evident. Să presupunem că U este simplu μ-măsurabilă. Atunci pentru orice $\mathbf{x} \in \mathcal{K}_{\mathcal{A}}(T)$ funcția $t \to U(t)\,\mathbf{x}(t)$ este μ-măsurabilă, deci μ-integrabilă, și avem

$$< \mathbf{m}(\mathbf{x}), z > = \int < U\mathbf{x}, z > \mathrm{d}\mu = < \int U\mathbf{x}\, \mathrm{d}\mu, z >$$

pentru orice $z \in Z$, deci

$$\mathbf{m}(\mathbf{x}) = \int U\mathbf{x}\, \mathrm{d}\mu \in F.$$

Să presupunem, în sfîrșit, îndeplinită condiția 3. Fie $\mathbf{x} \in \mathcal{A}$ și fie $\mathcal{K} = (K_j)_{j\in J}$ o familie de părți compacte disjuncte astfel încît pentru fiecare $j \in J$ acoperirea echilibrată convexă și închisă A_j a mulțimii $\{U(t)\mathbf{x}(t)\,;\, t \in K_j\}$ să fie compactă pentru topologia $\sigma(F, Z)$. Fie $\varphi \in \mathcal{K}(T)$

cu $\|\varphi\| \leqslant 1$. Atunci $U(t)\,\mathbf{x}(t)\,\varphi(t) \in A_j$ pentru $t \in K_j$. Fie (K_n) șirul de mulțimi din $\mathcal{K}$ ce intersectează suportul lui φ. Pentru fiecare K_n, mulțimea A_n este compactă în Z^* pentru topologia $\sigma(Z^*, Z)$, deci există o familie $(z_i)_{i\in I}$ de elemente din Z astfel încît

$$A_n = \bigcap_{i\in I} \{y \in Z^*;\ \ |< y,\ z_i >| \leqslant 1\}.$$

Atunci

$$|< U(t)\,\mathbf{x}(t)\,\varphi(t),\ z_i >| \leqslant 1, \text{ pentru } t \in K_n \text{ și } i \in I.$$

Urmează că pentru orice n avem

$$\left|< \int_{K_n} \varphi\mathbf{x}\,\mathrm{d}\mathbf{m},\ z_i >\right| \leqslant \int_{K_n} |< U(t)\,\varphi(t)\,\mathbf{x}(t),\ z_i >|\,\mathrm{d}\,|\mu| \leqslant |\mu|(K_n),$$

deci

$$\int_{K_n} \varphi\mathbf{x}\,\mathrm{d}\mathbf{m} \in |\mu|(K_n)\,A_n \subset F.$$

Relația $\mathbf{m}(\varphi\varphi_K\mathbf{x}) \in F$ rămîne adevărată pentru orice $\varphi \in \mathcal{K}(T)$ și orice $\mathbf{x} \in \mathcal{A}$, deci avem $\mathbf{m}(\mathbf{x}) \in F$ pentru orice $\mathbf{x} = \Sigma\,\varphi_i\mathbf{x}_i$ cu $\varphi_i \in \mathcal{K}(T)$ și $\mathbf{x}_i \in \mathcal{A}$ și apoi, prin trecere la limită, pentru orice $\mathbf{x} \in \mathcal{K}_{\mathcal{A}}(T)$.

Cu aceasta teorema este demonstrată.

Observații. 1°. Măsura $\mathbf{m}$ depinde și de spațiul Z ales.

2°. Dacă U este simplu local μ-integrabil, avem

$$\mathbf{m}(\mathbf{x}) = \int U(t)\,\mathbf{x}(t)\,\mathrm{d}\mu, \text{ pentru } \mathbf{x} \in \mathcal{K}_{\mathcal{A}}(T).$$

În acest caz, demonstrația existenței măsurii $\mathbf{m}$ se face imediat.

Definiția 11. *Fie μ o măsură scalară, $U \in \mathcal{C}(\mathcal{G}_F)$ un cîmp de operații Z-slab local μ-integrabil și măsura $\mathbf{m} : \mathcal{K}_{\mathcal{A}}(T) \to Z'$ definită prin egalitatea*

$$< \mathbf{m}(\mathbf{x}),\ z > = \int < U(t)\,\mathbf{x}(t),\ z >\,\mathrm{d}\mu, \text{ pentru } \mathbf{x} \in \mathcal{K}_{\mathcal{A}}(T) \text{ și } z \in Z.$$

Spunem că măsura $\mathbf{m}$ este de densitate U și bază μ sau că $\mathbf{m}$ este produsul dintre μ și U și scriem

$$\mathbf{m} = U\mu.$$

Avem deci

$$< \int \mathbf{x}\,\mathrm{d}(U\mu),\ z > = \int < U\mathbf{x},\ z >\,\mathrm{d}\mu, \text{ pentru } \mathbf{x} \in \mathcal{K}_{\mathcal{A}}(T) \text{ și } z \in Z.$$

Vom arăta că această egalitate rămîne adevărată pentru orice cîmp $\mathbf{x} \in \mathcal{L}^1_{\mathcal{A}}(\mathbf{m})$.

Inegalitatea $|\mathbf{m}| \leqslant |U|\,|\mu|$ se scrie acum

$$|U\mu| \leqslant |U|\,|\mu|.$$

Vom arăta că în anumite cazuri avem chiar egalitatea $|U\mu| = |U|\,|\mu|$.

Vom arăta de asemenea că orice măsură majorată este produsul dintre o măsură pozitivă μ și un cîmp de operații slab local μ-integrabil.

Dacă U este un cîmp simplu local μ-integrabil, atunci avem

$$\int \mathbf{x}\,d(U\mu) = \int U\mathbf{x}\,d\mu, \text{ pentru } \mathbf{x} \in \mathcal{K}_{\mathcal{A}}(T).$$

Dacă $E(t) = E$ pentru orice $t \in T$, produsul $U\mu$ coincide cu cel definit în § 15.

Teorema 3. *Fie $U \in \mathcal{C}(\mathcal{G}_F)$ un cîmp de operații Z-slab local μ-integrabil și $\mathbf{x} \in \mathcal{C}(\mathcal{L})$ un cîmp de vectori.*

1) *Dacă* $\mathbf{x}$ *este $|U|\,|\mu|$-neglijabil, atunci* $\mathbf{x}$ *este $U\mu$-neglijabil iar funcția $U\mathbf{x}$ este μ-neglijabilă.*

2) *Dacă* $\mathbf{x}$ *este $|U|\,|\mu|$-măsurabil, atunci* $\mathbf{x}$ *este $U\mu$-măsurabil iar funcția $< U\mathbf{x}, z >$ este μ-măsurabilă pentru orice $z \in Z$.*

3) *Dacă* $\mathbf{x}$ *este $|U|\,|\mu|$-integrabil, atunci* $\mathbf{x}$ *este $U\mu$-integrabil iar funcția $< U\mathbf{x}, z >$ este μ-integrabilă pentru orice $z \in Z$ și avem*

$$< \int \mathbf{x}\,d(U\mu),\ z > = \int < U\mathbf{x},\ z > d\mu.$$

Demonstrația este aceeași ca a teoremei 2, § 16.

Corolar. *Fie $U \in \mathcal{C}(\mathcal{G}_F)$ un cîmp de operații Z-slab local μ-integrabil astfel încît să avem*

$$|U\mu| = |U|\,|\mu|$$

și fie $\mathbf{x} \in \mathcal{C}(\mathcal{L})$ un cîmp de vectori.

1) *Daxă* $\mathbf{x}$ *este $U\mu$-neglijabil, atunci funcția $U\mathbf{x}$ este μ-neglijabilă;*

2) *Dacă* $\mathbf{x}$ *este $U\mu$-măsurabil, atunci funcția $< U\mathbf{x}, z >$ este μ-măsurabilă pentru orice $z \in Z$;*

3) *Dacă* $\mathbf{x}$ *este $U\mu$-integrabil, atunci funcția $< U\mathbf{x}, z >$ este μ-integrabilă pentru orice $z \in Z$ și avem*

$$< \int \mathbf{x}\,d(U\mu),\ z > = \int < U\mathbf{x},\ z > d\mu.$$

11. Măsuri absolut continue

Spunem că o măsură majorată $\mathbf{m} : \mathcal{K}_{\mathcal{A}}(T) \to F$ este absolut continuă în raport cu o măsură pozitivă μ dacă modulul $|\mathbf{m}|$ este o măsură absolut continuă în raport cu μ.

Dacă $\mathbf{m}$ este de forma $\mathbf{m} = U\mu$, unde U este o funcție slab local μ-integrabilă, atunci $\mathbf{m}$ este absolut continuă în raport cu μ.

Reciproc, teorema lui Lebesgue-Nikodym se poate generaliza însă în condiții de numărabilitate asupra familiei $\mathcal{A}$.

Teorema 4. *Fie $Z \subset F'$ un subspațiu normant pentru F, μ o măsură scalară și $\mathbf{m} : \mathcal{K}_{\mathcal{A}}(T) \to F$ o măsură absolut continuă în raport cu μ. Dacă amilia $\mathcal{A}$ verifică axioma (G) de numărabilitate, atunci există un cîmp de operații $U_{\mathbf{m}} \in \mathcal{C}(\mathcal{G}_{Z'})$ cu următoarele proprietăți:*

1. *Funcția $|U_{\mathbf{m}}|$ este local μ-integrabilă și avem $|\mathbf{m}| = |U_{\mathbf{m}}|\,|\mu|$, adică*

$$\int \varphi \mathrm{d}\,|\mathbf{m}| = \int |U_{\mathbf{m}}|\,\varphi \mathrm{d}\,|\mu|, \quad \textit{pentru} \quad \varphi \in \mathcal{L}^1(|\mathbf{m}|).$$

2. *Cîmpul $U_{\mathbf{m}}$ este Z-slab local μ-integrabil și avem $\mathbf{m} = U_{\mathbf{m}}\,\mu$, adică*

$$\left\langle \int \mathbf{x}\,\mathrm{d}\,\mathbf{m}, z \right\rangle = \int \langle U_{\mathbf{m}}(t)\,\mathbf{x}(t), z \rangle\,\mathrm{d}\mu, \quad \textit{pentru } \mathbf{x} \in \mathcal{L}^1_{\mathcal{A}}(\mathbf{m}) \textit{ și } z \in Z.$$

3. *Dacă ρ este o ridicarea lui $\mathcal{L}^\infty(\mu)$ și $\mathcal{B} \subset \mathcal{A}$ este o parte numărabilă astfel încît mulțimea $\{\mathbf{x}(t);\ \mathbf{x} \in \mathcal{B}\}$ să fie densă în $E(t)$ pentru fiecare $t \in T$, atunci se poate alege $U_{\mathbf{m}}$ astfel încît să avem*

$$\rho[U_{\mathbf{m}}\,\mathbf{x}] = U_{\mathbf{m}}\,\mathbf{x}, \quad \textit{pentru} \quad \mathbf{x} \in \mathcal{B}.$$

4. *Se poate alege $U_{\mathbf{m}} \in \mathcal{C}(\mathcal{G}_F)$ în fiecare din cazurile următoare:*

a) *$F = Z'$,*

b) *pentru fiecare $\mathbf{x} \in \mathcal{A}$, acoperirea convexă și echilibrată a mulțimii $A_{\mathbf{x}} = \{\mathbf{m}(\varphi\mathbf{x});\ \varphi \in \mathcal{K}(T), \int |\varphi|\,\mathrm{d}\,|\mathbf{m}| \leqslant 1\}$ este relativ compactă în F pentru topologia $\sigma(F, Z)$.*

Fie ρ o ridicare a lui $\mathcal{L}^\infty(\mu)$. Dacă $\mathbf{x} \in \mathcal{A}$ și $\varphi \in \mathcal{K}(T)$, atunci $\varphi\mathbf{x} \in \mathcal{K}_{\mathcal{A}}(T)$. Pentru fiecare $\mathbf{x} \in \mathcal{A}$, aplicația $\mathbf{m}_{\mathbf{x}} : \mathcal{K}(T) \to F = \mathcal{L}(R, F)$ definită prin egalitatea

$$\mathbf{m}_{\mathbf{x}}(\varphi) = \mathbf{m}(\varphi\mathbf{x}), \quad \text{pentru} \quad \varphi \in \mathcal{K}(T),$$

este o măsură majorată și avem

$$|\mathbf{m}_{\mathbf{x}}(\varphi)| \leqslant |\mathbf{m}|\,(|\varphi|\,|\mathbf{x}|) = (|\mathbf{x}|\,|\mathbf{m}|)\,(|\varphi|)$$

deci

$$|\mathbf{m}_{\mathbf{x}}| \leqslant |\mathbf{x}|\,|\mathbf{m}|.$$

Deoarece $|\mathbf{m}|$ este absolut continuă în raport cu μ, măsura $\mathbf{m}_{\mathbf{x}}$ este absolut continuă în raport cu μ, deci, conform teoremei 3 din § 18, există o funcție slab local μ-integrabilă $\mathbf{g}_{\mathbf{x}} : T \to Z'$ astfel încît să avem $\mathbf{m}_{\mathbf{x}} = \mathbf{g}_{\mathbf{x}}\,\mu$, $|\mathbf{m}_{\mathbf{x}}| = |\mathbf{g}_{\mathbf{x}}|\,|\mu|$ și $\rho[\mathbf{g}_{\mathbf{x}}] = \mathbf{g}_{\mathbf{x}}$.

Deducem atunci

$$\mathbf{g}_{\alpha\mathbf{x}+\beta\mathbf{y}} = \alpha\,\mathbf{g}_{\mathbf{x}} + \beta\,\mathbf{g}_{\mathbf{y}}. \tag{1}$$

pentru orice $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathcal{A}$ și orice scalari α, β.

Deoarece $|\mathbf{m}|$ este absolut continuă în raport cu μ, există o funcție scalară local μ-integrabilă g cu $|\mathbf{m}| = g\mu = |g|\,|\mu|$ și $\rho[g] = g$.

Din inegalitatea $|\mathbf{m}_\mathbf{x}| \leqslant |\mathbf{x}|\,|\mathbf{m}|$ deducem $|\mathbf{g}_\mathbf{x}|\,|\mu| \leqslant |\mathbf{x}|\,|g|\,|\mu|$ deci

$$|\mathbf{g}_\mathbf{x}(t)| \leqslant |\mathbf{x}(t)|\,|g(t)|, \quad \mu\text{-aproape peste tot,} \tag{2}$$

pentru fiecare $\mathbf{x} \in \mathcal{A}$.

Din relațiile (1) și (2) deducem

$$|\mathbf{g}_\mathbf{x}(t) - \mathbf{g}_\mathbf{y}(t)| \leqslant |\mathbf{x}(t) - \mathbf{y}(t)|\,|g(t)|, \quad \mu\text{-aproape peste tot,} \tag{3}$$

pentru fiecare $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathcal{A}$.

Deoarece familia $\mathcal{A}$ verifică axioma (G), putem alege un șir $(\mathbf{x}_n)$ de cîmpuri din $\mathcal{A}$, astfel încît pentru fiecare $t \in T$ șirul $(\mathbf{x}_n(t))$ să fie dens în $E(t)$. Fie $\mathcal{A}_0$ mulțimea combinațiilor liniare finite de termeni ai șirului $(\mathbf{x}_n)$, cu coeficienți raționali (reali sau complecși, după cum spațiile $E(t)$ sînt reale sau complexe). Pentru fiecare $t \in T$, mulțimea $E_0(t) = \{\mathbf{x}(t);\ \mathbf{x} \in \mathcal{A}_0\}$ este un spațiu vectorial în raport cu corpul numerelor raționale, dens în $E(t)$.

Deoarece $\mathcal{A}_0$ este numărabilă, există o mulțime μ-neglijabilă $N \subset T$, astfel încît pentru $t \notin N$ relațiile (1), (2) și (3) să fie verificate pentru orice cîmpuri $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathcal{A}$ și orice numere raționale α și β.

Pentru fiecare $\mathbf{x} \in \mathcal{A}_0$ să modificăm funcția $\mathbf{g}_\mathbf{x}$ în punctele $t \in N$ punînd $\mathbf{g}_\mathbf{x}(t) = 0$. Atunci avem încă $\rho[\mathbf{g}_\mathbf{x}] = \mathbf{g}_\mathbf{x}$ iar relațiile (1), (2) și (3) au loc pentru orice $t \in T$, orice $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathcal{A}_0$ și orice α, β raționali. Din relația (3) deducem că pentru fiecare $t \in T$ avem

$$\mathbf{g}_\mathbf{x}(t) = \mathbf{g}_\mathbf{y}(t), \tag{4}$$

oricare ar fi cîmpurile $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathcal{A}_0$ cu $\mathbf{x}(t) = \mathbf{y}(t)$.

Fie $t \in T$. Pentru fiecare $a \in E_0(t)$ să punem

$$\mathbf{g}_a(t) = \mathbf{g}_\mathbf{x}(t),$$

unde $\mathbf{x} \in \mathcal{A}_0$ este ales astfel încît $\mathbf{x}(t) = a$. Din egalitatea (4) rezultă că $\mathbf{g}_a(t)$ nu depinde de $\mathbf{x}$ ci numai de a.

Din inegalitatea (2) deducem

$$|\mathbf{g}_a(t)| \leqslant |a|\,|\mathbf{g}(t)|.$$

Aplicația $a \to \mathbf{g}_a(t)$ a lui $E_0(t)$ în Z' este liniară în raport cu corpul numerelor raționale și continuă, deci poate fi prelungită la o aplicație liniară și continuă $U_\mathbf{m}(t) : E(t) \to Z'$. Urmează că $U_\mathbf{m}(t) \in \mathcal{L}(E(t), Z') = G(t)$ și că

$$|U_\mathbf{m}(t)| \leqslant |g(t)|.$$

Pentru orice $\mathbf{x} \in \mathcal{A}_0$ și orice $t \in T$ avem

$$U_\mathbf{m}(t)\,\mathbf{x}(t) = \mathbf{g}_{\mathbf{x}(t)}(t) = \mathbf{g}_\mathbf{x}(t),$$

deci $\rho[U_{\mathbf{m}}\mathbf{x}] = \rho[\mathbf{g}_{\mathbf{x}}] = \mathbf{g}_{\mathbf{x}} = U_{\mathbf{m}}\mathbf{x}$ și pentru orice $\varphi \in \mathscr{X}(T)$ și orice $z \in Z$ avem

$$< \mathbf{m}(\varphi\mathbf{x}), z> = < \mathbf{m}_{\mathbf{x}}(\varphi), z> = \int < \mathbf{g}_{\mathbf{x}}(t)\,\varphi(t), z > \mathrm{d}\mu =$$

$$= \int < U_{\mathbf{x}}(t)\,\mathbf{x}(t)\,\varphi(t), z > \mathrm{d}\mu.$$

Fie $\mathbf{x} \in \mathscr{X}_{\mathscr{A}}(T)$ și fie K suportul lui $\mathbf{x}$. Cîmpul $\mathbf{x}$ este limita uniformă pe K, de cîmpuri de forma

$$\sum_{i=1}^{n} \mathbf{x}_i\,\varphi_i, \quad \text{cu} \quad \mathbf{x}_i \in \mathscr{A}_0 \quad \text{și} \quad \varphi \in \mathscr{X}(T, K).$$

Cum pentru asemenea cîmpuri avem

$$< \mathbf{m}(\textstyle\sum \mathbf{x}_i\,\varphi_i), z> = \int < U_{\mathbf{m}} \textstyle\sum \mathbf{x}_i\,\varphi_i, z > \mathrm{d}\mu,$$

urmează că

$$< \mathbf{m}(\mathbf{x}), z> = \int < U_{\mathbf{m}}\mathbf{x}, z > \mathrm{d}\mu, \quad \text{pentru} \quad \mathbf{x} \in \mathscr{X}_{\mathscr{A}}(T) \quad \text{și} \quad z \in Z.$$

Deoarece $\mathbf{g}_{\mathbf{x}}$ este slab local μ-integrabilă, funcția $|\mathbf{g}_{\mathbf{x}}|$ este μ-măsurabilă. Din inegalitatea

$$|U_{\mathbf{m}}(t)| = \sup_n \frac{|U_{\mathbf{m}}(t)\,\mathbf{x}_n(t)|}{|\mathbf{x}_n(t)|} = \sup_n \frac{|\mathbf{g}_{\mathbf{x}_n}(t)|}{|\mathbf{x}_n(t)|}$$

deducem că funcția $|U_{\mathbf{m}}|$ este μ-măsurabilă. Convenim să punem

$$\frac{U_{\mathbf{m}}(t)\,\mathbf{x}_n(t)}{|\mathbf{x}_n(t)|} = 0 \quad \text{dacă} \quad \mathbf{x}_n(t) = 0.$$

Rezultă că funcția $U_{\mathbf{m}}$ este slab local μ-integrabilă, deci $\mathbf{m} = U_{\mathbf{m}}\,\mu$. Din relația $\mathbf{m} = U_{\mathbf{m}}\,\mu$ deducem

$$|g|\,|\mu| = |\mathbf{m}| \leqslant |U_{\mathbf{m}}|\,|\mu|,$$

deci $|U_{\mathbf{m}}(t)| \geqslant |g(t)|$, μ-aproape peste tot. Deoarece avem de asemenea $|U_{\mathbf{m}}(t)| \leqslant |g(t)|$ pentru orice $t \in T$, rezultă că $|U_{\mathbf{m}}(t)| = |g(t)|$, μ-aproape peste tot și deci $|\mathbf{m}| = |U_{\mathbf{m}}|\,|\mu|$. Cazul $U_{\mathbf{m}} \in \mathscr{C}(\mathscr{G}_F)$ se tratează ca și în teorema 2, § 18.

Cu aceasta teorema este complet demonstrată.

Observații. 1° Dacă $\mathscr{A}$ verifică axioma (G) și dacă F este de tip numărabil, atunci cîmpul de operații $U_{\mathbf{m}}$ din teorema precedentă este *simplu local μ-integrabil*, deci

$$\int \mathbf{x}\,\mathrm{d}\mathbf{m} = \int U_{\mathbf{m}}(t)\,\mathbf{x}(t)\,\mathrm{d}\mu(t), \quad \text{pentru} \quad \mathbf{x} \in \mathscr{L}^1_{\mathscr{A}}(\mathbf{m}).$$

Într-adevăr, în acest caz cîmpul $U_{\mathfrak{m}}$ este simplu măsurabil, iar funcția $|U|$ este local μ-integrabilă.

2° Să presupunem că există o familie fundamentală $\mathcal{D} \subset \mathcal{C}(\mathcal{G}_{Z'})$ de cîmpuri de operații continue, care îndeplinește condiția următoare:

(T) *Funcția* $t \to V(t)\,\mathbf{x}(t)$ *este* $\mathfrak{m}$*-măsurabilă, oricare ar fi* $V \in \mathcal{D}$ *și* $\mathbf{x} \in \mathcal{A}$.

Atunci cîmpul de operații $U_{\mathfrak{m}}$ este măsurabil relativ la $\mathcal{D}$ și μ, deci $U_{\mathfrak{m}} \in \mathcal{L}^{\infty}_{\mathcal{D}}(\mu)$.

Teorema 5. *Fie* μ *o măsură scalară,* $Z \subset F'$ *un subspațiu normant pentru* F *și* $U \in \mathcal{C}(\mathcal{G}_F)$ *un cîmp de operații* Z*-slab local* μ*-integrabil. Avem*

$$|U\mu| = |U|\,|\mu|$$

în fiecare din următoarele cazuri:

1) $\mathcal{A}$ *verifică axioma* (G) *și există o ridicare* ρ *a lui* $\mathcal{L}^{\infty}(\mu)$ *și o mulțime numărabilă* $\mathcal{B} \subset \mathcal{A}$ *astfel încît pentru orice* $t \in T$ *mulțimea* $\{\mathbf{x}(t);\ \mathbf{x} \in \mathcal{B}\}$ *să fie densă în* $E(t)$ *și* $\rho[U\mathbf{x}] = U\mathbf{x}$, *pentru orice* $\mathbf{x} \in \mathcal{B}$.

2) $\mathcal{A}$ *verifică axioma* (G) *și există o mulțime numărabilă* $S \subset Z$ *normantă pentru* F.

3) $\mathcal{A}$ *verifică axioma* (G) *iar* U *este simplu local* μ*-integrabilă.*

4) *Există o familie fundamentală* $\mathcal{A}' \subset \mathcal{C}(\mathcal{E}')$ *de cîmpuri de funcționale continue astfel încît funcția* $t \to <\mathbf{x}(t), \mathbf{x}'(t)>$ *să fie continuă pentru orice* $\mathbf{x} \in \mathcal{A}$ *și orice* $\mathbf{x}' \in \mathcal{A}'$, *iar* $U \in \mathcal{C}(\mathcal{E}')$ *este măsurabil relativ la* $\mathcal{A}'$ *și* μ.

Să notăm $\mathbf{m} = U\mu$. Conform teoremei 3 există un cîmp de operații slab local μ-integrabil $U_{\mathfrak{m}} \in \mathcal{C}(\mathcal{G}_{Z'})$ astfel încît să avem $\mathbf{m} = U_{\mathfrak{m}}\,\mu$ și $|\mathbf{m}| = |U_{\mathfrak{m}}|\,|\mu|$.

Atunci

$$\int <U\mathbf{x}, z>\,\mathrm{d}\mu = \int <U_{\mathfrak{m}}\,x, z>\,\mathrm{d}\mu, \text{ pentru } \mathbf{x} \in \mathcal{L}^1_{\mathcal{A}}(\mathbf{m}) \text{ și } z \in Z,$$

de unde $<U(t)\,\mathbf{x}(t), z> = <U_{\mathfrak{m}}(t)\,\mathbf{x}(t), z>$, μ-aproape peste tot, pentru orice $\mathbf{x} \in \mathcal{A}$ și $z \in Z$, adică $U\mathbf{x} = U_{\mathfrak{m}}\mathbf{x}$ pentru orice $\mathbf{x} \in \mathcal{A}$. Pentru a arăta că $|\mathbf{m}| = |U|\,|\mu|$, este suficient să arătăm că $|U(t)| = |U_{\mathfrak{m}}(t)|$, μ-aproape peste tot.

Dacă este îndeplinită condiția 2, atunci din propoziția 10 deducem că $U(t) = U_{\mathfrak{m}}(t)$, μ-aproape peste tot, deci $|U\mu| = |\mathbf{m}| = |U_{\mathfrak{m}}|\,|\mu| = |U|\,|\mu|$.

Să presupunem îndeplinită condiția 1. Atunci putem alege $U_{\mathfrak{m}}$ astfel încît să avem de asemenea

$$\rho[U_{\mathfrak{m}}\mathbf{x}] = U_{\mathfrak{m}}\mathbf{x}, \quad \text{pentru } \mathbf{x} \in \mathcal{B}.$$

Din propoziția 10 deducem și în acest caz că avem

$U(t) = U_{\mathfrak{m}}(t)$, μ-aproape peste tot deci $|\mathbf{m}| = |U_{\mathfrak{m}}\mu| = |U_{\mathfrak{m}}|\,|\mu| = |U|\,|\mu|$.

Să presupunem acum îndeplinită condiția 3. Fie ρ o ridicare a lui $\mathcal{L}^\infty(\mu)$ și $\mathcal{B} \subset \mathcal{A}$ o mulțime numărabilă, astfel încît pentru fiecare $t \in T$ mulțimea $\{\mathbf{x}(t)\,;\ \mathbf{x} \in \mathcal{B}\}$ să fie densă în $E(t)$. Să alegem $U_\mathfrak{m}$ astfel în cît să avem $\rho[U_\mathfrak{m}\mathbf{x}] = U_\mathfrak{m}\mathbf{x}$ pentru $\mathbf{x} \in \mathcal{B}$. Atunci, pentru fiecare $\mathbf{x} \in \mathcal{B}$, funcția $|U_\mathfrak{m}\mathbf{x}|$ este μ-măsurbailă, deci funcția $U_\mathfrak{m}\mathbf{x}$ este slab local μ-integrabilă și avem

$$|(U_\mathfrak{m}\mathbf{x})\,\mu| = |U_\mathfrak{m}\mathbf{x}|\,|\mu|.$$

Pentru fiecare $\mathbf{x} \in \mathcal{B}$, funcția $U\mathbf{x}$ este local μ-integrabilă deci avem

$$|(U\mathbf{x})\,\mu| = |U\mathbf{x}|\,|\mu|.$$

Dar pentru orice $\mathbf{x} \in \mathcal{A}$, $\varphi \in \mathcal{K}(T)$ și $z \in Z$ avem

$$<\int \mathbf{x}\varphi\,\mathrm{d}\mathbf{m}, z> = \int < U_\mathfrak{m}\mathbf{x}\,\varphi,\ z > \mathrm{d}\mu = \int < U\mathbf{x}\,\varphi,\ z > \mathrm{d}\mu,$$

deci

$$<\int \varphi\,\mathrm{d}(U_\mathfrak{m}\mathbf{x}),\ z> = <\int \varphi\,\mathrm{d}(U\mathbf{x}),\ z>$$

adică

$$(U_\mathfrak{m}\mathbf{x})\,\mu = (U\mathbf{x})\,\mu.$$

Atunci

$$|U\mathbf{x}|\,|\mu| = |(U\mathbf{x})\,\mu| = |(U_\mathfrak{m}\mathbf{x})\,\mu| = |U_\mathfrak{m}\mathbf{x}|\,|\mu|,$$

de unde

$|U(t)\,\mathbf{x}(t)| = |U_\mathfrak{m}(t)\,\mathbf{x}(t)|$, μ-aproape peste tot, pentru fiecare $\mathbf{x} \in \mathcal{B}$, și deci

$$\frac{|U(t)\,\mathbf{x}(t)|}{|\mathbf{x}(t)|} = \frac{|U_\mathfrak{m}(t)\,\mathbf{x}(t)|}{|\mathbf{x}(t)|},\ \mu\text{-aproape peste tot,}$$

pentru fiecare $\mathbf{x} \in \mathcal{B}$, unde convenim ca cei doi membrii ai egalității să fie nuli dacă $\mathbf{x}(t) = 0$. Luînd marginea superioară pentru $\mathbf{x} \in \mathcal{B}$, deducem că $|U(t)| = |U_\mathfrak{m}(t)|$, μ-aproape peste tot deci $|U\mu| = |U|\,|\mu|$.

Să presupunem acum îndeplinită condiția 4.

Să presupunem întîi că $|U(t)| \equiv 1$ și $\mu \geqslant 0$, să arătăm că $|\mathfrak{m}| = \mu$. Fie $\varphi \in \mathcal{K}_+(T)$ și fie K suportul lui φ. Fie $0 < a < 1$. Există un cîmp $\mathbf{y} \in \mathcal{C}(\mathcal{E})$ măsurabil relativ la $\mathcal{A}$ și μ astfel ca

$$a\,|U(t)| \leqslant < \mathbf{y}(t),\ U(t) > \quad \text{și} \quad a \leqslant |\mathbf{y}(t)| \leqslant 2 - a$$

μ-aproape peste tot. Fie $\varepsilon > 0$; există o mulțime compactă $K' \subset K$ astfel încît $\mu(K - K') < \varepsilon/(2 - a + \varepsilon)\,\|\varphi\|$ și astfel încît $\mathbf{y}$ și U să fie continue pe K, deci funcția $t \to < \mathbf{y}(t),\ U(t) >$ să fie continuă pe K'. Există un cîmp $\mathbf{y}_0 \in \mathcal{X}_{\mathcal{A}}(T)$ cu $\mathbf{y}(t) = \mathbf{y}_0(t)$ pentru $t \in K'$ și $\|\mathbf{y}_0\| \leqslant 2 - a + \varepsilon$.

Avem

$$a\mu(\varphi) = a\int |U(t)|\,\varphi(t)\,d\mu \leqslant \int_K < \mathbf{y}(t),\ U(t) > \varphi(t)\,d\mu =$$

$$= \int_{K'} < \mathbf{y}(t),\ U(t) > \varphi(t)\,d\mu + \int_{K-K'} < \mathbf{y}(t),\ U(t) > \varphi(t)\,d\mu \leqslant$$

$$\leqslant \left| \int_K < \mathbf{y}_0(t)\,\varphi(t),\ U(t) > d\mu - \int_{K-K'} < \mathbf{y}_0(t),\ U(t) > \varphi(t)\,d\mu \right| +$$

$$+ \left| \int_{K-K'} < \mathbf{y}(t),\ U(t) > \varphi(t)\,d\mu \right| \leqslant |\mathbf{m}(\varphi\mathbf{y}_0)| + \left| \int_{K-K'} |\mathbf{y}_0(t)|\,\varphi(t)\,d\mu + \right.$$

$$\left. + \int_{K-K'} |\mathbf{y}(t)|\,\varphi(t)\,d\mu \right| \leqslant |\mathbf{m}|\,(\varphi|\mathbf{y}_0|) + (2 - a + \varepsilon)\,\mu(K - K')\,\|\varphi\| +$$

$$+ (2 - a)\,\mu(K - K')\,\|\varphi\| \leqslant (2 - a + \varepsilon)\,|\mathbf{m}|\,(\varphi) + 2\varepsilon.$$

Deoarece a și ε sînt arbitrari, rezultă $\mu(\varphi) \leqslant |\mathbf{m}|\,(\varphi)$ pentru orice $\varphi \in \mathcal{K}_+(T)$ deci $\mu \leqslant |\mathbf{m}|$. Pe de altă parte avem $|\mathbf{m}| \leqslant |U|\,\mu = \mu$, deci $|\mathbf{m}| = \mu$.

Să trecem acum la cazul general. Să notăm $\lambda = |U|\,|\mu|$ și să scriem $\mu = g\,|\mu|$, unde $|g(t)| \equiv 1$. Să punem

$$V(t) = \begin{cases} g(t)\dfrac{U(t)}{|U(t)|}, & \text{dacă} \quad U(t) \neq 0, \\ a_i' \in E'(t) \text{ cu } |a_i'| = 1, & \text{dacă } U(t) = 0. \end{cases}$$

Avem $|V(t)| \equiv 1$ și V este măsurabil relativ la $\mathcal{A}'$ și λ deoarece $V(t)\,|U(t)| = U(t)\,g(t)$ iar Ug este măsurabil relativ la $\mathcal{A}'$ și μ. Atunci

$$\mathbf{m}(\mathbf{x}) = \int < \mathbf{x}(t),\ U(t) > d\mu = \int < \mathbf{x}(t),\ V(t) > |U(t)|\,\frac{1}{g(t)}\,d\mu(t) =$$

$$= \int < \mathbf{x},\ V > |U|\,d\,|\mu| = \int < \mathbf{x},\ V > d\lambda.$$

Din prima parte a demonstrației rezultă că $|\mathbf{m}| = \lambda$ deci $|\mathbf{m}| = |U|\,|\mu|$.

Două măsuri majorate $\mathbf{m}, \mathbf{n} : \mathcal{K}_{\mathcal{A}}(T) \to F$ sînt singulare dacă măsurile pozitive $|\mathbf{m}|$ și $|\mathbf{n}|$ sînt singulare.

Teorema următoare este o generalizare a teoremei lui Lebesgue relativă la descompunerea unei măsuri.

Teorema 6. *Fie ν o măsură pozitivă. Dacă $\mathcal{A}$ verifică axioma (G), orice măsură majorată $\mathbf{m} : \mathcal{K}_{\mathcal{A}}(T) \to F'$ se scrie sub forma*

$$\mathbf{m} = \mathbf{n}' + \mathbf{m}',$$

unde $\mathbf{n}'$ *și* $\mathbf{m}'$ *sînt măsuri majorate astfel încît* $\mathbf{n}'$ *este absolut continuă în raport cu* ν, *iar* $\mathbf{m}'$ *este singulară în raport cu* ν.

Fie μ modulul lui $\mathbf{m}$. După teorema lui Lebesgue, μ se scrie sub forma

$$\mu = \nu' + \mu',$$

unde ν' și μ' sînt măsuri pozitive, astfel încît ν' este absolut continuă în raport cu ν iar μ' este singulară în raport cu ν.

Pe de altă parte $\mathbf{m}$ se poate scrie

$$< \mathbf{m}(\mathbf{x}),\ z > = \int < U(t)\ \mathbf{x}(t),\ z > \mathrm{d}\mu(t)$$

pentru $z \in F'$ și $\mathbf{x} \in \mathcal{K}_{\mathcal{A}}(T)$, unde U este slab local μ-integrabil și $|U(t)| \equiv 1$. Atunci

$$< \mathbf{m}(\mathbf{x}),\ z > = \int < U(t)\ \mathbf{x}(t),\ z > \mathrm{d}\nu'(t) + \int < U(t)\ \mathbf{x}(t),\ z > \mathrm{d}\mu'(t)$$

și U este slab local ν'-integrabil și slab local μ'-integrabil.

Dacă pentru $\mathbf{x} \in \mathcal{K}_{\mathcal{A}}(T)$ și $z \in F$ punem

$$< \mathbf{n}'(\mathbf{x}),\ z > = \int < U(t)\ \mathbf{x}(t),\ z > \mathrm{d}\nu'(t),$$

$$< \mathbf{m}'(\mathbf{x}),\ z > = \int < U(t)\ \mathbf{x}(t),\ z > \mathrm{d}\mu'(t),$$

atunci $\mathbf{n}'$ și $\mathbf{m}'$ sînt măsuri majorate, $\mathbf{m} = \mathbf{n}' + \mathbf{m}'$ iar $|\mathbf{n}'| \leqslant \nu'$ și $|\mathbf{m}'| \leqslant \mu'$, deci $\mathbf{n}'$ este absolut continuă în raport cu ν iar $\mathbf{m}'$ este singulară în raport cu μ. Unicitatea descompunerii se demonstrează ca în teorema 7, § 18.

12. Operații liniare pe spațiul $\mathcal{L}^p_{\mathcal{A}}$

Fie μ o măsură pozitivă pe T și $1 \leqslant p < \infty$. Să considerăm spațiul $\mathcal{L}^p_{\mathcal{A}}(\mu)$ și o aplicație liniară $U : \mathcal{L}^p_{\mathcal{A}}(\mu) \to F$. Să notăm

$$|||\, U \,||| = \sup \sum_i |\, U(\varphi_{A_i} \mathbf{x}_i)|$$

marginea superioară fiind considerată pentru toate cîmpurile de vectori etajate $\mathbf{x} = \sum_i \varphi_{A_i} \mathbf{x}$ cu $A_i \in \mathcal{B}$, $\mathbf{x}_i \in \mathcal{A}$ și $1 \leqslant i \leqslant n$ astfel încît mulțimile A_i să fie disjuncte și $N_p(\mathbf{x}, \mu) \leqslant 1$.

Avem $\|U\| \leqslant |||U||| < \infty$. Într-adevăr, pentru orice cîmp de vectori etajat $\mathbf{x} = \sum_i \varphi_{A_i} \mathbf{x}_i$ cu A_i disjuncte și $N_p(\mathbf{x}, \mu) \leqslant 1$ avem

$$|U(\mathbf{x})| = |U(\sum_i \varphi_{A_i} \mathbf{x}_i)| = |\sum_i U(\varphi_{A_i} \mathbf{x}_i)| \leqslant \sum_i |U(\varphi_{A_i} \mathbf{x}_i)| \leqslant |||U|||$$

și luînd marginea superioară obținem $\|U\| \leqslant |||U|||$.

Propoziția 11. *Pentru orice aplicație liniară* $U : \mathcal{L}^1_{\mathcal{A}}(\mu) \to F$ *avem* $\|U\| = |||U|||$.

Într-adevăr, dacă $\|U\| = +\infty$, atunci avem de asemenea $|||U||| = +\infty$.

Să presupunem deci că $\|U\| < \infty$. Pentru orice cîmp de vectori etajat $\mathbf{x} = \sum_i \varphi_{A_i} \mathbf{x}_i$ cu A_i *disjuncte* și $N_1(\mathbf{x}, \mu) \leqslant 1$ avem

$$\sum_i |U(\varphi_{A_i} \mathbf{x}_i)| \leqslant \sum_i \|U\| N_1(\varphi_{A_i} \mathbf{x}_i, \mu) = \|U\| N_1(\sum_i \varphi_{A_i} \mathbf{x}_i, \mu) = \|U\|,$$

de unde $|||U||| \leqslant \|U\|$ și deci $\|U\| = |||U|||$.

Propoziția 12. *Pentru orice funcțională liniară* $U : \mathcal{L}^p_{\mathcal{A}}(\mu) \to C$ *cu* $1 \leqslant p < \infty$ *avem* $\|U\| = |||U|||$.

Dacă $\|U\| = +\infty$, atunci avem de asemenea $|||U||| = +\infty$. Să presupunem că $\|U\| < \infty$ și fie $\mathbf{x} = \sum \varphi_{A_i} \mathbf{x}_i$ un cîmp de vectori etajat cu A_i *disjuncte* și $N_p(\mathbf{x}, \mu) \leqslant 1$.

Pentru fiecare i, există un număr complex θ_i cu $|\theta_i| = 1$ și

$$|U(\varphi_{A_i} \mathbf{x})| = \theta_i U(\varphi_{A_i} \mathbf{x}_i) = U(\varphi_{A_i} \theta_i \mathbf{x}_i).$$

Atunci

$$\sum_i |U(\varphi_{A_i} \mathbf{x}_i)| = U(\sum_i \varphi_{A_i} \theta_i \mathbf{x}_i) \leqslant \|U\| N_p(\sum_i \varphi_{A_i} \theta_i \mathbf{x}_i, \mu) =$$

$$= \|U\| N_p(\sum_i \varphi_{A_i} \mathbf{x}_i, \mu) \leqslant \|U\|,$$

de unde $|||U||| \leqslant \|U\|$ și deci $\|U\| = |||U|||$.

Observații. 1° Dacă $1 < p < \infty$ și $F \neq C$ putem avea $\|U\| < |||U|||$.

2° Dacă $|||U||| < \infty$ atunci U este continuă.

3° Mulțimea aplicațiilor liniare $U : \mathcal{L}^p_{\mathcal{A}} \to F$ cu $|||U||| < \infty$ este un spațiu vectorial conținut în spațiul Banach $\mathcal{L}(\mathcal{L}^p_{\mathcal{A}}(\mu), F)$ iar $|||U|||$ este o normă.

Teorema 7. *Pentru orice aplicație liniară* $U : \mathcal{L}^p_{\mathcal{A}}(\mu) \to F$, $1 \leqslant p < \infty$ *cu* $|||U||| < \infty$, *restricția sa* $\mathbf{m}$ *la* $\mathcal{K}_{\mathcal{A}}(T)$ *este o măsură majorată absolut continuă în raport cu* μ *astfel încît*

$$\int |\varphi| \, \mathrm{d} \, |\mathbf{m}| \leqslant |||U||| N_p(\varphi, \mu), \text{ pentru } \varphi \in \mathcal{K}(T).$$

Reciproc, orice măsură majorată $\mathbf{m} : \mathcal{K}_{\mathcal{A}}(T) \to F$ *absolut continuă în raport cu* μ, *pentru care există* $\alpha > 0$ *astfel încît*

$$\int |\varphi| \, d\,|\mathbf{m}| \leqslant \alpha \, N_p(\varphi, \mu), \quad \textit{pentru orice} \quad \varphi \in \mathcal{K}(T),$$

poate fi prelungită în mod unic la o operație liniară $U : \mathcal{L}^p_{\mathcal{A}}(\mu) \to F$ *cu* $|||U||| < \infty$. *Avem atunci* $|\mathbf{m}| = g\mu$ *cu*

$$N_q(g, \mu) = |||U|||, \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1,$$

$$\mathcal{L}^p_{\mathcal{A}}(\mu) \subset \mathcal{L}^1_{\mathcal{A}}(\mathbf{m})$$

$$U(\mathbf{x}) = \int \mathbf{x} \, d\mathbf{m}, \quad \textit{pentru} \quad \mathbf{x} \in \mathcal{L}^p_{\mathcal{A}}(\mu),$$

și

$$\int |\mathbf{x}| \, d\,|\mathbf{m}| \leqslant |||U||| \, N_p(\mathbf{x}, \mu), \quad \textit{pentru} \quad \mathbf{x} \in \mathcal{L}^p_{\mathcal{A}}(\mu).$$

Fie $U : \mathcal{L}^p_{\mathcal{A}}(\mu) \to F$ cu $|||U||| < \infty$. Pentru orice mulțime μ-integrabilă relativ compactă $A \subset T$ și orice cîmp $\mathbf{x} \in \mathcal{A}$ avem $\varphi_A \mathbf{x} \in \mathcal{L}^p_{\mathcal{A}}$. Să punem

$$\mathbf{m}(A)\,\mathbf{x} = U(\varphi_A \mathbf{x}).$$

Dacă pentru $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathcal{A}$ avem $\varphi_A \mathbf{x} = \varphi_A \mathbf{y}$, atunci

$$\mathbf{m}(A)\,\mathbf{x} = \mathbf{m}(A)\,\mathbf{y}.$$

Pentru fiecare A, $\mathbf{m}(A)$ este o aplicație liniară a lui $\mathcal{A}$ în F.
Dacă pentru fiecare $\mathbf{x} \in \mathcal{A}$ și fiecare A punem

$$\|\mathbf{x}\|_A = \sup_{t \in A} |\mathbf{x}(t)|$$

și dacă $\|\mathbf{x}\|_A \leqslant 1$, atunci

$$|\mathbf{m}(A)\,\mathbf{x}| = |U(\varphi_A \mathbf{x})| \leqslant |||U||| \; N_p(\varphi_A \mathbf{x}, \mu) \leqslant |||U||| \; N_p(\varphi_A, \mu).$$

Dacă pentru $A \subset B$ punem

$$\|\mathbf{m}(A)\| = \sup_{\|\mathbf{x}\|_B \leqslant 1} |\mathbf{m}(A)\,\mathbf{x}|,$$

atunci $\|\mathbf{m}(A)\|$ nu depinde de B, ci numai de A și avem

$$\|\mathbf{m}(A)\| \leqslant |||U||| \; N_p(\varphi_A, \mu).$$

Funcția de mulțime $\mathbf{m}(A)$ este aditivă. Vom arăta că dacă punem

$$\nu(A) = \sup \sum \|\mathbf{m}(A_i)\|,$$

unde marginea superioară se ia pentru toate partițiile finite $(A_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ ale lui A în mulțimi μ-integrabile, atunci

$$\nu(A) \leqslant |||U||| \; N_p(\varphi_A, \mu) < \infty.$$

În adevăr, fie $(c_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ o familie finită de numere și fie $\varepsilon > 0$. Pentru fiecare i există un cîmp $\mathbf{x}_i \in \mathcal{A}$ cu $\|\mathbf{x}_i\|_A \leqslant 1$ astfel încît

$$\|\mathbf{m}(A_i)\| \, |c_i| \leqslant |\mathbf{m}(A_i)\, \mathbf{x}_i| + \frac{\varepsilon}{n}.$$

Atunci

$$\sum_{i=1}^{n} \|\mathbf{m}(A_i)\| \, |c_i| \leqslant \sum |\mathbf{m}(A_i)\, \mathbf{x}_i| + \varepsilon = \sum |U(\varphi_{A_i} c_i\, \mathbf{x}_i)| + \varepsilon \leqslant$$

$$\leqslant |||U||| \, N_p(\sum \varphi_{A_i} c_i\, \mathbf{x}_i, \mu) + \varepsilon \leqslant |||U||| \, N_p(\sum \varphi_{A_i} c_i, \mu) + \varepsilon.$$

Cum ε este arbitrar, deducem

$$\sum \|\mathbf{m}(A_i)\| \, |c_i| \leqslant |||U||| \, N_p(\sum \varphi_{A_i} c_i, \mu).$$

În particular, luînd $c_i = 1$ obținem

$$\sum \|\mathbf{m}(A_i)\| \leqslant |||U||| \, N_p(\varphi_A, \mu),$$

deci

$$\nu(A) \leqslant |||U||| \, N_p(\varphi_A, \mu).$$

Se verifică ușor că ν este de asemenea aditivă. Se demonstrează ca și în teorema 9, § 18 că avem

$$\sum \nu(A_i) \, |c_i| \leqslant |||U||| \, N_p(\sum \varphi_{A_i} c_i, \mu)$$

și punînd

$$v(\varphi) = \sum \nu(A_i)\, c_i, \text{ pentru } \varphi = \sum \varphi_{A_i} c_i,$$

se demonstrează ca în teorema 9, § 18, că v se poate prelungi prin continuitate la $\mathcal{L}^p(\mu)$ și că avem

$$|U(\mathbf{x})| \leqslant v(|\mathbf{x}|) \quad \text{pentru} \quad \mathbf{x} \in \mathcal{L}^p_{\mathcal{A}}(\mu).$$

Restul demonstrației se face ca în teorema 9, § 18.

Teorema 8. *Fie $Z \subset F'$ un subspațiu normant pentru F, μ o măsură a scalară și $U : \mathcal{L}^p_{\mathcal{A}}(\mu) \to F$ o aplicație liniară cu $|||U||| < \infty$. Dacă familia $\mathcal{A}$ verifică axioma (G), atunci există un cîmp de operații $\mathbf{u} \in \mathcal{C}(\mathcal{C}_{Z'})$ cu următoarele proprietăți :*

1. *Funcția $|\mathbf{u}|$ aparține lui $\mathcal{L}^q(\mu)$ și*

$$N_q(\mathbf{u}, \mu) = |||U|||, \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1;$$

2. *Cîmpul $\mathbf{u}$ este Z-slab local μ-integrabil și avem*

$$< U(\mathbf{x}, z > = \int < \mathbf{u}(t)\, \mathbf{x}(t), z > \, \mathrm{d}\mu, \text{ pentru } \mathbf{x} \in \mathcal{L}^p_{\mathcal{A}}(\mu) \text{ și } z \in Z;$$

3. *Dacă* ρ *este o ridicare a lui* $\mathcal{L}^\infty(\mu)$ *și* $\mathcal{B} \in \mathcal{A}$ *este o mulțime numărabilă astfel încît pentru fiecare* $t \in T$, *mulțimea* $\{\mathbf{x}(t);\ \mathbf{x} \in \mathcal{B}\}$ *să fie densă în* $E(t)$, *atunci se poate alege* $\mathbf{u}$ *astfel încît să avem*

$$\rho[\mathbf{ux}] = \mathbf{ux}, \quad \textit{pentru} \quad \mathbf{x} \in \mathcal{B};$$

4. *Avem* $\mathbf{x} \in \mathcal{C}(\mathcal{G}_F)$ *în fiecare din cazurile următoare*:

a) $F = Z'$;

b) *pentru fiecare* $\mathbf{x} \in \mathcal{A}$, *acoperirea convexă și echilibrată a mulțimii* $\left\{U(\varphi\,\mathbf{x});\ \varphi \in \mathcal{K}(T),\ \int |\varphi|\,\mathrm{d}\,|\mu| \leqslant 1\right\}$ *este relativ compactă în* F *pentru topologia* $\sigma(F, Z)$.

Demonstrația este aceeași ca a teoremei 10, § 18, folosind teoremele 3 și 7 din acest paragraf, în locul teoremelor 3 și 9 din § 18.

Observații. 1° Dacă, în plus, F este de tip numărabil, atunci $\mathbf{u}$ este simplu măsurabil și

$$U(\mathbf{x}) = \int \mathbf{u}(t)\,\mathbf{x}(t)\,\mathrm{d}\mu, \quad \text{pentru} \quad \mathbf{x} \in \mathcal{L}^p_{\mathcal{A}}(\mu).$$

2°. Dacă, în plus, există o familie fundamentală $\mathcal{D} \subset \mathcal{C}(\mathcal{G}_F)$ astfel încît funcția $t \to V(t)\,\mathbf{x}(t)$ să fie μ-măsurabilă, oricare ar fi $V \in \mathcal{D}$ și $\mathbf{x} \in \mathcal{A}$, atunci $\mathbf{u} \in \mathcal{L}^q_{\mathcal{D}}(\mu)$.

Corolarul 1. *Dacă* $\mathcal{A}$ *verifică axioma* (G), *atunci orice aplicație liniară și continuă* $U : \mathcal{L}^1_{\mathcal{A}}(\mu) \to F$ *se reprezintă sub forma*

$$< U(\mathbf{x}),\ z > = \int < \mathbf{u}(t)\,\mathbf{x}(t),\ z > \mathrm{d}\mu, \quad \textit{pentru} \quad \mathbf{x} \in \mathcal{L}^1_{\mathcal{A}}(\mu) \quad \textit{și} \quad z \in Z,$$

unde $\mathbf{u}$ *este un cîmp de operații* Z*-slab local* μ*-integrabil cu*

$$\|U\| = N_\infty(\mathbf{u}, \mu).$$

Corolarul 2. *Dacă* $\mathcal{A}$ *verifică axioma* (G), *orice funcțională liniară continuă* $U : \mathcal{L}^p_{\mathcal{A}}(\mu) \to C$ *cu* $1 \leqslant p < \infty$ *se reprezintă sub forma*

$$U(\mathbf{x}) = \int < \mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t) > \mathrm{d}\mu, \quad \textit{pentru} \quad \mathbf{x} \in \mathcal{L}^p_{\mathcal{A}}(\mu),$$

unde $\mathbf{u}$ *este un cîmp de funcționale slab local integrabil cu*

$$\|U\| = N_q(\mathbf{u}, \mu), \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

Fără nici o restricție asupra familiei $\mathcal{A}$, avem teorema următoare:

Teorema 9. *Fie* $Z \subset F'$ *un subspațiu normant pentru* F *și* $\mathbf{u} \in \mathcal{C}(\mathcal{G}_F)$ *un cîmp de operații* Z*-slab local* μ*-integrabil. Dacă*

$$(i) \qquad N_q(\mathbf{u}, \mu) < \infty, \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1,$$

atunci există o aplicație $U : \mathcal{L}^p_{\mathcal{A}}(\mu) \to Z'$ *astfel încît să avem*

$$<U(\mathbf{x}), z> = \int <\mathbf{u}\,\mathbf{x},\ z>\, d\mu, \quad \textit{pentru} \quad \mathbf{x} \in \mathcal{L}^p_{\mathcal{A}}(\mu) \ \textit{și} \ z \in Z.$$

În acest caz avem

$$|||\,U\,||| \leqslant N_q(\mathbf{u}, \mu).$$

(ii) *Avem* $U(\mathbf{x}) \in F$ *pentru orice* $\mathbf{x} \in \mathcal{L}^p_{\mathcal{A}}(\mu)$ *în fiecare din cazurile următoare:*

1. $F = Z'$;
2. $\mathbf{u}$ *este simplu* μ*-măsurabil*; *în particular* F *este de tip numărabil*;
3. *pentru fiecare* $\mathbf{x} \in \mathcal{A}$ *există o familie local numărabilă* $(K_j)_{j \in J}$ *de părți compacte disjuncte cu* $T - \bigcup K_j$ μ*-neglijabilă, astfel încît pentru fiecare* $j \in J$, *acoperirea convexă și echilibrată a mulțimii* $\{\mathbf{u}(t)\mathbf{x}(t)\,;\ t \in K_j\}$ *să fie relativ compactă în* F *pentru topologia* $\sigma(F, Z)$.

(iii) *În fiecare din cazurile următoare funcția* $|\mathbf{u}|$ *este* μ*-măsurabilă și avem*

$$|||\,U\,||| = N_q(\mathbf{u}, \mu).$$

1) $\mathcal{A}$ *verifică axioma* (G) *și există o ridicare* ρ *a lui* $\mathcal{L}^\infty(\mu)$ *și o mulțime numărabilă* $\mathcal{B} \subset \mathcal{A}$ *astfel încît pentru orice* $t \in T$ *mulțime* $\{\mathbf{x}(t)\,;\ \mathbf{x} \in \mathcal{B}\}$ *să fie densă în* $E(t)$ *și*

$$\rho[\mathbf{ux}] = \mathbf{ux}\ , \quad \textit{pentru} \quad \mathbf{x} \in \mathcal{B}.$$

2) $\mathcal{A}$ *verifică axioma* (G) *și există o mulțime numărabilă* $S \subset Z$ *normant pentru* F.

3) $\mathcal{A}$ *verifică axioma* (G) *și* $\mathbf{u}$ *este simplu* μ*-măsurabil.*

4) *Există o familie fundamentală* $\mathcal{A}' \in \mathfrak{C}(\mathcal{E}')$ *astfel încît funcția* $t \to <\mathbf{x}(t), \mathbf{x}'(t)>$ *să fie continuă pentru orice* $\mathbf{x} \in \mathcal{A}$ *și orice* $\mathbf{x}' \in \mathcal{A}'$ *iar* $\mathbf{u} \in \mathfrak{C}(\mathcal{E}')$ *este un cîmp de funcționale măsurabil relativ la* $\mathcal{A}'$ *și* μ.

Demonstrația este aceeași cu a teoremei 11, § 18, ținînd seama de teoremele 4 și 7.

§ 29. SPAȚII ORLICZ

1. Spațiile $\mathcal{O}^{\Phi}_{\mathcal{A}}$

Fie $\Phi(u)$, o funcție reală pozitivă (finită sau infinită) definită pe $[0, +\infty]$, *crescătoare, continuă la stînga,* cu

$$\lim_{u \to 0} \Phi(u) = 0 \quad \text{și} \quad \lim_{u \to \infty} \Phi(u) = +\infty.$$

Rezultă că Φ este continuă în 0 și $\Phi(0)=0$. Funcția Φ este măsurabilă Lebesgue.

Definiția 1. *Un cîmp de vectori măsurabil* $\mathbf{x}\in\mathcal{C}(\mathcal{L})$ *este* Φ*-integrabil dacă funcția scalară* $t\to\Phi(|\mathbf{x}(t)|)$ *este* μ*-integrabilă.*

Vom nota cu $O^{\Phi}_{\mathcal{A}}$ mulțimea cîmpurilor Φ-integrabile și vom pune

$$|\mathbf{x}|_{\Phi}=\int\Phi(|\mathbf{x}(t)|)\,d\mu(t).$$

Vom spune că un șir $(\mathbf{x}_n)$ de cîmpuri de vectori din $O^{\Phi}_{\mathcal{A}}$ este Φ-convergent către un cîmp de vectori $\mathbf{x}\in O^{\Phi}_{\mathcal{A}}$ dacă $\lim\limits_{n\to\infty}|\mathbf{x}_n-\mathbf{x}|_{\Phi}=0$. Vom scrie uneori $\mathbf{x}_n\xrightarrow{\Phi}\mathbf{x}$.

Propoziția 1. *Dacă* $\Phi(u)>0$ *pentru* $u>0$, *atunci* $|\mathbf{x}|_{\Phi}=0$ *dacă și numai dacă* $\mathbf{x}$ *este* μ*-neglijabil.*

Demonstrația este imediată.

Propoziția 2. *Dacă* α_n *și* α *sînt numere complexe și dacă* $\alpha_n\to\alpha$, *atunci* $\alpha_n\mathbf{x}\xrightarrow{\Phi}\alpha\mathbf{x}$ *pentru orice* $\mathbf{x}\in O^{\Phi}_{\mathcal{A}}$.

Putem presupune că $|\alpha_n-\alpha|<1$ pentru orice n. Deoarece Φ este continuă în 0, avem $\lim\limits_{n\to\infty}\Phi(|\alpha_n-\alpha|\,|\mathbf{x}(t)|)=0$ pentru orice $t\in T$. Observînd că pentru fiecare n avem

$$\Phi(|\alpha_n-\alpha|\,|\mathbf{x}(t)|)\leqslant\Phi(|\mathbf{x}(t)|)$$

și aplicînd teorema lui Lebesgue deducem

$$\lim_{n\to\infty}\int\Phi(|\alpha_n-\alpha|\,|\mathbf{x}(t)|)\,d\mu(t)=0,$$

adică

$$\lim_{n\to\infty}|\alpha_n\mathbf{x}-\alpha\mathbf{x}|_{\Phi}=0.$$

Spațiul $O^{\Phi}_{\mathcal{A}}$ nu este liniar, în general, dacă funcția Φ nu îndeplinește anumite condiții suplimentare.

În continuare vom presupune îndeplinită următoarea condiție:

(Δ) *există un număr* $M>1$ *astfel încît* $\Phi(2u)\leqslant M\Phi(u)$ *pentru* $u\geqslant 0$.

Din condiția (Δ) rezultă următoarele proprietăți pentru funcția Φ:

1) $0<\Phi(u)<+\infty$ *dacă* $0<u<+\infty$;

2) $\Phi(u+v)\leqslant M(\Phi(u)+\Phi(v))$, *pentru* $u\geqslant 0$ *și* $v\geqslant 0$;

3) $\Phi(\alpha u)\leqslant M^n\Phi(u)$, *dacă* $0\leqslant\alpha\leqslant 2^n$;

4) $\Phi\left(\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n\right)\leqslant\sum\limits_{n=1}^{\infty}M^n\Phi(a_n)$, *pentru orice șir* (a_n) *de numere* $\geqslant 0$;

5) $|\Phi(u)-\Phi(v)|\leqslant M\Phi(|u-v|)$, *pentru* $u\geqslant 0$ *și* $v\geqslant 0$.

Demonstrație. 1) Dacă ar exista $u_0 > 0$ cu $\Phi(u_0) = 0$, am avea $\Phi(2^n u_0) \leqslant M^n(u_0)$ pentru orice n, și deci $\Phi(u) \equiv 0$, ceea ce contrazice condiția $\lim_{u\to\infty} \Phi(u) = +\infty$.

Dacă ar exista $u_1 < +\infty$ cu $\Phi(u_1) = +\infty$, am avea $\Phi(u_1) \leqslant M^n \Phi\left(\frac{u_1}{2^n}\right)$ și deci $\Phi(u) \equiv +\infty$, ceea ce contrazice condiția $\lim_{u\to 0} \Phi(u) = 0$. Așadar, dacă $0 < u < \infty$, atunci $0 < \Phi(u) < +\infty$.

2) Să presupunem, de exemplu, că $u \geqslant v \geqslant 0$; atunci

$$\Phi(u + v) \leqslant \Phi(2u) \leqslant M\,\Phi(u) \leqslant M\,(\Phi(u) + \Phi(v)).$$

Proprietatea 3) este evidentă.

4) Avem $\Phi(a_1) \leqslant M\,\Phi(a_1)$. Să prespunem că inegalitatea 4 are loc pentru orice familie de n numere:

$$\Phi\left(\sum_{k\leqslant n} a_k\right) \leqslant \sum_{k\leqslant n} M^k\,\Phi(a_k).$$

Fie $(a_k)_{1\leqslant k\leqslant n+1}$ o familie de $n+1$ numere. Avem:

$$\Phi\left(\sum_{k\leqslant n+1} a_k\right) \leqslant M\,\Phi(a_1) + M\,\Phi\left(\sum_{k=2}^{n+1} a_k\right) \leqslant$$

$$\leqslant M\,\Phi(a_1) + M\sum_{k=2}^{n+1} M^{k-1}\,\Phi(a_n) = \sum_{k\leqslant n+1} M^k\,\Phi(a_k).$$

Rezultă, prin inducție completă, că inegalitatea 4) are loc pentru orice familie finită de numere.

Fie acum (a_n) un șir de numere $\geqslant 0$. Deoarece Φ este continuă la stînga, avem

$$\Phi\left(\sum_{k=1}^{\infty} a_k\right) = \Phi\left(\lim_{n\to\infty} \sum_{k\leqslant n} a_k\right) = \lim_{n\to\infty} \Phi\left(\sum_{k\leqslant n} a_k\right) \leqslant \lim_{n\to\infty} \sum_{k\leqslant n} M^k\,\Phi(a_k) = \sum_{k=1}^{\infty} M^k\,\Phi(a_k).$$

5) Să presupunem întîi că $u \geqslant v \geqslant 0$. Să notăm $a = u - v$ și $b = v$; avem $a \geqslant 0$ și $b \geqslant 0$. Presupunînd, de exemplu, că $a \geqslant b$, avem

$$\Phi(a + b) \leqslant \Phi(2a) \leqslant M\,\Phi(a) \leqslant M\,\Phi(a) + \Phi(b)$$

deci

$$0 \leqslant \Phi(a + b) - \Phi(b) \leqslant M\,\Phi(a),$$

de unde

$$0 \leqslant \Phi(u) - \Phi(v) \leqslant M\,\Phi(u - v) = M\,\Phi(|u - v|).$$

Dacă acum $v < u$, atunci

$$0 \leqslant \Phi(v) - \Phi(u) \leqslant M\,\Phi(v - u) = M\,\Phi|u - v|).$$

Urmează că

$$|\Phi(u) - \Phi(v)| \leqslant M\,\Phi(|u - v|).$$

Propoziția 3. *$O^{\Phi}_{\mathcal{A}}$ este un spațiu vectorial.*

Rezultă din proprietățile 2) și 3).

Propoziția 4. *Funcția* $\mathbf{x} \to |\mathbf{x}|_{\Phi}$ *definită pe* $O^{\Phi}_{\mathcal{A}}$ *are următoarele proprietăți:*

(i) $|\mathbf{x}|_{\Phi} = 0$, *dacă și numai dacă* $\mathbf{x}$ *este neglijabil*;

(ii) $|\mathbf{x} + \mathbf{y}|_{\Phi} \leqslant M(|\mathbf{x}|_{\Phi} + |\mathbf{y}|_{\Phi})$;

(iii) $|\alpha\,\mathbf{x}|_{\Phi} \leqslant M^{n}|\mathbf{x}|_{\Phi}$, *dacă* $|\alpha| \leqslant 2^{n}$;

(iv) *dacă* $\mathbf{x}_n \xrightarrow{\Phi} \mathbf{x}$ *și* $\mathbf{y}_n \xrightarrow{\Phi} \mathbf{y}$ *atunci* $\mathbf{x}_n + \mathbf{y}_n \xrightarrow{\Phi} \mathbf{x} + \mathbf{y}$;

(v) *dacă* $\alpha_n \xrightarrow{\Phi} \alpha$ *atunci* $\alpha_n \mathbf{x} \xrightarrow{\Phi} \alpha\,\mathbf{x}$ *pentru orice* $\mathbf{x} \in O^{\Phi}_{\mathcal{A}}$;

(vi) *dacă* $\mathbf{x}_n \xrightarrow{\Phi} \mathbf{x}$ *atunci* $\alpha\,\mathbf{x}_n \xrightarrow{\Phi} \alpha\,\mathbf{x}$, *pentru orice scalar* α;

(vii) *dacă* $\mathbf{x}_n \xrightarrow{\Phi} \mathbf{x}$ *și* $\alpha_n \longrightarrow \alpha$, *atunci* $\alpha_n\,\mathbf{x}_n \xrightarrow{\Phi} \alpha\,\mathbf{x}$;

(viii) *dacă* $\mathbf{x}_n \xrightarrow{\Phi} \mathbf{x}$ *atunci* $|\mathbf{x}_n|_{\Phi} \longrightarrow |\mathbf{x}|_{\Phi}$;

(ix) $||\mathbf{x}|_{\Phi} - |\mathbf{y}|_{\Phi}| \leqslant M|\mathbf{x} - \mathbf{y}|_{\Phi}$.

Demonstrație. Proprietățile (i) și (v) au fost deja demonstrate (prop. 1 și prop. 2). Proprietățile (ii) și (iii) rezultă din proprietățile 2) și 3) ale funcției Φ, iar proprietatea (vi) rezultă din (iii).

Proprietatea (iv) rezultă astfel:

$$|\mathbf{x}_n + \mathbf{y}_n - (\mathbf{x}+\mathbf{y})|_{\Phi} = |(\mathbf{x}_n - \mathbf{x}) + (\mathbf{y}_n - \mathbf{y})|_{\Phi} \leqslant M(|\mathbf{x}_n - \mathbf{x}|_{\Phi} + |\mathbf{y}_n - \mathbf{y}|_{\Phi}) \to 0.$$

Pentru proprietatea (vii), presupunem că $|\alpha_n| \leqslant 2^{k}$ pentru orice n. Atunci

$$\begin{aligned} |\alpha_n\,\mathbf{x}_n - \alpha\,\mathbf{x}|_{\Phi} &= |\alpha_n(\mathbf{x}_n - \mathbf{x}) + (\alpha_n - \alpha)\,\mathbf{x}|_{\Phi} \leqslant \\ &\leqslant M|\alpha_n(\mathbf{x}_n - \mathbf{x})|_{\Phi} + M|(\alpha_n - \alpha)\,\mathbf{x}|_{\Phi} \leqslant \\ &\leqslant M^{k}|(\mathbf{x}_n - \mathbf{x})|_{\Phi} + M|(\alpha_n - \alpha)\,\mathbf{x}|_{\Phi} \end{aligned}$$

iar ultimul membru tinde către 0, conform proprietății (v).

Proprietatea (viii) rezultă astfel:

$$|\Phi(|\mathbf{x}_n(t)|) - \Phi(|\mathbf{x}(t)|)| \leqslant M\,\Phi(|\mathbf{x}_n(t)| - |\mathbf{x}(t)|) \leqslant M\,\Phi(|\mathbf{x}_n(t) - \mathbf{x}(t)|).$$

de unde

$$\begin{aligned} ||\mathbf{x}_n|_{\Phi} - |\mathbf{x}|_{\Phi}| &= \left|\int_{\cdot} [\Phi(|\mathbf{x}_n(t)|) - \Phi(|\mathbf{x}(t)|)]\,\mathrm{d}\mu(t)\right| \leqslant \\ &\leqslant \int_{\cdot} |\Phi(|\mathbf{x}_n(t)|) - \Phi(|\mathbf{x}(t)|)|\,\mathrm{d}\mu(t) \leqslant \\ &\leqslant M\int_{\cdot} \Phi(|\mathbf{x}_n(t) - \mathbf{x}(t)|)\,\mathrm{d}\mu(t) = M|\mathbf{x}_n - \mathbf{x}|_{\Phi} \to 0. \end{aligned}$$

În acest fel s-a demonstrat și proprietatea (ix).

Propoziția 5. *Fie* $(\mathbf{x}_n)$ *un șir de cîmpuri de vectori din* $\mathcal{O}^{\Phi}_{\mathcal{A}}$, *astfel ca* $\sum_{n=1}^{\infty} M^n |\mathbf{x}_n|_{\Phi} < +\infty$. *Atunci seria* $\sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{x}_n(t)$ *este absolut convergentă,* μ*-aproape peste tot. Dacă punem* $\mathbf{x}(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{x}_n(t)$ *în punctele de convergență și* $\mathbf{x}(t)=0$ *în celelalte puncte, atunci* $\mathbf{x} \in \mathcal{O}^{\Phi}_{\mathcal{A}}$ *și pentru orice n avem*

$$|\mathbf{x} - \sum_{k \leqslant n} \mathbf{x}_k|_{\Phi} \leqslant \sum_{k>n} M^k |\mathbf{x}_k|_{\Phi}.$$

Să considerăm funcția (finită sau infinită)

$$f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} |\mathbf{x}_n(t)|.$$

Atunci

$$|f|_{\Phi} = \left| \sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{x}_n \right|_{\Phi} \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} M^n |\mathbf{x}_n|_{\Phi} < +\infty$$

deci $\Phi(f(t)) < +\infty$, μ-aproape peste tot.

Rezultă că $f(t) < +\infty$, μ-aproape peste tot, deci seria $\sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{x}_n(t)$ este absolut convergentă, deci convergentă, μ-aproape peste tot. Cîmpul de vectori $\mathbf{x}$, definit în enunț, este μ-măsurabil și avem

$$|\mathbf{x}(t)| \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} |\mathbf{x}_n(t)| = f(t).$$

Atunci

$$\int \Phi(|\mathbf{x}(t)|)\, d\mu(t) \leqslant \int \Phi\left(\sum_{n=1}^{\infty} |\mathbf{x}_n(t)|\right) d\mu(t) \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} M^n \int \Phi(|\mathbf{x}_n(t)|)\, d\mu(t) < +\infty$$

deci $\mathbf{x} \in \mathcal{O}^{\Phi}_{\mathcal{A}}$. Pentru orice n avem

$$|\mathbf{x}(t) - \sum_{k \leqslant n} \mathbf{x}_k(t)| \leqslant \sum_{k>n} |\mathbf{x}(t)|.$$

μ-aproape peste tot, deci,

$$|\mathbf{x} - \sum_{k \leqslant n} \mathbf{x}_k|_{\Phi} \leqslant |\sum_{k>n} \mathbf{x}_k|_{\Phi} \leqslant \sum_{k>n} M^k |\mathbf{x}_k|_{\Phi}$$

și propoziția este demonstrată.

Un șir $(\mathbf{x}_n)$ de cîmpuri de vectori din $\mathcal{O}^{\Phi}_{\mathcal{A}}$ se numește șir Φ-Cauchy dacă $|\mathbf{x}_n - \mathbf{x}_m|_{\Phi} \to 0$ cînd $n, m \to \infty$.

Propoziția 6. *Pentru orice șir* Φ*-Cauchy* $(\mathbf{x}_n)$ *de elemnte din* $O^{\Phi}_{\mathcal{A}}$, *există un cîmp* $\mathbf{x} \in O^{\Phi}_{\mathcal{A}}$ *astfel încît* $\mathbf{x}_n \overset{\Phi}{\to} \mathbf{x}$.

Fie $(\mathbf{x}_n)$ un șir Φ-Cauchy. Pentru orice $\varepsilon > 0$ există un număr întreg N_ε astfel încît pentru n, $m < N_\varepsilon$ să avem

$$|\mathbf{x}_n - \mathbf{x}_m| < \frac{\varepsilon}{2M}$$

Putem găsi atunci un șir strict crescător de numere naturale (n_k) astfel încît

$$|\mathbf{x}_{n_{k+1}} - \mathbf{x}_{n_k}|_\Phi \leqslant \frac{1}{2^k M^k}.$$

Dacă punem $\mathbf{y}_k = \mathbf{x}_{n_{k+1}} - \mathbf{x}_{n_k}$, atunci $M^k |\mathbf{y}_k|_\Phi \leqslant \frac{1}{2^k}$ și $\sum_{k=1}^{\infty} M^k |\mathbf{y}_k|_\Phi < +\infty$.

După propoziția 4, seria $\sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{y}_n(t)$ este absolut convergentă μ-aproape peste tot către un cîmp de vectori $\mathbf{y} \in O^{\Phi}_{\mathcal{A}}$. Atunci cîmpul de vectori $\mathbf{x} = \mathbf{y} + \mathbf{x}_{n_1}$ este limita șirului $(\mathbf{x}_{n_k})$ și, după propoziția 4, avem

$$|\mathbf{x} - \mathbf{x}_{n_k}|_\Phi < \frac{\varepsilon}{2M}, \quad \text{pentru } n > N'_\varepsilon.$$

Atunci

$$|\mathbf{x} - \mathbf{x}_n|_\Phi = |\mathbf{x} - \mathbf{x}_{n_k} + \mathbf{x}_{n_k} - \mathbf{x}_n|_\Phi <$$

$$\leqslant M\,(|\mathbf{x} - \mathbf{x}_{n_k}|_\Phi + |\mathbf{x}_{n_k} - \mathbf{x}_n|_\Phi) \leqslant \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

dacă $n > \max(N_\varepsilon, N'_\varepsilon)$, deci $\mathbf{x}_n \overset{\Phi}{\to} \mathbf{x}$.

Propoziția 7. *Mulțimea* $\mathcal{X}_{\mathcal{A}}(T)$ *a cîmpurilor de vectori continue cu suport compact și mulțimea* $\mathcal{E}_{\mathcal{A}}(\mathcal{B})$ *a cîmpurilor boreliene etajate sînt subspații vectoriale ale lui* $O^{\Phi}_{\mathcal{A}}$. *Pentru orice* $\mathbf{x} \in O^{\Phi}_{\mathcal{A}}$, *există un șir* $(\mathbf{x}_n)$ *de cîmpuri de vectori mărginite din* $O^{\Phi}_{\mathcal{A}}$, *astfel încît* $\mathbf{x} \overset{\Phi}{\longrightarrow} \mathbf{x}$.

Fie $\mathbf{x} \in \mathcal{X}^{\Phi}_{\mathcal{A}}(T)$. Atunci $\Phi(|\mathbf{x}(t)|)$ este o funcție scalară mărginită cu suport compact. Se verifică de asemenea că această funcție este boreliană, deci μ-integrabilă și deci $\mathbf{x} \in O^{\Phi}_{\mathcal{A}}$. La fel se arată că $\mathcal{E}_{\mathcal{A}}(\mathcal{B}) \subset O^{\Phi}_{\mathcal{A}}$.

Fie acum $\mathbf{x} \in O^{\Phi}_{\mathcal{A}}$. Pentru fiecare număr natural n să punem

$$\mathbf{x}_n(t) = \begin{cases} \mathbf{x}(t), & \text{dacă } |\mathbf{x}(t)| \leqslant n, \\ n\,\dfrac{\mathbf{x}(t)}{|\mathbf{x}(t)|}, & \text{dacă } |\mathbf{x}(t)| > n. \end{cases}$$

Avem $|\mathbf{x}_n(t)| \leqslant n$. Cîmpul $\mathbf{x}_n$ este măsurabil, mărginit și Φ-integrabil, deoarece $|\mathbf{x}_n(t)| \leqslant |\mathbf{x}(t)|$.

Pentru orice $t \in T$ avem $\mathbf{x}_n(t) \to \mathbf{x}(t)$ și

$$|\mathbf{x}_n(t) - \mathbf{x}(t)| \leqslant |\mathbf{x}_n(t)| + |\mathbf{x}(t)| \leqslant 2|\mathbf{x}(t)|.$$

De aici deducem că pentru orice $t \in T$ avem

$$\Phi(|\mathbf{x}_n(t) - \mathbf{x}(t)|) \to 0$$

$$\Phi(|\mathbf{x}_n(t) - \mathbf{x}(t)|) \leqslant \Phi(2|\mathbf{x}(t)|) \leqslant M\,\Phi(|\mathbf{x}(t)|)$$

și aplicînd teorema lui Lebesgue, rezultă

$$\lim_{n\to\infty} \int \Phi(|\mathbf{x}_n(t) - \mathbf{x}(t)|)\, d\mu(t) = 0$$

adică $\mathbf{x}_n \overset{\Phi}{\to} \mathbf{x}$.

Funcția $\mathbf{x} \to |\mathbf{x}|_\Phi$ are proprietăți asemănătoare cu ale unei seminorme; Φ-convergența definește pe $O^\Phi_{\mathcal{A}}$ o topologie compatibilă cu structura de spațiu vectorial a lui $O^\Phi_{\mathcal{A}}$ (prop. 4, proprietățile (v) și (vii)). Cu această topologie, $O^\Phi_{\mathcal{A}}$ nu este local convex.

Propoziția 8. *Familia de părți din* $O^\Phi_{\mathcal{A}} \times O^\Phi_{\mathcal{A}}$ *de forma*

$$U_n = \left\{(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \,|\, \mathbf{x}, \mathbf{y} \in O^\Phi_{\mathcal{A}},\ |\mathbf{x} - \mathbf{y}|_\Phi \leqslant \frac{1}{n}\right\}$$

este un sistem fundamental de împrejurimi al unei structuri uniforme $\mathcal{U}$ *pe* $O^\Phi_{\mathcal{A}}$.

Se verifică ușor că $(\mathbf{x}, \mathbf{x}) \in U_n$ pentru orice $\mathbf{x} \in O$, că $U_m \subset U_n$ dacă $n \leqslant m$ și că U_n sînt simetrice.

Să arătăm că dacă $2Mm \leqslant n$, atunci $U_n^2 \subset U_m$.

Într-adevăr, dacă $(\mathbf{x}, \mathbf{z}) \in U_n$ și $(\mathbf{z}, \mathbf{y}) \in U_n$, avem

$$|\mathbf{x} - \mathbf{z}|_\Phi \leqslant \frac{1}{n}$$

și

$$|\mathbf{z} - \mathbf{y}|_\Phi \leqslant \frac{1}{n},$$

deci

$$|\mathbf{x} - \mathbf{y}|_\Phi = |\mathbf{x} - \mathbf{z} + \mathbf{z} - \mathbf{y}|_\Phi \leqslant M(|\mathbf{x} - \mathbf{z}|_\Phi| + |\mathbf{z} - \mathbf{y}|_\Phi) \leqslant \frac{2M}{n} \leqslant \frac{1}{m},$$

deci $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in U_m$.

Așadar șirul (U_n) îndeplinește toate condițiile unui sistem fundamental de împrejurimi.

Să notăm cu τ topologia dedusă pe $O^{\Phi}_{\mathcal{A}}$ din structura uniformă $\mathcal{U}$. Deoarece sistemul de vecinătăți al originii în $O^{\Phi}_{\mathcal{A}}$ este numărabil, există un ecart d pe $O^{\Phi}_{\mathcal{A}}$ care definește o structură uniformă pe $O^{\Phi}_{\mathcal{A}}$, identică cu $\mathcal{U}$.

Propoziția 9. *Un șir* $(\mathbf{x}_n)$ *din* $O^{\Phi}_{\mathcal{A}}$ *este convergent către* $\mathbf{x} \in O^{\Phi}_{\mathcal{A}}$ *pentru topologia* τ, *dacă și numai dacă* $\mathbf{x}_n \overset{\Phi}{\to} \mathbf{x}$.

Într-adevăr, să presupunem întîi că $\mathbf{x}_n \overset{\Phi}{\to} \mathbf{x}$, adică $|\mathbf{x}_n - \mathbf{x}|_{\Phi} \to 0$. Pentru orice număr întreg $k > 0$, există un număr N_k astfel încît să avem $|\mathbf{x}_n - \mathbf{x}|_{\Phi} \leqslant \frac{1}{k}$ pentru $n \geqslant N_k$. Urmează că secțiunea $S_{N_k} = \{\mathbf{x}_n \mid n \geqslant N_k\}$ este conținută în vecinătatea $\mathcal{U}_k(\mathbf{x})$ a lui $\mathbf{x}$, deci filtrul elementar asociat șirului $(\mathbf{x}_n)$ converge către $\mathbf{x}$ în topologia τ, adică $\mathbf{x}_n \to \mathbf{x}$ în τ.

Reciproc, dacă $\mathbf{x}_n \to \mathbf{x}$ în τ, filtrul elementar asociat șirului $(\mathbf{x}_n)$ este mai fin decît filtrul vecinătăților lui $\mathbf{x}$ în τ. Pentru orice întreg $k > 0$ există o secțiune $S_{N_k} \subset U_k(\mathbf{x})$, adică

$$|\mathbf{x}_n - \mathbf{x}|_{\Phi} \leqslant \frac{1}{k}, \text{ dacă } n \geqslant N_k$$

ceea ce înseamnă că $\mathbf{x}_n \overset{\Phi}{\to} \mathbf{x}$.

Din această propoziție deducem că topologia τ este compatibilă cu structura de spațiu vectorial a lui $O^{\Phi}_{\mathcal{A}}$.

Propoziția 10. *Spațiul separat* $O^{\Phi}_{\mathcal{A}}$ *asociat lui* $O^{\Phi}_{\mathcal{A}}$ *este un spațiu vectorial metrizabil complet.*

Mulțimea $\mathcal{N}_{\mathcal{A}}$ a cîmpurilor neglijabile este un subspațiu vectorial închis în $O^{\Phi}_{\mathcal{A}}$ și avem $O^{\Phi}_{\mathcal{A}} = O^{\Phi}_{\mathcal{A}} / \mathcal{N}_{\mathcal{A}}$. Deoarece $O^{\Phi}_{\mathcal{A}}$ este complet, $O^{\Phi}_{\mathcal{A}}$ este complet. Deoarece $O^{\Phi}_{\mathcal{A}}$ are un sistem fundamental de vecinătăți ale originii numărabil, este metrizabil, distanța fiind dedusă din ecartul d prin factorizare.

Exemplu. Dacă $\Phi(u) = u^p$, $(1 \leqslant p < +\infty)$, condiția (Δ) este verificată cu $M = 2^p$. În acest caz spațiile $\mathcal{L}^p_{\mathcal{A}}$ și $O^{\Phi}_{\mathcal{A}}$ conțin aceleași elemente și topologiile lor sînt echivalente.

2. Funcții complementare în sensul lui Young

Fie φ o funcție *pozitivă* (cu valori finite sau $+\infty$), *crescătoare* și *continuă la stînga*, definită pe semiaxa pozitivă închisă $[0, +\infty]$, cu $\varphi(0) = 0$.

Să considerăm funcția ψ, „inversă" funcției φ, definită pe $[0, +\infty]$, astfel:

$$\psi(0) = 0 \text{ și } \psi(s) = \sup_{\varphi(t) < s} t, \text{ pentru } 0 < s \leqslant +\infty$$

Se verifică ușor că ψ este de asemenea *pozitivă* (cu valori finite sau $+\infty$), *crescătoare* și *continuă la stînga*.

Funcția ψ se poate descrie și astfel: dacă φ are un salt într-un punct t, atunci $\psi(s) = t$ pentru $\varphi(t-0) < s \leqslant \varphi(t+0)$; dacă $\varphi(t) = c$ pentru $t \in (a, b]$, dar $\varphi(t) < c$ pentru $t < a$, atunci $\psi(c) = a$; dacă φ este continuă în t și $\varphi(t) = s$, dar φ nu este constantă pe nici un interval de forma $(t, b]$, atunci $\psi(s) = t$ și ψ este de asemenea continuă în s.

Deoarece φ și ψ sînt crescătoare, mulțimea punctelor lor de discontinuitate este numărabilă.

Funcția χ definită pe $[0, +\infty]$ prin egalitățile

$$\chi(0) = 0 \text{ și } \chi(t) = \sup_{\psi(s) < t} s, \text{ pentru } 0 < t \leqslant +\infty,$$

este de asemenea pozitivă, crescătoare și continuă la stînga, și coincide cu φ în punctele comune de continuitate. Deoarece funcțiile φ și χ sînt continue la stînga iar mulțimea punctelor de discontinuitate este numărabilă, rezultă că φ și χ coincid peste tot. Așadar avem

$$\varphi(t) = \sup_{\psi(s) < t} s, \text{ pentru } 0 < t \leqslant +\infty,$$

deci φ este la rîndul său „inversă" funcției ψ.

Din definiția funcției ψ rezultă imediat că: dacă $s = \varphi(t)$, atunci $\psi(s) \leqslant t$ iar dacă $t = \psi(s)$ atunci $\varphi(t) \leqslant s$.

Să observăm că cel puțin una din funcțiile φ și ψ are valori finite pe $[0, +\infty)$. Într-adevăr, dacă, de exemplu, am avea $\psi(s) < +\infty$ pentru $s < s_0 < +\infty$ și $\psi(s) = +\infty$ pentru $s > s_0$, atunci $\varphi(+\infty) = s_0$ și deci, φ fiind crescătoare, $\varphi(t) \leqslant s_0$ pentru orice $t \in [0, +\infty]$.

De asemenea, cel puțin una din funcțiile φ și ψ se anulează numai în origine. Într-adevăr, dacă, de exemplu, am avea $\psi(s) = 0$ pentru $s \leqslant \delta \neq 0$, atunci $\varphi(t) \geqslant \delta$ pentru $t > 0$.

De aceea, vom presupune, în continuare, că

$$0 < \varphi(t) < +\infty \text{ pentru } 0 < t < +\infty.$$

Dacă $\lim_{t \to \infty} \varphi(t) = l < +\infty$, atunci

$$\psi(s) < +\infty \text{ pentru } s < l \text{ și } \psi(s) = +\infty \text{ pentru } s > l.$$

Dacă $\lim_{t \to \infty} \varphi(t) = +\infty$, atunci avem

$$\psi(s) < +\infty \text{ pentru } s < +\infty \text{ și } \lim_{s \to \infty} \psi(s) = \infty.$$

Dacă $\varphi(0+0) = \delta > 0$, atunci $\psi(s) = 0$ pentru $s \leqslant \delta$.

Dacă φ este continuă în 0, atunci și ψ este continuă în 0.

Lema 1. *Dacă* $\varphi(t) < s$ *atunci* $t \leqslant \psi(s)$. *Dacă* $s < \varphi(t)$ *atunci* $\psi(s) < t$.

Într-adevăr, prima afirmație rezultă nemijlocit din definiția funcției ψ. Dacă $s < \varphi(t)$, există un număr $p \geqslant 0$ cu $s + p = \varphi(t)$ deci $\psi(s) \leqslant \psi(s+p) \leqslant t$. Nu putem avea însă $\psi(s) = t$, deoarece în acest caz am

avea $s \geqslant \varphi(t)$, ceea ce contrazice ipoteza. Așadar, $\psi(s) < t$ și lema este demonstrată.

Să împărțim cadranul I ($t \geqslant 0$, $s \geqslant 0$) din plan în patru mulțimi astfel

$$E_1 = \{(t,\ s) \mid s < \varphi(t)\};\quad E_2' = \{(t,\ s) \mid s = \varphi(t)\};$$

$$E_2'' = \{(t,\ s) \mid s > \varphi(t) \text{ și } t = \psi(s)\};\quad E_3 = \{(t,\ s)\} \mid s > \varphi(t) \text{ și } \psi(s) > t\}.$$

Mulțimea $E_2 = E_2' \cup E_2''$ este formată din punctele $(t,\ s)$ pentru care avem cel puțin una din egalitățile $\varphi(t) = s$ sau $t = \psi(s)$.

Lema 2. *Mulțimile E_1 și E_3 sînt deschise (relativ la cadranul* I*) iar E_2 este închisă și neglijabilă pentru măsura Lebesgue din plan.*

Fie $(t_0,\ s_0) \in E_1$, deci $s_0 < \varphi(t_0)$ sau $s_0 = \varphi(t_0) - 2p$ cu $p \geqslant 0$. Deoarece $\varphi(t_0) = \varphi(t_0 - 0)$, există $\delta > 0$ astfel încît $\varphi(t) > \varphi(t_0) - p$ dacă $t \geqslant t_0 - \delta$. În dreptunghiul $|t - t_0| \leqslant \delta$, $|s - s_0| \leqslant \delta$, avem $s \leqslant s_0 + p = \varphi(t_0) - p < \varphi(t)$, deci intersecția acestui dreptunghi cu cadranul I — care este o vecinătate a lui $(t_0,\ s_0)$ în cadranul I — aparține mulțimii E_1. Așadar $(t_0,\ s_0)$ este punct interior al lui E_1. Cum $(t_0,\ s_0)$ a fost ales arbitrar, urmează că E_1 este deschisă.

Faptul că E_3 este deschisă se demonstrează la fel.

Deoarece $E_2 = \mathbf{C}(E_1 \cup E_3)$ urmează că E_2 este închisă. Mulțimea E_2 este neglijabilă, fiind reuniunea graficelor funcțiilor φ și ψ.

Funcțiile Φ și Ψ definite pe $[0,\ +\infty]$ prin egalitățile

$$\Phi(u) = \int_0^u \varphi(t)\,dt \quad \text{și} \quad \Psi(v) = \int_0^v \psi(s)\,ds$$

se numesc funcții complementare în sensul lui Young.

Se verifică ușor că Φ este continuă și crescătoare și

$$\Phi(0) = 0,\ \lim_{u \to \infty} \Phi(u) = +\infty.$$

Dacă $\varphi(t) > 0$ pentru $t > u_0$, atunci Φ este strict crescătoare pentru $u > u_0$

În particular, dacă $0 < \varphi(t) < +\infty$ pentru $0 < t < \infty$, atunci Φ este strict crescătoare și

$$0 < \Phi(u) < +\infty \text{ pentru } 0 < u < +\infty.$$

Funcția Ψ este de asemenea crescătoare și continuă în toate punctele, cu excepția următoare :

dacă $\lim_{t \to \infty} \varphi(t) = l < +\infty$, atunci $\Psi(v) < +\infty$ pentru $v \leqslant l$ și $\Psi(v) = +\infty$ pentru $v > l$; în punctul l funcția Ψ este continuă la stînga.

Dacă însă $\lim_{t \to \infty} \varphi(t) = +\infty$, atunci $\Psi(v) < +\infty$ pentru $v < +\infty$ și $\lim_{v \to \infty} \Psi(v) = +\infty$.

Avem de asemenea $\Psi(0) = 0$ și dacă $\Psi(v_1) \neq 0$, atunci Ψ este strict crescătoare pentru $v \geqslant v_1$.

Exemplu. Dacă $\varphi(t) = t^{p-1}$, $(1 < p < +\infty)$, atunci $\psi(s) = s^{q-1}$, $\left(\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1\right)$. În acest caz $\Phi(u) = \frac{1}{p} u^p$ și $\Psi(v) = \frac{1}{q} v^q$. Funcțiile Φ și Ψ verifică, ambele, condiția (Δ).

Dacă $\varphi(t) = 1$ pentru $t \neq 0$, atunci $\psi(s) = 0$ pentru $s \leqslant 1$ și $\psi(s) = +\infty$ pentru $s > 1$. În acest caz $\Phi(u) = u$ și $\Psi(v) = 0$ pentru $v \leqslant 1$ și $\Psi(v) = +\infty$ pentru $v > 1$. Funcția Φ îndeplinește condiția (Δ), dar funcția Ψ nu o îndeplinește.

Propoziția 11. (*Inegalitatea lui Young*). *Dacă Φ și Ψ sînt complementare în sensul lui Young, avem*

$$uv \leqslant \Phi(u) + \Psi(v).$$

pentru orice $u \geqslant 0$ și $v \geqslant 0$. Egalitatea are loc dacă și numai dacă $v = \varphi(u)$ sau $u = \psi(u)$.

Fie $u_0 \geqslant 0$ și $v_0 \geqslant 0$ și să notăm $D = [0, u_0] \times [0, v_0]$. Notînd cu m măsura Lebesgue din plan, avem

$$u_0 v_0 = m(D) = m(D \cap E_1) + m(D \cap E_2) + m(D \cap E_3) =$$

$$= m(D \cap E_1) + m(D \cap E_3) = \int_D \varphi_{E_1} \mathrm{d}m + \int_D \varphi_{E_3} \mathrm{d}m.$$

Folosind teorema lui Fubini, obținem

$$\int_D \varphi_{E_1} \mathrm{d}m = \iint_D \varphi_{E_1}(u, v)\, \mathrm{d}u\, \mathrm{d}v = \int_0^{u_0} \mathrm{d}u \int_0^{v_0} \varphi_{E_1}(u, v)\, \mathrm{d}v =$$

$$= \int_0^{u_0} \mathrm{d}u \int_0^{m(u)} \varphi_{E_1}(u, v)\, \mathrm{d}v,$$

unde $m(u) = \min(v_0, \varphi(u))$, deci

$$\int_D \varphi_{E_1} \mathrm{d}m \leqslant \int_0^{u_0} \mathrm{d}u \int_0^{\varphi(u)} \mathrm{d}v = \int_0^{u_0} \varphi(u)\, \mathrm{d}u = \Phi(u_0)$$

cu egalitate, dacă și numai dacă $v_0 \geqslant \varphi(u_0)$.

În același mod deducem

$$\int_D \varphi_{E_3} \mathrm{d}m \leqslant \Psi(v_0)$$

cu egalitate dacă și numai dacă $u_0 \geqslant \varphi(v_0)$. Așadar

$$u_0 v_0 \leqslant \Phi(u_0) + \Psi(v_0)$$

cu egalitate dacă și numai dacă avem în același timp $v_0 \geqslant \varphi(u_0)$ și $u_0 \geqslant \psi(v_0)$. Dar, conform lemei 1, nu putem avea în același timp $v_0 > \varphi(u_0)$

și $u_0 > \psi(v_0)$, deci egalitatea are loc dacă și numai dacă cel puțin una din egalitățile $v_0 = \varphi(u_0)$ sau $u_0 = \psi(v_0)$ este verificată.

Observație. Dacă $\varphi(t) = t^{p-1}$ cu $1 < p < +\infty$, inegalitatea lui Young are forma

$$uv \leqslant \frac{u^p}{p} + \frac{v^q}{q}, \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1,$$

cu egalitate dacă și numai dacă $v = u^{p-1}$.

3. Seminormele $\|\mathbf{x}\|_\Phi$

În tot restul acestui capitol vom presupune dată o funcție φ pozitivă, crescătoare și continuă la stînga, definită pe $[0, +\infty]$, cu $\varphi(0) = 0$ și

$$0 < \varphi(t) < +\infty \text{ pentru } 0 < t < +\infty$$

și vom considera funcțiile corespunzătoare Φ și Ψ complementare în sensul lui Young.

Funcția Φ este pozitivă, continuă și strict crescătoare pe $[0, +\infty]$ și avem

$$\Phi(0) = 0, \lim_{u \to \infty} \Phi(u) = +\infty$$

și

$$0 < \Phi(u) < +\infty, \text{ pentru } 0 < u < +\infty.$$

Dacă Φ nu îndeplinește condiția (Δ), mulțimea $\mathcal{O}_{\mathcal{A}}^{\Phi}$ nu este un spațiu vectorial. Dar chiar dacă Φ îndeplinește această condiție, aplicația $\mathbf{x} \to |\mathbf{x}|_\Phi$ nu este o seminormă pe acest spațiu.

Pentru orice cîmp de vectori $\mathbf{x} \in \mathcal{C}(\mathcal{L})$ să punem

$$\|\mathbf{x}\|_\Phi = \sup_{|f|_\Psi \leqslant 1} \int^* |\mathbf{x}(t)| \, |f(t)| \, d\mu(t)$$

și

$$\|\mathbf{x}\|_\Psi = \sup_{|f|_\Phi \leqslant 1} \int^* |\mathbf{x}(t)| \, |f(t)| \, d\mu(t),$$

marginile superioare fiind considerate pentru funcții *reale măsurabile* f definite pe T.

În ceele ce urmează, vom studia numai funcția $\|\mathbf{x}\|_\Phi$.

Dacă nu se specifică în mod expres contrariul, proprietățile funcției $\|\mathbf{x}\|_\Phi$ rămîn adevărate și pentru $\|\mathbf{x}\|_\Psi$.

Din proprietățile integralei superioare, rezultă imediat următoarele proprietăți:

1) $0 \leqslant \|\mathbf{x}\|_\Phi \leqslant +\infty$;

2) $\|\alpha\mathbf{x}\|_\Phi = |\alpha| \, \|\mathbf{x}\|_\Phi$;

3) $\|\mathbf{x} + \mathbf{y}\|_\Phi \leqslant \|\mathbf{x}\|_\Phi + \|\mathbf{y}\|_\Phi$.

Propoziția 12. *Pentru orice cîmp* $\mathbf{x} \in \mathcal{C}(\mathcal{L})$ *avem*

$$\|\mathbf{x}\|_\Phi = \sup_K \|\mathbf{x}\varphi_K\|_\Phi, \quad K \text{ compact.}$$

Într-adevăr

$$\|\mathbf{x}\|_\Phi = \sup_h \int^* |\mathbf{x}|\,|h|\,d\mu = \sup_h \sup_K \int^* |\mathbf{x}\varphi_K|\,|h|\,d\mu =$$

$$= \sup_K \sup_h \int^* |\mathbf{x}\varphi_K|\,|h|\,d\mu = \sup \|\mathbf{x}\varphi_K\|_\Phi .$$

Propoziția 13. *Să presupunem că există o familie fundamentală* $\mathcal{A}' \subset \mathcal{C}(\mathcal{L}')$ *de cîmpuri de funcționale continuă, astfel încît funcția scalară* $t \to <\mathbf{x}(t), \mathbf{x}'(t)>$ *să fie continuă oricare ar fi* $\mathbf{x} \in \mathcal{A}$ *și* $\mathbf{x}' \in \mathcal{A}'$. *În acest caz, dacă* $\mathbf{x}$ *este măsurabil (relativ la* $\mathcal{A}$ *și* μ*), avem*

$$\|\mathbf{x}\|_\Phi = \sup_{|\mathbf{x}'|_\Psi \leqslant 1} \int^* |<\mathbf{x}(t), \mathbf{x}'(t)>|\,d\mu(t) = \sup_{|\mathbf{x}'|_\Psi \leqslant 1} \int^* |\mathbf{x}(t)|\,|\mathbf{x}'(t)|\,d\mu(t),$$

iar dacă $\mathbf{x}$ *este măsurabil și* $\|\mathbf{x}\|_\Phi < +\infty$, *atunci*

$$\|\mathbf{x}\|_\Phi = \sup_{|\mathbf{x}'|_\Psi \leqslant 1} \left| \int <\mathbf{x}(t), \mathbf{x}'(t)>\, d\mu(t) \right| .$$

Avem în primul rînd :

$$\sup_{|\mathbf{x}'|_\Psi \leqslant 1} \int^* |<\mathbf{x}(t), \mathbf{x}'(t)>|\,d\mu(t) \leqslant \sup_{|\mathbf{x}'|_\Psi \leqslant 1} \int^* |\mathbf{x}|\,|\mathbf{x}'|\,d\mu \leqslant \|\mathbf{x}\|_\Phi$$

chiar dacă $\mathbf{x}$ nu este măsurabil. Să presupunem că $\mathbf{x}$ este măsurabil și să demonstrăm inegalitatea

$$\|\mathbf{x}\|_\Phi \leqslant \sup_{|\mathbf{x}'|_\Psi \leqslant 1} \int^* |<\mathbf{x}(t), \mathbf{x}'(t)>|\,d\mu(t).$$

Fie $f \in O^\Psi$ cu $|f|_\Phi \leqslant 1$. Fie $0 < a < 1$. Deoarece $\mathbf{x}$ este măsurabil, există un cîmp măsurabil $\mathbf{y}' \in \mathcal{C}(\mathcal{L}')$ astfel încît

$$a|\mathbf{x}(t)| \leqslant |<\mathbf{x}(t), \mathbf{y}'(t)>| \text{ și } a \leqslant |\mathbf{y}'(t)| \leqslant 2 - a$$

aproape peste tot pe T. Cîmpul de funcționale

$$\mathbf{x}'(t) = \frac{|f(t)|}{2-a}\,\mathbf{y}'(t)$$

este măsurabil și $|\mathbf{x}'(t)| \leqslant \mathbf{y}'(t)$ aproape peste tot, deci $|\mathbf{x}'|_\Psi \leqslant 1$. Avem apoi

$$|<\mathbf{x}(t), \mathbf{x}'(t)>| = \left| <\mathbf{x}(t), \frac{|f(t)|}{2-a}\,\mathbf{y}'(t)> \right| \geqslant \frac{a}{2-a}\,|\mathbf{x}(t)|\,|f(t)|$$

aproape peste tot, deci

$$\|\mathbf{x}\|_\Phi = \sup_{|f|_\Psi \leqslant 1} \int^* |\mathbf{x}|\,|f|\,d\mu \leqslant \frac{2-a}{a} \sup_{|\mathbf{x}'|_\Psi \leqslant 1} \int^* |<\mathbf{x}(t),\ \mathbf{x}'(t)>|\,d\mu(t).$$

Făcînd $a \to 1$ obținem inegalitatea dorită și prima serie de egalități este demonstrată.

Să presupunem acum că $\mathbf{x}$ este măsurabil și $\|\mathbf{x}\|_\Phi < +\infty$. Atunci funcția $t \to <\mathbf{x}(t), \mathbf{x}'(t)>$ este integrabilă, oricare ar fi $\mathbf{x}' \in O^\Psi_{\mathcal{A}'}$ cu $|\mathbf{x}'| \leqslant 1$. Dacă punem pentru fiecare $\mathbf{y}' \in O^\Psi_{\mathcal{A}'}$ cu $|\mathbf{y}'|_\Psi \leqslant 1$

$$<\mathbf{x}(t),\ \mathbf{y}'(t)> = \rho(t)\, e^{i\theta(t)},$$

unde se ia $e^{i\theta(t)} = 1$ dacă $\rho(t) = 0$, atunci funcțiile $\rho(t)$ și $e^{i\theta(t)}$ sînt măsurabile iar cîmpul $\mathbf{x}'(t) = \dfrac{\mathbf{y}'(t)}{e^{i\theta(t)}}$ este măsurabil și $|\mathbf{x}'(t)| = |\mathbf{y}'(t)|$, deci $|\mathbf{x}'|_\Psi \leqslant 1$; urmează că

$$<\mathbf{x}(t),\ \mathbf{x}'(t)> = \rho(t) = |<\mathbf{x}(t),\ \mathbf{y}'(t)>|$$

de unde rezultă și a doua egalitate.

Propoziția 14. *Un cîmp* $\mathbf{x} \in \mathcal{C}(\mathcal{L})$ *este neglijabil dacă și numai dacă* $\|\mathbf{x}\|_\Phi = 0$.

Dacă $\mathbf{x}$ este neglijabil, atunci funcția $|\mathbf{x}||f|$ este neglijabilă oricare ar fi funcția reală f, deci $\|\mathbf{x}\|_\Phi = 0$. Reciproc, să presupunem că $\|\mathbf{x}\|_\Phi = 0$. Aceasta înseamnă că

$$\int^* |\mathbf{x}|\,|f|\,d\mu = 0$$

pentru orice funcție $f \in O^\Psi$ cu $|f|_\Psi \leqslant 1$.

Fie $K \subset T$ o mulțime compactă. Deoarece $\lim_{v \to 0} \Psi(v) = 0$, există un număr $p > 0$ cu $\mu(K)\,\Psi(p) \leqslant 1$.

Fie $f \in O^\Psi$. Să definim funcția h pe T astfel:

$$h(t) = \begin{cases} p \text{ pentru } t \in K, \\ 0 \text{ pentru } t \notin K \end{cases}$$

Funcția h este măsurabilă și $\int \Psi(|h(t)|)\,d\mu(t) = \Psi(p)\,\mu(K) \leqslant 1$ deci $\int^* |\mathbf{x}|\,|h|\,d\mu = 0$. Dar

$$\int^* |\mathbf{x}|\,|h|\,d\mu = p \int_K^* |\mathbf{x}|\,d\mu.$$

deci $\mathbf{x}\varphi_K$ este un cîmp neglijabil. Cum K este o mulțime compactă oarecare, urmează că $\mathbf{x}$ este neglijabil.

4. Spațiile $\mathcal{L}^{\Phi}_{\mathcal{A}}$

Vom nota cu $\mathcal{L}^{\Phi}_{\mathcal{A}}$ mulțimea cîmpurilor de vectori *măsurabilă* $\mathbf{x} \in \mathcal{C}(\mathcal{E})$ cu $\|\mathbf{x}\|_{\Phi} < +\infty$, și cu $L^{\Phi}_{\mathcal{A}}$ spațiul cît al lui $\mathcal{L}^{\Phi}_{\mathcal{A}}$ prin subspațiul cîmpurilor neglijabile.

Propoziția 15. *Mulțimea* $\mathcal{L}^{\Phi}_{\mathcal{A}}$ *este un spațiu vectorial iar* $\|\mathbf{x}\|_{\Phi}$ *este o seminormă pe acest spațiu.*

Afirmația rezultă imediat din proprietățile funcției $\|\mathbf{x}\|_{\Phi}$.

Spațiile $\mathcal{L}^{\Phi}_{\mathcal{A}}$ vor fi numite spații Orlicz *).

Propoziția 16. *Avem* $O^{\Phi}_{\mathcal{A}} \subset \mathcal{L}^{\Phi}_{\mathcal{A}}$ *și*

$$\|\mathbf{x}\|_{\Phi} \leqslant |\mathbf{x}|_{\Phi} + 1, \text{ pentru orice } \mathbf{x} \in O^{\Phi}_{\mathcal{A}}.$$

Pentru $\mathbf{x} \in \mathcal{C}(\mathcal{E})$ și $f : T \to R$, inegalitatea lui Young se scrie

$$|\mathbf{x}(t)|\,|f(t)| \leqslant \Phi(|\mathbf{x}(t)|) + \Psi(|f(t)|)$$

și dacă $\mathbf{x} \in O^{\Phi}_{\mathcal{A}}$ și $f \in O^{\Psi}$, atunci

$$\int^{*} |\mathbf{x}(t)|\,|f(t)|\,\mathrm{d}\mu(t) \leqslant |\mathbf{x}|_{\Phi} + |f|_{\Psi}.$$

Luînd în partea stîngă marginea superioară pentru $|f|_{\Psi} \leqslant 1$, obținem

$$\|\mathbf{x}\|_{\Phi} \leqslant |\mathbf{x}|_{\Phi} + 1$$

deci $\mathbf{x} \in \mathcal{L}^{\Phi}_{\mathcal{A}}$, și deci $O^{\Phi}_{\mathcal{A}} \subset \mathcal{L}^{\Phi}_{\mathcal{A}}$.

Observație. În general avem $O^{\Phi}_{\mathcal{A}} \neq \mathcal{L}^{\Phi}_{\mathcal{A}}$. Totuși, din orice cîmp $\mathbf{x} \in \mathcal{L}^{\Phi}_{\mathcal{A}}$ obținem un cîmp din $O^{\Phi}_{\mathcal{A}}$, prin înmulțire cu o constantă convenabilă, așa cum se arată în teorema 1. Vom demonstra mai întîi lema următoare :

Lema 3. *Dacă* $q \geqslant 1$ *și* $v \geqslant 0$ *atunci* $q\Psi(v) \leqslant \Psi(qv)$ *și* $q\Phi(v) \leqslant \Phi(qv)$.

Într-adevăr,

$$\Psi(qv) - \Psi(v) = \int_{v}^{qv} \psi(s)\,\mathrm{d}s \geqslant (q-1)\,v\psi(v) = (q-1)\int_{0}^{v} \psi(s)\,\mathrm{d}s \geqslant$$

$$\geqslant (q-1)\int_{0}^{v} \psi(s)\,\mathrm{d}s = (q-1)\,\Psi(v),$$

de unde rezultă $q\,\Psi(v) \leqslant \Psi(qv)$. La fel se demonstrează inegalitatea relativă la Φ.

*) Orlicz a introdus spațiile care-i poartă numele, formate din funcții numerice definite pe un segment.

Teorema 1. *Dacă* $x \in \mathcal{L}^{\Phi}_{\mathcal{A}}$ *și dacă* $\|x\|_{\Phi} \neq 0$, *atunci*

$$\left| \frac{|x|}{\|x\|_{\Phi}} \right|_{\Phi} \leqslant 1.$$

Fie $x \in \mathcal{L}^{\Phi}_{\mathcal{A}}$ cu $\|x\| \neq 0$ și $h \in O^{\Psi}$. Dacă $|h|_{\Psi} \leqslant 1$, avem

$$\int |x|\,|h|\,d\mu \leqslant \|x\|_{\Phi}.$$

Dacă $|h|_{\Psi} > 1$, avem, în baza lemei 3,

$$\Psi\left(\frac{|h(t)|}{|h|_{\Psi}}\right) \leqslant \frac{1}{|h|_{\Psi}} \Psi(|h(t)|)$$

și deci $\left| \frac{h}{|h|_{\Psi}} \right| \leqslant 1$. Urmează că, în acest caz,

$$\int |x| \frac{|h|}{|h|_{\Psi}}\,d\mu \leqslant \|x\|_{\Phi}$$

adică

$$\int |x|\,|h|\,d\mu \leqslant \|x\|_{\Phi} |h|_{\Psi}.$$

Dacă punem $\rho(h) = \max(1, |h|_{\Psi})$, avem, pentru orice $h \in O^{\Psi}$,

$$\int |x|\,|h|\,d\mu \leqslant \|x\|_{\Phi}\, \rho(h).$$

Să presupunem întîi că x este mărginit și nul în afara unei mulțimi compacte $K \subset T$.

Funcțiile mărginite $\Phi\left(\frac{|x(t)|}{\|x\|_{\Phi}}\right)$ și $\Psi\left(\varphi\left(\frac{|x(t)|}{\|x\|_{\Phi}}\right)\right)$ sînt integrabile.

Să considerăm funcția măsurabilă h definită pe T prin egalitatea $h(t) = \varphi\left(\frac{|x(t)|}{\|x\|_{\Phi}}\right)$. Luînd în inegalitatea lui Young $u = \frac{|x(t)|}{\|x\|_{\Phi}}$ și $v = h(t)$, și observînd că în acest caz inegalitea lui Young este verificată cu egalitate, obținem

$$\rho(h) \geqslant \int \frac{|x|}{\|x\|_{\Phi}} h\,d\mu = \int \Phi\left(\frac{|x(t)|}{\|x\|_{\Phi}}\right) d\mu + \int \Psi(h(t))\,d\mu = \left|\frac{x}{\|x\|_{\Phi}}\right|_{\Phi} + |h|_{\Psi}$$

și deci

$$\left|\frac{x}{\|x\|_{\Phi}}\right|_{\Phi} \leqslant \rho(h) - |h|_{\Psi}.$$

Dacă $|h|_\Psi \geqslant 1$, atunci $\rho(h) = |h|_\Psi$ și deci $\left|\frac{\mathbf{x}}{\|\mathbf{x}\|_\Phi}\right|_\Phi = 0$. Dacă $|h|_\Psi < 1$, atunci $\rho(h) = 1$, deci $\left|\frac{\mathbf{x}}{\|\mathbf{x}\|_\Phi}\right|_\Phi \leqslant 1 - |h|_\Psi \leqslant 1$.

Dacă x nu este mărginit (dar este nul în afara mulțimii compacte $K \subset T$), pentru fiecare n definim cîmpul $\mathbf{x}_n$ prin egalitatea

$$\mathbf{x}_n(t) = \begin{cases} \mathbf{x}(t), & \text{dacă } |\mathbf{x}(t)| \leqslant n, \\ n\dfrac{\mathbf{x}(t)}{|\mathbf{x}(t)|} & \text{dacă } |\mathbf{x}(t)| > n. \end{cases}$$

Șirul $(|\mathbf{x}_n|)$ este crescător și converge către $|\mathbf{x}|$ iar $\|\mathbf{x}_n\|_\Phi \leqslant \|\mathbf{x}\|_\Phi$, deci, dacă $\|\mathbf{x}_n\|_\Phi \neq 0$, atunci

$$\frac{|\mathbf{x}_n|}{\|\mathbf{x}\|_\Phi} \leqslant \frac{|\mathbf{x}_n|}{\|\mathbf{x}_n\|_\Phi},$$

de unde

$$\left|\frac{\mathbf{x}_n}{\|\mathbf{x}\|_\Phi}\right|_\Phi \leqslant \left|\frac{\mathbf{x}_n}{\|\mathbf{x}_n\|_\Phi}\right|_\Phi \leqslant 1.$$

Deoarece funcția Φ este continuă și crescătoare, deducem

$$\Phi\left(\frac{|\mathbf{x}(t)|}{\|\mathbf{x}\|_\Phi}\right) = \lim_{n\to\infty} \Phi\left(\frac{|\mathbf{x}_n(t)|}{\|\mathbf{x}\|_\Phi}\right) = \sup_n \Phi\left(\frac{|\mathbf{x}_n(t)|}{\|\mathbf{x}\|_\Phi}\right)$$

pentru fiecare $t \in T$, de unde, șirul $\Phi\left(\frac{|\mathbf{x}_n(t)|}{\|\mathbf{x}\|_\Phi}\right)$ fiind crescător pentru fiecare $t \in T$, deducem

$$\int \Phi\left(\frac{|\mathbf{x}(t)|}{\|\mathbf{x}\|_\Phi}\right) d\mu = \sup \int \Phi\left(\frac{|\mathbf{x}_n(t)|}{\|\mathbf{x}\|_\Phi}\right) d\mu$$

deci

$$\left|\frac{\mathbf{x}}{\|\mathbf{x}\|_\Phi}\right|_\Phi \leqslant 1.$$

Să presupunem acum că x este oarecare, cu $\|\mathbf{x}\|_\Phi \neq 0$. Pentru fiecare mulțime compactă $K \subset T$ avem

$$\left|\frac{\mathbf{x}\varphi_K}{\|\mathbf{x}\|_\Phi}\right|_\Phi \leqslant 1.$$

Într-adevăr, dacă $\|\mathbf{x}\varphi_K\|_\Phi = 0$, $\mathbf{x}\varphi_K$ este neglijabil și inegalitatea este evidentă. Dacă $\|\mathbf{x}\varphi_K\|_\Phi \neq 0$, inegalitatea dorită rezultă din inegalitatea

$$\frac{|\mathbf{x}\varphi_K|}{\|\mathbf{x}\varphi_K\|_\Phi} \leqslant \frac{|\mathbf{x}\varphi_K|}{\|\mathbf{x}\|_\Phi}.$$

Cum avem

$$\left|\frac{\mathbf{x}}{\|\mathbf{x}\|_\Phi}\right|_\Phi = \sup_K \left|\frac{\mathbf{x}\varphi_K}{\|\mathbf{x}\|_\Phi}\right|_\Phi, \quad K \text{ compact},$$

deducem și în acest caz $\left|\frac{\mathbf{x}}{\|\mathbf{x}\|_\Phi}\right|_\Phi \leqslant 1$ și teorema este demonstrată.

Observație. Teorema rămîne adevărată și pentru $\mathcal{L}^\Psi_{\mathcal{A}}$, însă în cazul cînd $\lim_{t\to\infty} \varphi(t) = l < +\infty$, deci $\Psi(v) = +\infty$ pentru $v > l$, prima parte a teoremei necesită o demonstrație separată.

Să observăm că dacă $\mathbf{x} \in \mathcal{L}^\Psi_{\mathcal{A}}$, atunci $\frac{|\mathbf{x}(t)|}{\|\mathbf{x}\|_\Psi} \leqslant l$ aproape peste tot. Într-adevăr, dacă ar exista o mulțime integrabilă $A \subset T$ cu $\mu(A) > 0$, astfel încît $|\mathbf{x}(t)| > l\|\mathbf{x}\|_\Psi$ pentru orice $t \in A$, atunci, punînd $h = \frac{1}{l\mu(A)}\varphi_A$ și observînd că $\Phi(u) \leqslant lu$, am avea

$$|h|_\Phi = \int \Phi(h(t))\,d\mu(t) = \Phi\left(\frac{1}{l\mu(A)}\right)\mu(A) \leqslant 1$$

deci

$$\int |\mathbf{x}|\,h\,d\mu = \frac{1}{l\mu(A)}\int |\mathbf{x}|\varphi_A\,d\mu \geqslant \|\mathbf{x}\|_\Psi$$

ceea ce este imposibil. Așadar, avem $\frac{|\mathbf{x}(t)|}{\|\mathbf{x}\|_\Psi} \leqslant l$ aproape peste tot. Să presupunem întîi că $\mathbf{x} \in \mathcal{L}^\Psi_{\mathcal{A}}$ este nul în afara unei mulțimi integrabile $A \subset T$ și că $\|\mathbf{x}\|_\Psi \neq 0$ și să alegem $0 < \delta < 1$. Atunci $\Psi\left(\frac{\delta|\mathbf{x}(t)|}{\|\mathbf{x}\|_\Psi}\right)$ și $\Phi\left(\psi\left(\frac{|\mathbf{x}(t)|}{\|\mathbf{x}\|_\Psi}\right)\right)$ sînt mărginite și nule în afara mulțimii A, deci sînt integrabile. Să punem $h(t) = \psi\left(\delta\frac{|\mathbf{x}(t)|}{\|\mathbf{x}\|_\Psi}\right)\varphi_A(t)$. Se arată ca și la începutul teoremei 1 că

$$\int |\mathbf{x}|\,h\,d\mu \leqslant \|\mathbf{x}\|_\Psi\,\pi(h),$$

unde $\pi(h) = \max(1, |h|_\Phi)$. Putem deci scrie

$$\delta\pi(h) \geqslant \int \frac{\delta|\mathbf{x}(t)|}{\|\mathbf{x}\|_\Psi} h(t)\,d\mu(t) = \int \Psi\left(\frac{\delta|\mathbf{x}(t)|}{\|\mathbf{x}\|_\Psi}\right)d\mu(t) + |h|_\Phi$$

deoarece inegalitatea lui Young devine egalitate. Atunci

$$|h|_\Phi \leqslant \delta\pi(h) < \pi(h) \text{ deci } \pi(h) = 1 \text{ deci } \frac{\delta|\mathbf{x}|}{\|\mathbf{x}\|_\Psi} \leqslant \delta < 1.$$

Făcînd $\delta \to 1$ și observînd că Ψ este continuă la stînga în punctul $v=l$, obținem $\left|\frac{\mathbf{x}}{\|\mathbf{x}\|_\Psi}\right|_\Psi \leqslant 1$. Pentru cazul cînd $\mathbf{x}$ este oarecare, se observă că

$$\left|\frac{\mathbf{x}}{\|\mathbf{x}\|_\Psi}\right|_\Psi = \sup_K \left|\frac{\mathbf{x}\varphi_K}{\|\mathbf{x}\|_\Psi}\right|_\Psi, \quad K \text{ compact}$$

și se raționează ca și în demonstrația teoremei.

Propoziția 17. *Dacă* $\mathbf{x} \in \mathcal{L}^\Phi_{\mathcal{A}}$, *atunci* $\mathbf{x}$ *se anulează aproape peste tot pe complementara reuniunii unui șir de mulțimi compacte.*

Dacă $\|\mathbf{x}\|_\Phi = 0$, $\mathbf{x}$ este neglijabil. Să presupunem deci că $\|\mathbf{x}\|_\Phi \neq 0$. Atunci

$$\int \Phi\left(\frac{|\mathbf{x}(t)|}{\|\mathbf{x}\|_\Phi}\right) \mathrm{d}\mu(t) \leqslant 1 < +\infty.$$

Urmează că $\Phi\left(\frac{|\mathbf{x}(t)|}{\|\mathbf{x}\|_\Phi}\right) = 0$ și deci $|\mathbf{x}(t)| = 0$ pe complementara reuniunii unui șir de mulțimi compacte și a unei mulțimi neglijabile.

Observație. Dacă $\Psi(v) > 0$ pentru $v > 0$, propoziția rămîne adevărată și pentru $\mathbf{x} \in \mathcal{L}^\Psi_{\mathcal{A}}$.

Dacă însă $\Psi(v_0) = 0$ pentru un $v_0 > 0$, putem avea $\|\mathbf{x}\|_\Psi < +\infty$ fără ca $\mathbf{x}$ să se anuleze în vreun punct, de exemplu dacă $|\mathbf{x}(t)| < v_0$ pentru orice $t \in T$.

Teorema 2. *Spațiul* $\mathcal{L}^\Phi_{\mathcal{A}}$ *este complet.*

Fie $(\mathbf{x}_n)$ un șir Cauchy de cîmpuri din $\mathcal{L}^\Phi_{\mathcal{A}}$. Pentru orice $\varepsilon > 0$ există un număr $N(\varepsilon)$ astfel încît

$$\int |\mathbf{x}_n(t) - \mathbf{x}_m(t)|\,|h(t)|\,\mathrm{d}\mu(t) < \varepsilon$$

oricare ar fi n, $m \geqslant N(\varepsilon)$ și $h \in O^\Psi$ cu $|h|_\Psi \leqslant 1$.

Fie $K \subset T$ o mulțime compactă. Există un număr $p > 0$ astfel încît $\mu(K)\Psi(p) \leqslant 1$. Dacă luăm $h = p\varphi_K$, avem $|h|_\Psi \leqslant 1$ deci

$$\int |\mathbf{x}_n(t) - \mathbf{x}_m(t)|\,|h(t)|\,\mathrm{d}\mu(t) = p\int_K |\mathbf{x}_n(t) - \mathbf{x}_m(t)|\,\mathrm{d}\mu(t) < \varepsilon$$

pentru n, $m \geqslant N(\varepsilon)$, deci

$$\lim_{\substack{n\to\infty \\ m\to\infty}} \int |\mathbf{x}_n \varphi_K - \mathbf{x}_m \varphi_K|\,\mathrm{d}\mu = 0.$$

Așadar, $(\mathbf{x}_n \varphi_K)$ este un șir Cauchy în spațiul Banach $\mathcal{L}^1_{\mathcal{A}}(K)$ al cîmpurilor integrabile, nule în afara lui K. Urmează că există un cîmp

$\mathbf{x}_K \in \mathcal{L}^1_{\mathcal{A}}(K)$, unic determinat aproape peste tot pe K, către care șirul $(\mathbf{x}_n \varphi_K)$ tinde în topologia spațiului $\mathcal{L}^1_{\mathcal{A}}(K)$. Există de asemenea un subșir $(\mathbf{x}_{n_p})$ al șirului $(\mathbf{x}_n)$, convergent către $\mathbf{x}_K$, aproape peste tot pe K. Dacă în inegalitatea

$$\int_K |\mathbf{x}_n(t) - \mathbf{x}_m(t)|\,|h(t)|\,d\mu(t) < \varepsilon,$$

valabilă pentru $n, m > N(\varepsilon)$ și $|h|_\Psi \leqslant 1$, facem pe m să parcurgă șirul (n_p) de indici obținem

$$\int |\mathbf{x}_n \varphi_K - \mathbf{x}_K|\,|h|\,d\mu < \varepsilon \text{ pentru } n \geqslant N(\varepsilon) \text{ și } |h|_\Psi \leqslant 1,$$

de unde $\|\mathbf{x}_n \varphi_K - \mathbf{x}_K\|_\Phi \leqslant \varepsilon$ pentru $n \geqslant N(\varepsilon)$.

Urmează întîi că $\mathbf{x}_n \varphi_K - \mathbf{x}_K \in \mathcal{L}^\Phi_{\mathcal{A}}$ și deci $\mathbf{x}_K \in \mathcal{L}^\Phi_{\mathcal{A}}$, deoarece $\mathbf{x}_n \varphi_K \in \mathcal{L}^\Phi_{\mathcal{A}}$. Deducem apoi că $\|\mathbf{x}_n \varphi_K - \mathbf{x}_K\|_\Phi \to 0$. Se observăm că pentru două mulțimi compacte K_1 și K_2 cărora le corespund, ca mai sus, cîmpurile $\mathbf{x}_{K_1}$ și $\mathbf{x}_{K_2}$, avem $\mathbf{x}_{K_1}(t) = \mathbf{x}_{K_2}(t)$, aproape peste tot pe $K_1 \cap K_2$. Într-adevăr, notînd $K = K_1 \cap K_2$, avem $\mathbf{x}_n \varphi_{K_1} \to \mathbf{x}_{K_1}$ deci $\mathbf{x}_n \varphi_K \to \mathbf{x}_{K_1} \varphi_K$ în topologia spațiului $\mathcal{L}^1_{\mathcal{A}}(K_1)$ iar pe de altă parte $\mathbf{x}_n \varphi_K \to \mathbf{x}_K$ în topologia spațiului $\mathcal{L}^1_{\mathcal{A}}(K) \subset \mathcal{L}^1_{\mathcal{A}}(K_1)$. Urmează că $\mathbf{x}_{K_1} \varphi_K = \mathbf{x}_K$ aproape peste tot. La fel se arată că $\mathbf{x}_{K_2} \varphi_K = \mathbf{x}_K$ aproape peste tot. Urmează atunci că $\mathbf{x}_{K_1} \varphi_K = \mathbf{x}_{K_2} \varphi_K$ aproape peste tot.

Conform propoziției lui Godement (prop. 10, § 11) există un cîmp măsurabil $\mathbf{x} \in \mathcal{C}(\mathcal{E})$ astfel încît, pentru fiecare mulțime compactă $K \subset T$, avem $\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}_K(t)$, aproape peste tot pe K. Așadar $\|\mathbf{x}_n \varphi_K - \mathbf{x} \varphi_K\|_\Phi \to 0$ pentru orice mulțime compactă $K \subset T$. Cum șirul $(\|\mathbf{x}_n\|_\Phi)$ de numere reale este un șir Cauchy, este mărginit de un număr M. Pentru fiecare mulțime compactă $K \subset T$ avem $\|\mathbf{x} \varphi_K\|_\Phi = \lim_{n \to \infty} \|\mathbf{x}_n \varphi_K\|_\Phi \leqslant M$. Urmează că

$$\|\mathbf{x}\|_\Phi = \sup_K \|\mathbf{x} \varphi_K\|_\Phi \leqslant M < +\infty,$$

deci $\mathbf{x} \in \mathcal{L}^\Phi_{\mathcal{A}}$. Pe de altă parte dacă în inegalitatea

$$\|\mathbf{x}_n \varphi_K - \mathbf{x}_m \varphi_K\|_\Phi \leqslant \varepsilon$$

valabilă pentru $n, m \geqslant N(\varepsilon)$ și orice mulțime compactă $K \subset T$ facem $m \to \infty$, deducem $\|\mathbf{x}_n \varphi_K - \mathbf{x} \varphi_K\|_\Phi \leqslant \varepsilon$ pentru $n \geqslant N(\varepsilon)$ și orice mulțime compactă $K \subset T$, deci

$$\|\mathbf{x}_n - \mathbf{x}\|_\Phi = \sup_K \|\mathbf{x}_n \varphi_K - \mathbf{x} \varphi_K\|_\Phi \leqslant \varepsilon, \text{ pentru } n \geqslant N(\varepsilon).$$

Urmează că $\|\mathbf{x}_n - \mathbf{x}\|_\Phi \to 0$, și cu aceasta teorema este complet demonstrată.

Propoziția 18. *Un cîmp măsurabil* $\mathbf{x} \in \mathcal{C}(\mathcal{L})$ *aparține spațiului* $\mathcal{L}^{\Phi}_{\mathcal{A}}$, *dacă și numai dacă* $\mathbf{x}h \in \mathcal{L}^{1}_{\mathcal{A}}$, *oricare ar fi funcția* $h \in \mathcal{L}^{\Psi}_{\mathcal{A}}$. *Avem*

$$\int |\mathbf{x}|\,|h|\,d\mu \leqslant \|\mathbf{x}\|_{\Phi}\,\|h\|_{\Psi}.$$

Să presupunem întîi că $\mathbf{x} \in \mathcal{L}^{\Phi}_{\mathcal{A}}$. Fie $h \in \mathcal{L}^{\Psi}$. Dacă $\|\mathbf{x}\|_{\Phi} = 0$, cîmpul $\mathbf{x}$ este neglijabil, deci cîmpul $\mathbf{x}h$ este neglijabil, deci $\mathbf{x}h \in \mathcal{L}^{1}_{\mathcal{A}}$ și inegalitatea din enunț este verificată. Dacă $\|\mathbf{x}\|_{\Psi} \neq 0$, avem $\left|\dfrac{\mathbf{x}}{\|\mathbf{x}\|_{\Phi}}\right|_{\Phi} \leqslant 1$. Deoarece

$$\|h\|_{\Psi} = \sup_{|f|_{\Phi} \leqslant 1} \int^{*} |f|\,|h|\,d\mu < +\infty$$

luînd în particular $f = \dfrac{|\mathbf{x}|}{\|\mathbf{x}\|_{\Phi}}$, obținem

$$\int^{*} \frac{|\mathbf{x}|}{\|\mathbf{x}\|_{\Phi}}\,|h|\,d\mu \leqslant \|h\|_{\Psi},$$

de unde

$$\int^{*} |\mathbf{x}|\,|h|\,d\mu \leqslant \|\mathbf{x}\|_{\Phi}\,\|h\|_{\Psi} < +\infty.$$

Urmează de aici că $\mathbf{x}h \in \mathcal{L}^{1}_{\mathcal{A}}$.

Reciproc, să presupunem că $\mathbf{x}$ este măsurabil și că $\mathbf{x}h \in \mathcal{L}^{1}_{\mathcal{A}}$ oricare ar fi $h \in \mathcal{L}^{\Psi}$. Pentru a arăta că $\mathbf{x} \in \mathcal{L}^{\Phi}_{\mathcal{A}}$ este suficient să arătăm că $\|\mathbf{x}\|_{\Phi} < \infty$.

Să presupunem, prin absurd, că $\|\mathbf{x}\|_{\Phi} = +\infty$. Deoarece

$$\|\mathbf{x}\|_{\Phi} = \sup_{|h|_{\Psi} \leqslant 1} \int^{*} |\mathbf{x}|\,|h|\,d\mu.$$

există un șir (h_n) de funcții pozitive măsurabile, cu $|h_n|_{\Psi} \leqslant 1$, astfel încît, pentru fiecare, n să avem

$$\int |\mathbf{x}|\,h_n\,d\mu > n^3.$$

Să punem $h = \sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^2} h_n$. Deoarece $\|h_n\|_{\Psi} \leqslant |h_n|_{\Psi} + 1 \leqslant 2$ pentru fiecare n, deducem

$$\|h\|_{\Psi} \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}\,\|h_n\|_{\Psi} < +\infty,$$

deci $h \in \mathcal{L}^{\Psi}$. Deoarece $h \geqslant \frac{1}{n^2} h_n$ pentru fiecare n, avem

$$\int^* |x| h \, d\mu \geqslant \frac{1}{n^2} \int^* |x| h \, d\mu > n$$

pentru fiecare n, deci

$$\int^* |x| h \, d\mu = +\infty,$$

adică xh nu este integrabil, și am ajuns la o contradicție.

Urmează deci că $\|x\|_{\Phi} < +\infty$ deci $x \in \mathcal{L}^{\Phi}_{\mathcal{A}}$ și propoziția este demonstrată.

Propoziția 19. *Să presupunem că există o familie fundamentală* $\mathcal{A}' \subset \mathcal{C}(\mathcal{L}')$ *astfel încît funcția scalară* $t \to < x(t), x'(t) >$ *este continuă, oricare ar fi* $x \in \mathcal{A}$ *și* $x' \in \mathcal{A}'$. *Un cîmp măsurabil* $x \in \mathcal{C}(\mathcal{L})$ *aparține spațiului* $\mathcal{L}^{\Phi}_{\mathcal{A}}$, *dacă și numai dacă funcția scalară* $t \to < x(t), x' t) >$ *este sumabilă pentru orice* $x' \in \mathcal{L}^{\Psi}_{\mathcal{A}'}$. *Avem*

$$\int | < x(t), x'(t) > | \, d\mu(t) \leqslant \int |x(t)| \, |x'(t)| \, d\mu(t) \leqslant \|x\|_{\Phi} \, \|x'\|_{\Psi}.$$

Fie, în primul rînd, $x \in \mathcal{L}^{\Phi}_{\mathcal{A}}$ și $x' \in \mathcal{L}^{\Psi}_{\mathcal{A}'}$. Dacă $\|x\|_{\Phi} = 0$, x este neglijabil, deci $< x(t), x'(t) >$ este neglijabilă, oricare ar fi $x' \in \mathcal{L}^{\Psi}_{\mathcal{A}'}$, și inegalitatea din enunț este verificată. Dacă $\|x\|_{\Phi} \neq 0$, avem

$$\int^* | < x(t), x'(t) > | \, d\mu(t) \leqslant \int^* |x(t)| \, |x'(t)| \, d\mu(t) =$$

$$= \|x\|_{\Phi} \int^* \frac{|x(t)|}{\|x\|_{\Phi}} \, |x'(t)| \, d\mu(t) \leqslant \|x\|_{\Phi} \, \|x'\|_{\Psi} < +\infty$$

deoarece $\left| \frac{x}{\|x\|_{\Phi}} \right|_{\Phi} \leqslant 1$. Urmează că $< x(t), x'(t) >$ este integrabilă.

Reciproc, să presupunem că x este măsurabil și că funcția $< x(t), x'(t) >$ este integrabilă, oricare ar fi $x' \in \mathcal{L}^{\Psi}_{\mathcal{A}'}$. Trebuie să arătăm că $\|x\|_{\Phi} < +\infty$.

Să presupunem, prin absurd, că $\|x\|_{\Phi} = +\infty$. Conform propoziției 18 există o funcție pozitivă $h \in \mathcal{L}^{\Psi}$ astfel încît să avem

$$\int^* |x| h \, d\mu = +\infty.$$

Pentru orice $0 < a < 1$, există un cîmp de funcționale măsurabil $\mathbf{x}' \in \mathcal{C}(\mathcal{L}')$ astfel încît

$$a\,|\mathbf{x}(t)| \leqslant |<\mathbf{x}(t),\ \mathbf{x}'(t)>| \text{ și } a \leqslant |\mathbf{x}'(t)| \leqslant 2 - a$$

aproape peste tot. Să punem $\mathbf{y}' = \frac{\mathbf{x}}{2-a}h$. Atunci $|\mathbf{y}'(t)| = \frac{|\mathbf{x}'(t)|}{2-a}h(t) \leqslant$ $\leqslant h(t)$, deci $\|\mathbf{y}'\|_\Psi \leqslant \|h\|_\Psi < +\infty$ adică $\mathbf{y}' \in \mathcal{L}^\Psi_{\mathcal{A}'}$. Dar

$$|<\mathbf{x}(t),\ \mathbf{y}'(t)>| = \frac{h(t)}{2-a}|<\mathbf{x}(t),\ \mathbf{x}'(t)>| \geqslant \frac{a}{2-a}|\mathbf{x}(t)|\,h(t),$$

și deci

$$\int^* |<\mathbf{x}(t),\ \mathbf{y}'(t)>|\,\mathrm{d}\mu(t) \geqslant \frac{a}{2-a}\int^* |\mathbf{x}(t)|\,h(t)\,\mathrm{d}\mu(t) = +\infty$$

și am ajuns la o contradicție. Urmează deci că $\mathbf{x} \in \mathcal{L}^\Phi_{\mathcal{A}}$ și propoziția este demonstrată.

În anumite cazuri avem $\mathcal{L}^\Phi_{\mathcal{A}} = O^\Phi_{\mathcal{A}}$.

Propoziția 20. *Dacă există un număr M astfel încît să avem $\Phi(2u) \leqslant M\,\Phi(u)$ pentru $u \geqslant 0$, atunci spațiile $O^\Phi_{\mathcal{A}}$ și $\mathcal{L}^\Phi_{\mathcal{A}}$ conțin aceleași elemente.*

Deoarece $O^\Phi_{\mathcal{A}} \subset \mathcal{L}^\Phi_{\mathcal{A}}$, este suficient, în acest caz, să demonstrăm incluziunea contrară. Fie $\mathbf{x} \in \mathcal{L}^\Phi_{\mathcal{A}}$. Dacă $\|\mathbf{x}\|_\Phi = 0$, atunci $\mathbf{x}$ este neglijabil, deci $|\mathbf{x}|_\Phi = 0$ și deci $\mathbf{x} \in O^\Phi_{\mathcal{A}}$. Dacă $\|\mathbf{x}\|_\Phi \neq 0$, atunci (teorema 1) avem $\left|\frac{\mathbf{x}}{\|\mathbf{x}\|_\Phi}\right|_\Phi \leqslant 1$, deci $\frac{\mathbf{x}}{\|\mathbf{x}\|_\Phi} \in O^\Phi_{\mathcal{A}}$. Fie $p > 0$ astfel încît $\|\mathbf{x}\|_\Phi \leqslant 2^p$. Atunci

$$\Phi(|\mathbf{x}(t)|) \leqslant \Phi\left(\frac{|\mathbf{x}(t)|}{\|\mathbf{x}\|_\Phi}\,2^p\right) \leqslant M^p\,\Phi\left(\frac{|\mathbf{x}(t)|}{\|\mathbf{x}\|_\Phi}\right)$$

pentru fiecare $t \in T$, deci $|\mathbf{x}|_\Phi \leqslant M^p \left|\frac{\mathbf{x}}{\|\mathbf{x}\|_\Phi}\right|_\Phi \leqslant M^p < +\infty$ și deci $\mathbf{x} \in O^\Phi_{\mathcal{A}}$. Cu aceasta propoziția este demonstrată.

Propoziția 21. *Dacă există un număr M și un număr $u_0 > 0$ astfel încît $\Phi(2u) \leqslant M\,\Phi(u)$ pentru $u \geqslant u_0$, și dacă măsura μ este mărginită, atunci $\mathcal{L}^\Phi_{\mathcal{A}} = O^\Phi_{\mathcal{A}}$.*

Fie $\mathbf{x} \in \mathcal{L}^\Phi_{\mathcal{A}}$. Să definim cîmpurile $\mathbf{x}_1$ și $\mathbf{x}_2$ astfel:

$$\mathbf{x}_1(t) = \begin{cases} \mathbf{x}(t) & \text{dacă } |\mathbf{x}(t)| < \|\mathbf{x}\|_\Phi\,u_0, \\ 0, & \text{dacă } |\mathbf{x}(t)| \geqslant \|\mathbf{x}\|_\Phi u_0, \end{cases}$$

și $\mathbf{x}_2 = \mathbf{x} - \mathbf{x}_1$. Cîmpul $\mathbf{x}_1$ este mărginit și măsurabil, deci funcția $\Phi(|\mathbf{x}_1(t)|)$ este mărginită și măsurabilă. Deoarece μ este mărginită, funcția $\Phi(|\mathbf{x}_1(t)|)$ este integrabilă.

Cîmpul x_2 nu este în general mărginit, dar $\frac{x_2}{\|x_2\|_\Phi} \in O^\Phi_{\mathcal{A}}$. Dacă $p > 0$ este astfel încît $\|x_2\|_\Phi \leqslant 2^p$, atunci

$$\Phi(|x_2(t)|) \leqslant \Phi\left(\frac{|x_2(t)|}{\|x_2\|_\Phi} 2^p\right) \leqslant M^p \Phi\left(\frac{|x_2(t)|}{\|x_2\|_\Phi}\right) < +\infty$$

deci $\Phi(|x_2(t)|)$ este integrabilă. Deoarece x_1 și x_2 se anulează pe mulțimi complementare, avem

$$\Phi(|x(t)|) = \Phi(|x_1(t)|) + \Phi(|x_2(t)|)$$

deci $\Phi(|x(t)|)$ este integrabilă, adică $x \in O^\Phi_{\mathcal{A}}$ și propoziția este demonstrată.

Propoziția 22. *Dacă există un număr M astfel încît $\Phi(2u) \leqslant M\Phi(u)$ pentru $u \geqslant 0$, atunci $|x|_\Phi \leqslant \frac{1}{M^p}$ implică $\|x\|_\Phi \leqslant \frac{2}{2^p}$. În particular dacă $|x_n - x|_\Phi \to 0$ atunci $\|x_n - x\|_\Phi \to 0$.*

Avem

$$\int \Phi(2^p |x(t)|)\, d\mu(t) \leqslant M^p \int \Phi(|x(t)|)\, d\mu(t) = M^p |x|_\Phi \leqslant 1.$$

Pentru orice $h \in O^\Psi$ cu $|h|_\Psi \leqslant 1$, avem, după inegalitatea lui Young,

$$\int 2^p |x(t)|\,|h(t)|\, d\mu(t) \leqslant \int \Phi(2^p |x(t)|)\, d\mu(t) + \int \Psi(|h(t)|)\, d\mu(t) \leqslant 2$$

și deci $\|x\|_\Phi \leqslant \frac{2}{2^p}$.

Observație. Să notăm $L^\Phi_{\mathcal{A}} = \mathcal{L}^\Phi_{\mathcal{A}} / \mathcal{N}_{\mathcal{A}}$, unde $\mathcal{N}_{\mathcal{A}}$ este mulțimea cîmpurilor neglijabile.

Dacă $\Phi(2u) \leqslant M\Phi(u)$ pentru $u \geqslant 0$, spațiul normat $L^\Phi_{\mathcal{A}}$ conține aceleași elemente ca și $O^\Phi_{\mathcal{A}} = O^\Phi_{\mathcal{A}} / \mathcal{N}_{\mathcal{A}}$. După propoziția 22, topologia lui $O^\Phi_{\mathcal{A}}$ este mai fină decît topologia lui $L^\Phi_{\mathcal{A}}$. Cum ambele spații sînt metrizabile și complete, cele două topologii sînt echivalente. Urmează că mulțimea cîmpurilor mărginite din $\mathcal{L}^\Phi_{\mathcal{A}}$ este densă în $\mathcal{L}^\Phi_{\mathcal{A}}$, deoarece această mulțime este densă în $O^\Phi_{\mathcal{A}}$.

Propoziția 23. *Să presupunem că* $\lim_{t\to\infty} \varphi(t) = l < +\infty$.

Dacă $x \in O^\Phi_{\mathcal{A}}$ *atunci* $|x|_\Phi \leqslant l N_1(x)$, *iar dacă* $x \in O^\Psi_{\mathcal{A}}$ *atunci* $N_\infty(x) \leqslant l$.

Dacă $x \in \mathcal{L}^\Phi_{\mathcal{A}}$ *atunci* $\|x\|_\Phi \leqslant l N_1(x)$, *iar dacă* $x \in \mathcal{L}^\infty_{\mathcal{A}}$ *atunci* $N_\infty(x) \leqslant l\|x\|_\Psi$.

Într-adevăr, dacă $\lim_{t\to\infty} \varphi(t) = l < +\infty$, atunci $\Phi(u) \leqslant lu$ pentru $u \geqslant 0$, iar $\Psi(v) = +\infty$ pentru $v > l$.

Urmează că dacă $\mathbf{x} \in O^{\Phi}_{\mathcal{A}}$, atunci

$$|\mathbf{x}|_{\Phi} = \int \Phi(|\mathbf{x}(t)|)\,d\mu(t) \leqslant l \int^{*} |\mathbf{x}(t)|\,d\mu(t) = lN_1(\mathbf{x})$$

iar dacă $\mathbf{x} \in O^{\Psi}_{\mathcal{A}}$, atunci $\int^{*} \Psi(|\mathbf{x}(t)|)\,d\mu(t) < +\infty$ deci $\Psi(|\mathbf{x}(t)|) < +\infty$, aproape peste tot, şi deci $|\mathbf{x}(t)| \leqslant l$ aproape peste tot, de unde $N_{\infty}(\mathbf{x}) \leqslant l$.

Fie acum $\mathbf{x} \in \mathcal{L}^{\Phi}_{\mathcal{A}}$. Avem

$$\|\mathbf{x}\|_{\Phi} = \sup_{|h|_{\Psi} \leqslant 1} \int^{*} |\mathbf{x}||h|\,d\mu \leqslant \sup_{N_{\infty}\left(\frac{h}{l}\right) \leqslant 1} l \int^{*} |\mathbf{x}| \frac{|h|}{l}\,d\mu \leqslant lN_1(\mathbf{x})$$

deoarece $|h|_{\Psi} \leqslant 1$ implică $N_{\infty}(h) \leqslant l$, deci $N_{\infty}\left(\frac{h}{l}\right) \leqslant 1$.

Dacă $\mathbf{x} \in \mathcal{L}^{\Psi}_{\mathcal{A}}$, avem

$$N_{\infty}(\mathbf{x}) = \sup_{N_1(h) \leqslant 1} \int^{*} |\mathbf{x}|\,|h|\,d\mu \leqslant \sup_{\left|\frac{\mathbf{x}}{l}\right|_{\Phi} \leqslant 1} l \int^{*} \frac{|\mathbf{x}|}{l}\,|h| \leqslant l\,\|h\|_{\Psi}$$

deoarece $N_1(h) \leqslant 1$ implică $|\mathbf{x}|_{\Phi} \leqslant l$ deci $\left|\frac{\mathbf{x}}{l}\right|_{\Phi} \leqslant 1$.

Corolar. *Dacă* $\lim_{t \to \infty} \varphi(t) = l < +\infty$, *atunci* $\mathcal{L}^{1}_{\mathcal{A}} \subset \mathcal{L}^{\Phi}_{\mathcal{A}}$ *şi* $\mathcal{L}^{\Psi}_{\mathcal{A}} \subset \mathcal{L}^{\infty}_{\mathcal{A}}$. *Topologia lui* $\mathcal{L}^{1}_{\mathcal{A}}$ *este mai fină decît topologia indusă pe* $\mathcal{L}^{1}_{\mathcal{A}}$ *de topologia lui* $\mathcal{L}^{\Phi}_{\mathcal{A}}$, *iar topologia lui* $\mathcal{L}^{\Psi}_{\mathcal{A}}$ *este mai fină decît topologia indusă pe* $\mathcal{L}^{\Psi}_{\mathcal{A}}$ *de topologia lui* $\mathcal{L}^{\infty}_{\mathcal{A}}$.

Propoziția 24. *Să presupunem că* $\lim_{t \to \infty} \varphi(t) = l < +\infty$. *Dacă măsura* μ *este mărginită, sau dacă* $\lim_{t \to 0} \varphi(t) = \delta > 0$, *atunci* $\mathcal{L}^{1}_{\mathcal{A}} = \mathcal{L}^{\Phi}_{\mathcal{A}}$ *şi* $\mathcal{L}^{\Psi}_{a} = \mathcal{L}^{\infty}_{\mathcal{A}}$.

Să presupunem întîi că μ este mărginită şi fie $\mathbf{x} \in \mathcal{L}^{\infty}_{\mathcal{A}}$. Putem găsi un număr $p > 0$ astfel încît $p\,|\mathbf{x}(t)| \leqslant a < 1$ aproape peste tot, deci $\int \Psi(p\,|\mathbf{x}(t)|)\,d\mu(t) \leqslant \Psi(a)\,\|\mu\| < +\infty$ şi deci $p\,\mathbf{x} \in O^{\Psi}_{\mathcal{A}} \subset \mathcal{L}^{\Psi}_{\mathcal{A}}$, de unde $\mathbf{x} \in \mathcal{L}^{\Psi}_{\mathcal{A}}$. Aşadar $\mathcal{L}^{\infty}_{\mathcal{A}} \subset \mathcal{L}^{\Psi}_{\mathcal{A}}$ şi deci, în baza propoziției 23, $\mathcal{L}^{\infty}_{\mathcal{A}} = \mathcal{L}^{\Psi}_{\mathcal{A}}$. Dacă $\mathbf{x} \in \mathcal{L}^{\Phi}_{\mathcal{A}}$, funcția $|\mathbf{x}|\,|h|$ este integrabilă, oricare ar fi $h \in \mathcal{L}^{\Psi}$; dacă luăm $h(t) \equiv 1$, avem $h \in \mathcal{L}^{\infty} = \mathcal{L}^{\Psi}$, deci $|\mathbf{x}|$ este integrabilă, adică $\mathbf{x} \in \mathcal{L}^{1}_{\mathcal{A}}$ Aşadar $\mathcal{L}^{\Phi}_{\mathcal{A}} \subset \mathcal{L}^{1}_{\mathcal{A}}$, de unde $\mathcal{L}^{\Phi}_{\mathcal{A}} = \mathcal{L}^{1}_{\mathcal{A}}$.

Să presupunem acum că $\lim_{t \to 0} \varphi(t) = \delta > 0$. Atunci $\Psi(v) = 0$ pentru $v \leqslant \delta$. Dacă $\mathbf{x} \in \mathcal{L}^{\infty}_{\mathcal{A}}$, există un număr $p > 0$ astfel încît $p\,|\mathbf{x}(t)| \leqslant \delta$ aproape peste tot, deci $|p\,\mathbf{x}|_{\Psi} = 0$ şi deci $p\,\mathbf{x} \in O^{\Psi}_{\mathcal{A}} \subset \mathcal{L}^{\Psi}_{\mathcal{A}}$, de unde

$\mathbf{x} \in \mathcal{L}^{\Psi}_{\mathcal{A}}$. Așadar $\mathcal{L}^{\infty}_{\mathcal{A}} \subset \mathcal{L}^{\Psi}_{\mathcal{A}}$, deci $\mathcal{L}^{\infty}_{\mathcal{A}} = \mathcal{L}^{\Psi}_{\mathcal{A}}$. Egalitatea $\mathcal{L}^{\Phi}_{\mathcal{A}} = \mathcal{L}^{1}_{\mathcal{A}}$ se demonstrează ca mai sus.

Propoziția 25. *Dacă există un număr M astfel încît $\Phi(2u) \leqslant M\Phi(u)$ pentru $u \geqslant 0$, atunci mulțimea $\mathcal{E}_{\mathcal{A}}(\mathcal{B})$ a cîmpurilor boreliene etajate, cu suport compact, este densă în spațiul $\mathcal{L}^{\Phi}_{\mathcal{A}}$ pentru seminorma $\|\mathbf{x}\|_{\Phi}$.*

Fie $\mathbf{x} \in \mathcal{L}^{\Phi}_{\mathcal{A}} = O^{\Phi}_{\mathcal{A}}$. Există un șir de mulțimi compacte (C_n) în afara cărora $\mathbf{x}$ se anulează aproape peste tot. Putem găsi un șir (A_n) de mulțimi boreliene disjuncte două cîte două, cu $A_n \subset C_n$ pentru fiecare n și $\bigcup_n C_n = \bigcup_n A_n$. Deoarece $\mathbf{x}$ este măsurabil, fiecare mulțime A_n este reuniunea unei mulțimi neglijabile și a unui șir de mulțimi compacte $(C_{nm})_m$ disjuncte două cîte două, astfel încît restricția lui $\mathbf{x}$ la fiecare C_{nm} să fie continuă. Așadar, renumerotînd mulțimile C_{nm}, putem obține un șir (D_n) de mulțimi compacte disjuncte două cîte două, astfel încît restricția lui $\mathbf{x}$ la fiecare D_n este continuă iar $\mathbf{x}$ se anulează aproape peste tot pe complementara reuniunii mulțimilor D_n. Mulțimile $K_n = \bigcup_{i=1}^{n} D_i$ sînt compacte, formează un șir crescător, restricția lui $\mathbf{x}$ la fecare K_n este continuă și notînd $\mathbf{x}_n = \mathbf{x}\varphi_{K_n}$ iar șirul $(\mathbf{x}_n)$ converge aproape peste tot către $\mathbf{x}$. Atunci

$$\Phi(|\mathbf{x}_n(t) - \mathbf{x}(t)|) \to 0$$

aproape peste tot. Pentru fiecare n avem

$$|\mathbf{x}_n(t) - \mathbf{x}(t)| \leqslant |\mathbf{x}_n(t)| + |\mathbf{x}(t)| \leqslant 2|\mathbf{x}(t)|$$

deci

$$\Phi(|\mathbf{x}_n(t) - \mathbf{x}(t)|) \leqslant M\Phi(|\mathbf{x}(t)|)$$

Conform teoremei lui Lebesgue deducem

$$\lim_{n\to\infty} \int \Phi(|\mathbf{x}_n(t) - \mathbf{x}(t)|)\, d\mu(t) = 0$$

adică $|\mathbf{x}_n - \mathbf{x}|_{\Phi} \to 0$, deci (propoziția 22) $\|\mathbf{x}_n - \mathbf{x}\|_{\Phi} \to 0$.

Am demonstrat astfel că mulțimea $\mathcal{C}$ a cîmpurilor cu suport compact, cu restricția la acest suport continuă, este densă în $\mathcal{L}^{\Phi}_{\mathcal{A}}$ pentru seminorma $\|\mathbf{x}\|_{\Phi}$.

Fie acum $\mathbf{x} \in \mathcal{C}$ și fie K suportul lui $\mathbf{x}$. Există un cîmp $\mathbf{y} \in \mathcal{K}_{\mathcal{A}}(T)$ astfel încît $\mathbf{x}\varphi_K = \mathbf{y}\varphi_K$. Pentru $\mathbf{y}$ există un șir $(\mathbf{x}_n)$ de cîmpuri boreliene etajate care converge uniform către $\mathbf{y}$. Cîmpurile $\mathbf{x}_n = \mathbf{y}_n\varphi_K$ sînt de asemenea boreliene, și converg uniform pe K către $\mathbf{y}\varphi_K$, deci converg uniform pe T către $\mathbf{x}$. Urmează că $(\mathbf{x}_n)$ converge de asemenea către $\mathbf{x}$ în topologia spațiului $\mathcal{L}^{\Phi}_{\mathcal{A}}$. Așadar, mulțime $\mathcal{E}_{\mathcal{A}}(\mathcal{B})$ este densă în $\mathcal{C}$ pentru seminorma $\|\mathbf{x}\|_{\Phi}$, deci $\mathcal{E}_{\mathcal{A}}(\mathcal{B})$ este densă în $\mathcal{L}^{\Phi}_{\mathcal{A}}$ pentru $\|\mathbf{x}\|_{\Phi}$.

Corolar. *Dacă* $\lim_{t\to 0}\varphi(t)=\delta>0$ *și* $\lim_{t\to\infty}\varphi(t)=l<+\infty$, *mulțimea cîmpurilor boreliene etajate cu suport compact este densă în* $\mathcal{L}^{\Phi}_{\mathcal{A}}$ *pentru seminorma* $\|\mathbf{x}\|_{\Phi}$.

Într-adevăr, avem $0<\delta\leqslant\varphi(u)\leqslant l$ deci $\delta u\leqslant\Phi(u)\leqslant lu$. Atunci

$$\Phi(2u)\leqslant 2lu=\frac{2l}{\delta}\delta u\leqslant\frac{2l}{\delta}\Phi(u)$$

și deci, luînd $M=\frac{2l}{\delta}$, avem $\Phi(2u)\leqslant M\,\Phi(u)$ pentru $u\geqslant 0$ și sîntem în condițiile propoziției precedente.

Exemplu. Dacă $\varphi(t)=t^{p-1}$, $(1<p<+\infty)$, atunci $\psi(s)=s^{q-1}$, $\left(\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1\right)$, $\Phi(u)=\frac{1}{p}u^p$ și $\Psi(v)=\frac{1}{q}v^q$. În acest caz avem $\Phi(2u)=2^p\,\Phi(u)$ pentru $u\geqslant 0$ și $\Psi(2v)=2^q\Psi(v)$ pentru $v\geqslant 0$. Urmează că $\mathcal{O}^{\Phi}_{\mathcal{A}}=\mathcal{L}^{\Phi}_{\mathcal{A}}$ și $\mathcal{O}^{\Psi}_{\mathcal{A}}=\mathcal{L}^{\Psi}_{\mathcal{A}}$. Avem apoi $\|\mathbf{x}\|_{\Phi}=q^{1/q}\|\mathbf{x}\|_p$ și $\|\mathbf{x}\|_{\Psi}=p^{1/p}\|\mathbf{x}\|_q$.

Dacă $\varphi(0)=0$ și $\varphi(t)\equiv 1$ 0pentru $t>0$, atunci $\psi(s)=0$ pentru $s\leqslant 1$ și $\psi(s)=+\infty$ pentru $s>1$; de asemenea $\Phi(u)=u$ pentru $u\geqslant 0$, $\Psi(v)=0$ pentru $v\leqslant 1$ și $\Psi(v)=+\infty$ pentru $v>1$.

În acest caz $\|\mathbf{x}\|_{\Phi}=\|\mathbf{x}\|_1$ și $\|\mathbf{x}\|_{\Psi}=\|\mathbf{x}\|_{\infty}$ deci $\mathcal{L}^{\Phi}_{\mathcal{A}}=\mathcal{L}^{1}_{\mathcal{A}}$ și $\mathcal{L}^{\Psi}_{\mathcal{A}}=\mathcal{L}^{\infty}_{\mathcal{A}}$.

5. Operații liniare pe spațiul $\mathcal{L}^{\Phi}_{\mathcal{A}}$

Fie F un spațiu Banach și o aplicație liniară $U:\mathcal{L}^{\Phi}_{\mathcal{A}}\to E$. Să notăm

$$|||U|||=\sup\sum_i|U(\varphi_{A_i}\mathbf{x}_i)|\quad\text{și}\quad\|U\|=|\sum_i U(\varphi_{A_i}\mathbf{x}_i)|,$$

unde marginea superioară se ia pentru toate cîmpurile boreliene etajate $\mathbf{x}=\sum_i\varphi_{A_i}\mathbf{x}_i$, cu mulțimile A_i disjuncte și $\|\mathbf{x}\|_{\Phi}\leqslant 1$. Avem

$$\|U\|<|||U|||\leqslant+\infty.$$

Dacă $\Phi(2u)\leqslant M\Phi(u)$ pentru $u\geqslant 0$, mulțimea $\mathcal{E}_{\mathcal{A}}(\mathcal{B})$ a cîmpurilor boreliene etajate este densă în $\mathcal{L}^{\Phi}_{\mathcal{A}}$, deci $\|U\|$ reprezintă norma obișnuită a operației liniare U.

Propoziția 26. *Pentru orice funcțională* $U:\mathcal{L}^{\Phi}_{\mathcal{A}}\to C$ *avem* $\|U\|=|||U|||\leqslant+\infty$.

Într-adevăr, fie $\mathbf{x}=\sum_i\varphi_{A_i}\mathbf{x}_i$ un cîmp borelian etajat cu A_i disjuncte și $\|\mathbf{x}\|_{\Phi}\leqslant 1$. Pentru fiecare i există un număr complex θ_i cu $|\theta_i|=1$, astfel încît

$$|U(\varphi_{A_i}\mathbf{x}_i)|=\theta_i U(\varphi_{A_i}\mathbf{x}_i)=U(\varphi_{A_i}\theta_i\mathbf{x}_i).$$

Atunci

$$\sum_i |U(\varphi_{A_i}\mathbf{x}_i)| = U\Big(\sum_i \varphi_{A_i}\theta_i\mathbf{x}_i\Big) \leqslant \|U\| \,\Big\|\sum_i \varphi_{A_i}\theta_i\mathbf{x}_i\Big\|_\Phi \leqslant \|U\|,$$

de unde $|||U||| \leqslant \|U\|$ și deci $\|U\| = |||U|||$.

Observație. Dacă $F \neq C$, este posibil ca $\|U\| < |||U|||$.

Pentru fiecare $t \in T$ să notăm $G(t) = \mathcal{L}(\mathcal{E}(t), F)$ și $\mathcal{G} = (G(t))_{t\in T}$.

Teorema 3. *Să presupunem că există* $M > 0$ *cu* $\Phi(2u) \leqslant \Phi M(u)$ *pentru* $u \geqslant 0$. *Pentru orice aplicație liniară* $U : \mathcal{L}^\Phi_{\mathcal{A}}(\mu) \to F$ *cu* $|||U||| < \infty$, *restricția sa* $\mathbf{m}$ *la* $\mathcal{K}_{\mathcal{A}}(T)$ *este o măsură majorată absolut continuă în raport cu* μ, *astfel încît*

$$\int |\varphi|\,d\,|\mathbf{m}| \leqslant |||U||| \,\|\varphi\|_\Phi, \text{ pentru } \varphi \in \mathcal{K}(T).$$

Reciproc, orice măsură majorată $\mathbf{m} : \mathcal{K}_{\mathcal{A}}(T) \to F$ *absolut continuă în raport cu* μ, *pentru care există* $\alpha > 0$ *astfel încît*

$$\int |\varphi|\,d\,|\mathbf{m}| \leqslant \alpha\|\varphi\|_\Phi, \text{ pentru } \varphi \in \mathcal{K}(T),$$

poate fi prelungită în mod unic la o operație liniară $U : \mathcal{L}^\Phi_{\mathcal{A}}(\mu) \to F$ *cu* $|||U||| < \infty$. *Avem atunci* $|\mathbf{m}| = g\mu$ *cu*

$$\frac{1}{2}\|g\|_\Psi \leqslant |||U||| \leqslant \|g\|_\Phi,$$

$\mathcal{L}^\Phi_{\mathcal{A}}(\mu) \subset \mathcal{L}^1_{\mathcal{A}}(\mathbf{m})$ *și*

$$U(\mathbf{x}) = \int \mathbf{x}\,d\mathbf{m} \quad \text{și} \quad \int |\mathbf{x}|\,d\,|\mathbf{m}| \leqslant |||U||| \,\|\mathbf{x}\|_\Phi$$

pentru $\mathbf{x} \in \mathcal{L}^\Phi_{\mathcal{A}}(\mu)$.

a) Fie $U : \mathcal{L}^\Phi_{\mathcal{A}}(\mu) \to F$ o aplicație liniară cu $|||U||| < \infty$. Restricția lui U la $\mathcal{K}_{\mathcal{A}}(T)$ este liniară. Să arătăm că este majorată :

Pentru orice $\varphi \in \mathcal{L}^\Phi$, orice $\mathbf{x} \in \mathcal{A}$ și orice mulțime boreliană relativ compactă $B \in \mathcal{B}$ avem $\varphi\mathbf{x}\varphi_B \in \mathcal{L}^\Phi_{\mathcal{A}}$, deoarece $|\varphi\mathbf{x}\varphi_B| \leqslant \|\mathbf{x}\|_B\,|\varphi|$, unde $\|\mathbf{x}\|_B = \sup_{t\in B} |\mathbf{x}(t)|$. Să punem $M_B(\varphi)\,\mathbf{x} = U(\varphi\mathbf{x}\varphi_B)$.

Aplicația $M_B(\varphi) : \mathbf{x} \to M_B(\varphi)\,\mathbf{x}$ a lui $\mathcal{A}$ în F este liniară și continuă pentru seminorma $\|\mathbf{x}\|_B$ pe $\mathcal{A}$, deoarece

$$|M_B(\varphi)\mathbf{x}| = |U(\varphi\mathbf{x}\varphi_B)| \leqslant \|U\|\,\|\mathbf{x}\|_B\,\|\varphi\|_\Phi.$$

deci $M_B(\varphi) \in \mathcal{L}(\mathcal{A}, F)$, $\mathcal{A}$ fiind înzestrată cu topologia definită de familia de seminorme $(\|\mathbf{x}\|_B)_{B\in\mathcal{B}}$ și

$$\|M_B(\varphi)\|_B \leqslant \|U\|\,\|\varphi\|_\Phi$$

unde pentru $S \in \mathcal{L}(\mathcal{A}, F)$ am notat

$$\|S\|_A = \sup_{\|\mathbf{x}\|_A \leqslant 1} |S\mathbf{x}|.$$

Pentru fiecare $A \in \mathcal{B}$ să punem $\mathbf{m}(A) = M_A(\varphi_A)$. Pentru orice $B \in \mathcal{B}$, astfel încît $A \subset B$, avem $\mathbf{m}(A) = M_B(\varphi_A)$.

Funcția de mulțime $\mathbf{m} : \mathcal{B} \to \mathcal{L}(\mathcal{A}, F)$ are următoarele proprietăți:

1) pentru orice $A \in \mathcal{B}$ și $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathcal{A}$ astfel încît $\varphi_A \mathbf{x} = \varphi_A \mathbf{y}$ avem

$$\mathbf{m}(A)\,\mathbf{x} = \mathbf{m}(A)\,\mathbf{y}.$$

2) $\mathbf{m}$ este aditivă

$$\mathbf{m}\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{m}(A_i)$$

dacă A_i sînt disjuncte două cîte două.

3) $\mathbf{m}$ este cu variație finită. Fie $A \in \mathcal{B}$ și $(A_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ o partiție a lui A formată din mulțimi boreliene, $(c_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ o familie de numere și $\varepsilon > 0$. Pentru fiecare i există un cîmp $\mathbf{x}_i \in \mathcal{A}$ cu $\|\mathbf{x}_i\|_A \leqslant 1$ și

$$\|\mathbf{m}(A_i)\|_A \leqslant |\mathbf{m}(A_i)\,\mathbf{x}_i| + \frac{\varepsilon}{|c_i|\,n}, \quad \text{dacă} \quad c_i \neq 0,$$

$$\|\mathbf{m}(A_i)\|_A \leqslant |\mathbf{m}(A_i)\,\mathbf{x}_i| + \frac{\varepsilon}{n}, \quad \text{dacă} \quad c_i \neq 0.$$

Atunci pentru orice i avem

$$\|\mathbf{m}(A_i)\|_A\,|c_i| \leqslant |\mathbf{m}(A_i)\,c_i\mathbf{x}_i| + \frac{\varepsilon}{n},$$

deci

$$\sum_{i=1}^{n} \|\mathbf{m}(A_i)\|_A\,|c_i| \leqslant \sum_{i=1}^{n} |\mathbf{m}(A_i)\,c_i\mathbf{x}_i| + \varepsilon = \sum_{i=1}^{n} |U(\varphi_{A_i}\mathbf{x}_i c_i)| + \varepsilon \leqslant$$

$$\leqslant |||U||| \,\|\sum_{i=1}^{n} \varphi_{A_i} c_i \mathbf{x}_i\|_\Phi + \varepsilon \leqslant |||U||| \,\|\sum_{i=1}^{n} \varphi_{A_i} c_i\|_\Phi + \varepsilon.$$

ε fiind arbitrar, deducem

$$\sum_{i=1}^{n} \|\mathbf{m}(A_i)\|_A\,|c_i| \leqslant |||U|||\,\|\sum_{i=1}^{n} \varphi_{A_i} c_i\|_\Phi.$$

Luînd $c_i = 1$ pentru fiecare i, obținem

$$\sum_{i=1}^{n} \|\mathbf{m}(A_i)\|_A \leqslant |||U|||\,\|\varphi_A\|_\Phi$$

și apoi

$$\nu(A) = \sup \sum \|\mathbf{m}(A_i)\|_A \leqslant |||U|||\,\|\varphi_A\|_\Phi < \infty,$$

marginea superioară fiind luată pentru toate partițiile (A_i) ale lui A. Așadar $\mathbf{m}$ este cu variație finită și variația ν este aditivă pe $\mathcal{B}$.

4) Avem de asemenea inegalitatea

$$\sum_{i=1}^{n} \nu(A_i)\,|c_i| \leqslant |||U|||\,\|\sum_{i=1}^{n} \varphi_{A_i} c_i\|_\Phi .$$

Într-adevăr, fie $\varepsilon > 0$. Pentru fiecare i, există o partiție (B_{ij}) a lui A_i, formată din mulțimi boreliene, astfel încît

$$\nu(A_i) \leqslant \sum_j \|\mathbf{m}(B_{ij})\|_A + \frac{\varepsilon}{|c_i|\,n}, \quad \text{dacă } c_i \neq 0,$$

$$\nu(A_i) \leqslant \sum_j \|\mathbf{m}(B_{ij})\|_A + \frac{\varepsilon}{n}, \quad \text{dacă } c_i \neq 0,$$

deci pentru orice i avem

$$\nu(A_i)\,|c_i| \leqslant \sum_j \|\mathbf{m}(B_{ij})\|_A\,|c_i| + \frac{\varepsilon}{n},$$

de unde

$$\sum_{i=1}^{n} \nu(A_i)\,|c_i| \leqslant \sum_{i,j} \|\mathbf{m}(B_{ij})\|_A\,|c_i| + \varepsilon \leqslant$$

$$\leqslant |||U|||\,\|\sum_{i,j} \varphi_{B_{ij}} c_i\|_\Phi + \varepsilon \leqslant |||U|||\,\|\sum_i \varphi_{A_i} c_i\|_\Phi + \varepsilon.$$

ε fiind arbitrar, deducem

$$\sum_{i=1}^{n} \nu(A_i)\,|c_i| \leqslant |||U|||\,\|\sum_{i=1}^{n} \varphi_{A_i} c_i\|_\Phi,$$

de unde

$$\left|\sum_{i=1}^{n} \nu(A_i)\,c_i\right| \leqslant |||U|||\,\|\sum_{i=1}^{n} \varphi_{A_i} c_i\|_\Phi .$$

5) Pentru orice funcție boreliană etajată reală $\varphi = \sum \varphi_{A_i} c_i$ cu A_i disjuncte, să punem

$$v(\varphi) = \sum_i \nu(A_i)\,c_i .$$

Se verifică ușor că $v(\varphi)$ nu depinde de forma particulară în care φ se scrie ca funcție etajată, că v este liniară și

$$|v(\varphi)| \leqslant |||U|||\,\|\varphi\|_\Phi .$$

Deoarece $\Phi(2u) \leqslant M\,\Phi(u)$ pentru $u \geqslant 0$, funcțiile boreliene etajate sînt dense în $\mathcal{L}^\Phi$, deci v se poate prelungi prin continuitate la o funcțională liniară și continuă pe $\mathcal{L}^\Phi$ notată tot v, și avem

$$|v(\varphi)| \leqslant |||U|||\,\|\varphi\|_\Phi, \text{ pentru } \varphi \in \mathcal{L}^\Phi.$$

Pentru orice cîmp borelian etajat $\mathbf{x} = \sum \varphi_{A_i} \mathbf{x}_i$, cu A_i disjuncte, avem

$$|U(\mathbf{x})| = |\sum_i \mathbf{m}(A_i)\,\mathbf{x}_i| \leqslant v(|\mathbf{x}|).$$

Deoarece aplicațiile $\mathbf{x} \to U(\mathbf{x})$ și $\mathbf{x} \to v(|\mathbf{x}|)$ sînt continue pe $\mathcal{L}^{\Phi}_{\mathcal{A}}$, inegalitatea

$$|U(\mathbf{x})| \leqslant v(|\mathbf{x}|)$$

rămîne adevărată pentru orice $\mathbf{x} \in \mathcal{L}^{\Phi}_{\mathcal{A}}$. Cum restricția lui v la $\mathcal{K}(T)$ este o măsură pozitivă, deducem că restricția $\mathbf{m}$ a lui U la $\mathcal{K}_{\mathcal{A}}(T)$ este o măsură majorată. Ea este, evident, absolut continuă în raport cu μ.

Din inegalitatea $|\mathbf{m}| \leqslant v$ deducem

$$\int |\varphi| \, \mathrm{d}\, |\mathbf{m}| \leqslant v(|\varphi|) \leqslant |||U||| \, \|\varphi\|_{\Phi}, \text{ pentru } \varphi \in \mathcal{K}(T).$$

b) Reciproc, fie $\mathbf{m} : \mathcal{K}_{\mathcal{A}}(T) \to F$ o măsură majorată absolut continuă în raport cu μ, astfel încît există $\alpha > 0$ cu

$$\int |\varphi| \, \mathrm{d}\, |\mathbf{m}| \leqslant \alpha \|\varphi\|_{\Phi}, \text{ pentru } \varphi \in \mathcal{K}(T).$$

Deoarece $|\mathbf{m}|$ este absolut continuă în raport cu μ, există o funcție local μ-integrabilă $g \geqslant 0$ cu $|\mathbf{m}| = g\mu$. Pentru orice $\varphi \in \mathcal{K}(T)$ avem

$$\int |\varphi| g \, \mathrm{d}\mu = \int |\varphi| \, \mathrm{d}\, |\mathbf{m}| \leqslant \alpha \|\varphi\|_{\Phi} \leqslant \alpha (|\varphi|_{\Phi} + 1).$$

deci

$$\|g\|_{\Psi} \leqslant 2\alpha < \infty.$$

Urmează că dacă $\varphi \in \mathcal{L}^{\Phi}(\mu)$, atunci $\varphi g \in \mathcal{L}^{1}(\mu)$, deci $\varphi \in \mathcal{L}^{1}(|\mathbf{m}|)$, și deci $\mathcal{L}^{\Phi}(\mu) \subset \mathcal{L}^{1}(|\mathbf{m}|)$ și $\mathcal{L}^{\Phi}_{\mathcal{A}}(\mu) \subset \mathcal{L}^{1}_{\mathcal{A}}(\mathbf{m})$. Avem atunci

$$\int |\mathbf{x}| \, \mathrm{d}\, |\mathbf{m}| \leqslant \alpha \|\mathbf{x}\|_{\Phi}, \text{ pentru orice } \mathbf{x} \in \mathcal{L}^{\Phi}_{\mathcal{A}}.$$

Să punem

$$U(\mathbf{x}) = \int \mathbf{x} \, \mathrm{d}\mathbf{m}, \text{ pentru } \mathbf{x} \in \mathcal{L}^{\Phi}_{\mathcal{A}}(\mu).$$

Aplicația $U : \mathcal{L}^{\Phi}_{\mathcal{A}}(\mu) \to F$ este liniară și vom arăta că $|||U||| < \infty$. Fie $\mathbf{x} = \sum \varphi_{A_i} x_i$ un cîmp etajat cu A_i mulțimi boreliene relativ compacte disjuncte. Atunci

$$\sum |U(\varphi_{A_i} \mathbf{x}_i)| = \sum \left| \int \varphi_{A_i} \mathbf{x}_i \, \mathrm{d}\mathbf{m} \right| \leqslant \sum \int \varphi_{A_i} |\mathbf{x}_i| \, \mathrm{d}\, |\mathbf{m}| =$$

$$= \int |\sum \varphi_{A_i} \mathbf{x}_i| \, \mathrm{d}\, |\mathbf{m}| \leqslant \alpha \|\mathbf{x}\|_{\Phi},$$

deci $|||U||| \leqslant \alpha < \infty$.

c) Fie acum $U : \mathcal{L}^{\Phi}_{\mathcal{A}}(\mu) \to F$ o aplicație liniară cu $|||U||| < \infty$ și fie $\mathbf{m}$ măsura majorată corespunzătoare. Din prima parte deducem că

$$\int |\mathbf{x}| \, \mathrm{d} \, |\mathbf{m}| \leqslant |||U||| \, \|\mathbf{x}\|_{\Phi}, \text{ pentru } \mathbf{x} \in \mathcal{L}^{\Phi}_{\mathcal{A}}(\mu).$$

Din partea a doua a demonstrației deducem, cu $\alpha = |||U|||$, că există o funcție local μ-integrabilă $g \geqslant 0$ cu $|\mathbf{m}| = g\mu$ și

$$\frac{1}{2} \|g\|_{\Psi} \leqslant |||U|||.$$

Fie $\mathbf{x} = \sum \varphi_{A_i} \mathbf{x}_i$ un cîmp etajat cu A_i disjuncte și cu $\|\mathbf{x}\|_{\Phi} \leqslant 1$. Atunci, ca mai sus, avem

$$\sum |U(\varphi_{A_i} \mathbf{x}_i)| \leqslant \int |\mathbf{x}| \, \mathrm{d} \, |\mathbf{m}| = \int |\mathbf{x}| \, g \mathrm{d}\mu \leqslant \|g\|_{\Psi},$$

de unde $|||U||| \leqslant \|g\|_{\Psi}$.

Cu aceasta teorema este demonstrată.

Teorema 4. *Fie $Z \subset F'$ un subspațiu normant pentru F și $U : \mathcal{L}^{\Phi}_{\mathcal{A}}(\mu) \to F$ o apilcație liniară cu $|||U||| < \infty$. Să presupunem că există $M > 0$ cu $\Phi(2u) \leqslant M\Phi(u)$ pentru $u \geqslant 0$ și că familia $\mathcal{A}$ verifică axioma (G). Există atunci un cîmp de operații $\mathbf{u} \in \mathcal{C}(\mathcal{G}_Z)$ cu următoarele proprietăți :*

1. *Funcția $|\mathbf{u}|$ aparține spațiului $\mathcal{L}^{\Psi}(\mu)$ și avem*

$$\frac{1}{2} \|\mathbf{u}\|_{\Psi} \leqslant |||U||| \leqslant \|\mathbf{u}\|_{\Psi}.$$

2. *Cîmpul $\mathbf{u}$ este Z-slab local μ-integrabil și avem*

$$< U(\mathbf{x}), z > = \int < \mathbf{u}(t) \, \mathbf{x}(t), z > \mathrm{d}\mu, \text{ pentru } \mathbf{x} \in \mathcal{L}^{\Phi}_{\mathcal{A}} \text{ și } z \in Z.$$

3. *Dacă ρ este o ridicare a lui $\mathcal{L}^{\infty}(\mu)$ și $\mathcal{B} \subset \mathcal{A}$ este o mulțime numărabilă astfel încît, pentru fiecare $t \in T$, mulțumea $\{\mathbf{u}(t) ; \mathbf{x} \in \mathcal{B}\}$ să fie densă în $E(t)$, atunci se poate alege $\mathbf{u}$ astfel încît să avem*

$$\rho[\mathbf{ux}] = \mathbf{ux}, \text{ pentru } \mathbf{x} \in \mathcal{B}.$$

4. *Avem $\mathbf{u} \in \mathcal{C}(\mathcal{G}_F)$ în fiecare din cazurile următoare :*

a) *$F = Z'$,*

b) *pentru fiecare $\mathbf{x} \in \mathcal{A}$, acoperirea convexă și echilibrată a mulțimii $\{U(\varphi \mathbf{x}) ; \varphi \in \mathcal{K}(T), \int |\varphi| \, \mathrm{d} \, |\mu| \leqslant 1\}$ este relativ compactă în F pentru topologia $\sigma(F, Z)$.*

Demonstrația este aceeași ca a teoremei 10, § 18, folosind teorema 3 din § 28 și teorema 3 din acest paragraf, în locul teoremelor 3 și 9 din § 18.

Observații. 1° Dacă F este de tip numărabil, funcția $t \to \mathbf{u}(t) \, \mathbf{x}(t)$ este măsurabilă pentru orice $\mathbf{x} \in \mathcal{L}^{\Phi}_{\mathcal{A}}(\mu)$.

În acest caz formula de reprezentare se scrie

$$U(\mathbf{x}) = \int \mathbf{u}(t)\,\mathbf{x}(t)\,d\mu, \text{ pentru } \mathbf{x} \in \mathcal{L}^{\Phi}_{\mathcal{A}}.$$

2° Să presupunem că există o familie fundamentală $\mathcal{D} \subset \mathcal{C}(\mathcal{G}_{Z'})$ astfel încît funcția $t \to \mathbf{v}(t)\,\mathbf{x}(t)$ este continuă pentru orice $\mathbf{v} \in \mathcal{D}$ și $\mathbf{x} \in \mathcal{A}$.

În acest caz cîmpul $\mathbf{u}$ este măsurabil relativ la $\mathcal{D}$ și μ deci $\mathbf{u} \in \mathcal{L}^{\Psi}_{\mathcal{D}}$.

Corolarul 1. *Să presupunem că: există M cu $\Phi(2u) \leqslant M\Phi(u)$ pentru $u \geqslant 0$; $\mathcal{A}$ verifică axioma (G). Atunci, pentru orice funcțională liniară și continuă U pe $\mathcal{L}^{\Phi}_{\mathcal{A}}(\mu)$ există un cîmp de funcționale $\mathbf{u} \in \mathcal{C}(\mathcal{E}')$ cu*

$$< \mathbf{x}, U > = \int < \mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t) > d\mu, \text{ pentru } \mathbf{x} \in \mathcal{L}^{\Phi}_{\mathcal{A}},$$

și

$$\frac{1}{2} \|\mathbf{u}\|_{\Psi} \leqslant \|U\| \leqslant \|\mathbf{u}\|_{\Psi}.$$

Într-adevăr, în acest caz $|||U||| = \|U\| < \infty$.

Dacă există o familie fundamentală $\mathcal{A}' \subset \mathcal{C}(\mathcal{E}')$ astfel încît funcția $t \to < \mathbf{x}(t), \mathbf{x}'(t) >$ să fie continuă pentru orice $\mathbf{x} \in \mathcal{A}$ și $\mathbf{x}' \in \mathcal{A}'$ și dacă $\mathcal{A}'$ verifică axioma (G), atunci $\mathbf{u}$ este măsurabilă, deci $\mathbf{u} \in \mathcal{L}^{\Psi}_{\mathcal{A}'}$.

Corolarul 2. *Dacă: $\Phi(2u) \leqslant M\Phi(u)$ și $\Psi(2v) \leqslant M\Psi(v)$; spațiile $E(t)$ sînt reflexive; există o familie fundamentală $\mathcal{A}' \subset \mathcal{C}(\mathcal{E}')$ astfel încît funcția $t \to < \mathbf{x}(t), \mathbf{x}'(t) >$ să fie continuă pentru $\mathbf{x} \in \mathcal{A}$ și $\mathbf{x}' \in \mathcal{A}'$; $\mathcal{A}$ și $\mathcal{A}'$ verifică axioma (G); atunci spațiile $\mathcal{L}^{\Phi}_{\mathcal{A}}$ și $\mathcal{L}^{\Psi}_{\mathcal{A}}$ sînt reflexive.*

Fără nici o restricție asupra familiei $\mathcal{A}$ avem următoarea teoremă reciprocă.

Teorema 5. *Fie $Z \subset F'$ un subspațiu normant pentru F și $\mathbf{u} \in \mathcal{C}(\mathcal{G}_F)$ un cîmp de operații Z-slab local μ-integrabil. Dacă*

(i) $$\|\mathbf{u}\|_{\Psi} < \infty$$

atunci există o aplicație liniară $U : \mathcal{L}^{\Phi}_{\mathcal{A}}(\mu) \to Z'$ astfel încît să avem

$$< U(\mathbf{x}), z > = \int < \mathbf{u}(t)\,\mathbf{x}(t), z > d\mu, \text{ pentru } \mathbf{x} \in \mathcal{L}^{\Phi}_{\mathcal{A}}(\mu) \text{ și } z \in Z.$$

În acest caz avem

$$|||U||| \leqslant \|\mathbf{u}\|_{\Psi}.$$

(ii) *Avem $U(\mathbf{x}) \in F$ pentru orice $\mathbf{x} \in \mathcal{L}^{\Phi}_{\mathcal{A}}(\mu)$ în fiecare din următoarele cazuri:*

a) *$F = Z'$;*

b) *$\mathbf{u}$ este simplu μ-măsurabil; în particular F este de tip numărabil;*

c) *pentru fiecare $\mathbf{x} \in \mathcal{A}$ există o familie local numărabilă $(K_j)_{j \in J}$ de părți compacte disjuncte cu $T - \bigcup K_j$ μ-neglijabilă, astfel încît pentru*

fiecare $j \in J$, *acoperirea convexă și echilibrată a mulțimii* $\{\mathbf{u}(t)\,\mathbf{x}(t)\,;\ t \in K_j\}$ *să fie relativ compactă în* F *pentru topologia* $\sigma(F, Z)$.

(iii) *Dacă există* $M > 0$ *cu* $\Phi(2u) \leqslant M\Phi(u)$ *pentru* $\mathbf{u} \geqslant 0$, *atunci inegalitățile*

$$\frac{1}{2}\,\|\mathbf{u}\|_{\Psi} \leqslant |||U||| \leqslant \|\mathbf{u}\|_{\Psi}$$

sînt verificate în fiecare din cazurile următoare:

1) $\mathcal{A}$ *verifică axioma* (G) *și există o ridicare* ρ *a lui* $\mathcal{L}^{\infty}(\mu)$ *și o parte numărabilă* $\mathcal{B} \subset \mathcal{A}$, *astfel încît pentru orice* $t \in T$ *mulțimea* $\{\mathbf{x}(t)\,;\ \mathbf{x} \in \mathcal{B}\}$ *să fie densă în* $E(t)$ *și*

$$\rho[\mathbf{ux}] = \mathbf{ux}, \quad \textit{pentru} \quad \mathbf{x} \in \mathcal{B}.$$

2) $\mathcal{A}$ *verifică axioma* (G) *și există o mulțime numărabilă* $S \subset Z$ *normantă pentru* F.

3) $\mathcal{A}$ *verifică axioma* (G) *iar* $\mathbf{u}$ *este simplu* μ*-măsurabil.*

4) *Există o familie fundamentală* $\mathcal{A}' \subset \mathcal{C}(\mathcal{E}')$ *de cîmpuri de funcționale continue, astfel încît funcția* $t \to <\mathbf{x}(t), \mathbf{x}'(t)>$ *este continuă pentru orice* $\mathbf{x} \in \mathcal{A}$ *și orice* $\mathbf{x}' \in \mathcal{A}'$ *iar* $\mathbf{u}$ *este un cîmp de funcționale din* $\mathcal{C}(\mathcal{E}')$ *măsurabil în raport cu* $\mathcal{A}'$ *și* μ.

Bibliografie

ALEXIEWICZ, A., *Linear operations among bounded measurable functions. I, II.* Ann. Soc. Polon. Math., **19**, 140—161, 161—164 (1946).

BANACH, S., *Théorie des opérations linéaires*, Warsaw, 1932.

BARTLE, R.G., *A general bilinear vector integral.* Studia Math., **15**, 337—352 (1956).

BARTLE, R.G., DUNFORD, N., SCHWARTZ, J., *Weak compactness and vector measures.* Canadian J. Math., **7**, 289—305 (1955).

BIRKHOFF, G., *Integration of functions with values in a Banach space.* Trans. Amer. Math. Soc., **38**, 357—378 (1935).

BISHOP, E., *Spectral theory for operators on a Banach space.* Trans. Amer Math. Soc., **86**, 414—445 (1957).

BOCHNER, S., *Integration von Funktionen, deren Werte die Elemente eines Vectorraumes sind.* Fund. Math., **20**, 262—276 (1933).

BOCHNER, S., TAYLOR, A.E., *Linear functionals on certains spaces of abstractly-valued functions.* Ann. of. Math , (2), **39**, 913—944 (1938).

BOURBAKI, N., *Topologie générale.* chap. I—V. Hermann, Paris, 1940—1949.
Espaces vectoriels topologiques, chap. I—V. Hermann, Paris, 1953, 1955.
Intégration. chap. I—VI. Hermann, Paris, 1952, 1956, 1959.

CARTAN, H., GODEMENT, R., *Théorie de la dualité et analyse harmonique dans les groupes abéliens localement compacts.* Ann. École Norm. Sup., **64**, 79—99 (1947).

COLOJOARĂ, I., DINCULEANU N., MARINESCU, G., *Measures with values in locally convex spaces.* Bull. Sci. Math. Phys. R.P.R., **5 (53)**, 167—180 (1961).

CRISTESCU, R, *Spații liniare ordonate*, București, 1959.
Noțiunea de integrală în spațiile semiordonate. Com. Acad. R.P.R., **2**, 205—208 (1952).
Integrarea în spații semiordonate. Bul. științ., Acad. R.P.R., **4**, 291—310 (1952).
O teoremă asupra reprezentării operațiilor liniare. Com. Acad. R.P.R., **5**, 655—659 (1955).
Integrali vettoriali di Stieltjes ed operatori lineari. Rendiconti Accad. Naz. Lincei, **27**, 31—34 (1959).
Intégrales vectorielles et représentation de certains opérateurs linéaires, Bull. Math. Soc. Sci. Math. Phys. R.P.R., **3 (51)**, 7—15 (1959).
Интеграл Стилтеса в K — пространствах. ДАН СССР, **133**, 519—522 (1960).
Asupra unor integrale vectoriale. Com. Acad. R.P.R., **11**, 1169—1173 (1961).

CUCULESCU, I., *Généralisations aux groupes quelconques d'un théorème de E. Hille concernant les fonctions facteurs.* Rendiconti Accad. Naz. Lincei, **24**, 15—19 (1958).

DANIELL, P.J., *A general form of integral.* Ann. of Math., (2), **19**, 279—294 (1917—1918).

DAY, M.M., *The space L^p with $0 < p < 1$.* Bull Amer. Math. Soc., **46**, 816—823 (1940).
Normed linear spaces. Ergebnisse der Math., Berlin-Götingen-Heidelberg, 1958.

DIEUDONNÉ, J., *Sur le théorème de Lebesgue-Nikodym.* Ann. of. Math., (2), **42**, 547—555 (1941).
Sur le théorème de Lebesgue-Nikodym. II. Bull. Soc. Math. France, **72**, 193—239 (1944)
Sur le théorème de Lebesgue-Nikodym. III. Ann. Inst. Fourier, Grenoble, **23**, 25—53 (1947—1948).
Sur le théorème de Lebesgue-Nikodym. IV. J. Indian Math., Soc., **15**, 77—86 (1951).
Sur le théorème de Lebesgue-Nikodym. V. Canadian J. Math., **3**, 129—139 (1951).
Sur les espaces de Köthe, J. Analyse Math., **1**, 81—115 (1951).

Sur la convergence des suites de mesures de Radon. Anais Acad. Brasil. Ci., **23**, 21—38, 277—282 (1951).
Sur le produit de composition. Compositio Math., **12**, 17—34 (1954).
Análise Harmônica, Rio de Janeiro, 1952.

DINCULEANU, N., *Espaces d'Orlicz de champs de vecteurs. I.* Rendiconti Accad. Naz. Lincei, **22**, 135—139 (1957).
Espaces d'Orlicz de champs de vecteurs. II. Rendiconti Accad. Naz. Lincei, **22**, 269—275 (1957).
Spații Orlicz de cîmpuri de vectori. St. cerc. mat., **8**, 343—412 (1957).
Espaces d'Orlicz de champs de vecteurs. III. Opérations linéaires, Studia Math., **17**, 285—293 (1958).
Espaces d'Orlicz de champs de vecteurs. IV. (opérations linéaires). Studia Math., **19**, 322—331 (1960).
Об интегральном представлении линейных операторов на пространствах Орлича. ДАН СССР, **146**, 1255—1258 (1962).
Sur la représentation intégrale de certaines opérations linéaires. C.R. Acad. Sci. Paris, **245**, 1203—1205 (1957).
Mesures vectorielles et opérations linéaires. C.R. Acad. Sci. Paris, **246**, 2328—2331 (1958).
Sur la représentation intégrale de certaines opérations linéaires. II. Compositio Math., **14**, 1—22 (1959).
Sur la représentation intégrale de certaines opérations linéaires. III. Proc. Amer. Math. Soc., **10**, 59—68 (1959).
Mesures vectorielles sur les espaces localement compacts. Bull. Math. Soc. Sci. Math. Phys. R.P.R., **2** (**50**), 137—164 (1958).
Remarks on the integral representation of vector measures and linear operations on L^p_A. Revue math. pures et appl., **7**, 287—300 (1962).
Despre seminormele N_p. Analele Universității București, **11**, 155—163, (1962).
On the regular vector measures. Acta Sci. Math. Szeged, **24**, 236—243 (1963).
Regularity of vector measures. Revue math. pures et appl., **9**, 81—90 (1964).
Integral representation of vector measures and linear opérations. Studia Math., **25**, 181—205 (1965).

DINCULEANU, N., FOIAȘ, C., *Mesures vectorielles et opérations linéaires sur* L^p_E. C.R. Acad. Sci. Paris, **248**, 1759—1762 (1959).
Sur la représentation intégrale des certaines opérations linéaires. IV. Canad. J. Math., **13**, 529—556 (1961).

DIXMIER, J., *Mesure de Haar et trace d'un opérateur.* C.R. Acad. Sci. Paris. **228**, 152—154 (1949).
Les algèbres d'opérateurs dans l'espace hilbertien (algèbres de von Neumann). Paris, 1957.

DOOB, J.L., *Probability methods applied to the first boundary value problem.* Proc. of the third Berkley Symposium on Math. Statistics and Probability, 1954—1955, 49—80.
Stochastic Processes, New York—London, 1953.

DOWKER, Y.N., *Finite and σ-finite invariant measures.* Ann. of Math., (2), **54**, 595—608 (1951).
On measurable transformations in finite measure spaces. Ann. of. Math., **62**, 504—516 (1955).

DUNFORD, N., *Uniformity in linear spaces.* Trans. Amer. Math. Soc., **44**, 305—356 (1938).
Integration in general analysis. Trans. Amer. Math. Soc., **37**, 441—453 (1935).
Integration and linear operations. Trans. Amer. Math. Soc., **40**, 474—494 (1936).

DUNFORD, N., PETTIS, B.J., *Linear operations on summable functions.* Trans. Amer. Math. Soc., **47**, 323—392 (1940).

DUNFORD, N., SCHWARTZ, J., *Linear operators.* Part I. New York, 1958.

EDWARDS, R.E., *A theory of Radon measures on locally compact spaces.* Acta Math., **89**, 133—164 (1953).
Vector-valued measures and bounded variation in Hilbert space. Mathematica Scandinavica, **3**, 90—96 (1955).
On certain algebras of measures, Pacific. J. Math., **5**, 379—389 (1955).

ELLIS, H.W., HALPERIN, I., *Functions spaces determined by a levelling length function.* Canad. J. Math., **5**, 576—592 (1953).

FICHTENHOLZ, G., *Sur les opérations linéaires dans l'espace des fonctions continues.* Bull. Acad. Roy. Belg., **22**, 26—33 (1936).

FICHTENHOLZ, G., KANTOROVITCH, L.V., *Sur les opérations linéaires dans l'espace des fonctions bornées.* Studia Math., **5**, 69—98 (1934).

FOIAŞ, C. *On a commutative extension of a commutative Banach algebra.* Pacific. J. Math., **8**, 407—410 (1958).

Décompositions intégrales des familles spectrales et semi-spectrales en opérateurs qui sortent de l'espace hilbertien. Acta. Sci. Math. Szeged, **20**, 117—154 (1959).

О некоторых полугруппах сжатий, связанных с представлением конволютионных алгебр. I. Revue math. pures et appl., **7**, 319—325 (1962).

FOIAŞ, C., SINGER, I. *Some remarks on the representation of linear operators in spaces of vector valued continuous functions.* Revue math. pures et appl., **5**, 729—752, 1960.

FORTET, R., MOURIER, E., *Resultats complémentaires sur les éléments aléatoires dans un espace de Banach.* Bull. Sci. Math., **78**, 14—30 (1954).

FULLERTON, R.E., *The representation of linear operators from L^p to L.* Proc. Amer. Math. Soc., **5**, 689—696 (1954).

GĂINĂ, S., *Extension of vector measures.* Revue math. pures et appl., **8**, 151—154 (1963).

GELFAND, I., *Abstrakte Funktionen und lineare Operatoren.* Mat. Sbornik, **4** (**46**), 235—284 (1938).

К теории характеров абелевых топологических групп. Матем. Сборник, **9** (**51**), 49—50 (1941).

ГЕЛФАНД И., НАИМАРК М. А., *Кольца с инволюцией и их представления.* Изв. АН СССР, **12**, 445—480 (1948).

ГЕЛФАНД И., РАИКОВ Д. А., *К теории характеров коммутативных топологических групп.* ДАН СССР, **28**, 195—1978 (1940).

GELFAND, I., SILOV, G., *Über verschiedene Methoden der Einführung der Topologie in die Menge der maximalen Ideale eines normierten Ringes.* Mat. Sbornik, **9** (**51**), 25—40 (1941).

GODEMENT, R., *Théorie générale des sommes continues d'espaces de Banach,* C.R. Acad. Sci. Paris, **288**, 1321—1323 (1949).

Sur la théorie des représentations unitaires. Annals of Math., (2), **53**, 68—124 (1951).

GOWURIN, M., *Über die Stieltjessche Integration abstrakter Funktionen.* Fund. Math., **27**, 255—268 (1936).

GROTHENDIEK, A., *Sur les applications linéaires faiblement compactes d'espaces de type $C(K)$.* Canad. J. Math., **5**, 129—173 (1953).

Produits tensoriels topologiques et espaces nucléaires. Chap,. I—II. Memoirs Amer. Math. Soc., Providence, 1955.

HAAR, A., *Der Massbegriff in der Theorie der kontinuierlichen Gruppen.* Annals of. Math., (2), **34**, 147—169 (1933).

HALMOS, P.R., *Measure Theory.* New York, 1950.

HALPERIN, I., *Function spaces.* Canad. J. Math., **5**, 273—288 (1953).

Uniform convexity in function spaces. Duke Math. J., **21**, 195—204 (1954).

Reflexivity in the L^λ function spaces. Duke Math., J., **21**, 205—208 (1954).

HEWITT, E., *Linear functionals on spaces of continuous functions.* Fund. Math., **37**, 161—189 (1950).

Integral representation of certain linear functionals. Ark. för Mat., **2**, 269—282 (1952).

Integration on locally compact spaces. I. Univ. of Washington Publ. inMath., **3**, 71—75 (1952).

HILDEBRANDT, T.H., *Integration in abstract spaces.* Bull. Amer. Math., Soc., **59**, 111—139 (1953).

HILLE, E., PHILLIPS, R., *Functional analysis and semi-groups.* Amer. Math. Soc. Coll. Publ., 1957.

IONESCU TULCEA, A., IONESCU TULCEA, C., *On the decomposition and integral representation of continuoues linear operators.* Annali di Mat. pura ed appl., **53**, 63-87 (1961).

On the lifting property. I. J. Math. Analysis and Appl., **3**, 573-546 (1961).

On the lifting property. II. Representation of linear operators on L_E^r $1 \leqslant r < \infty$. J. Math. Soc., **70**, 193-197 (1964).

On the lifting property. III. Bull. Amer. Math. Soc., **70**. 193—197 (1964).

IONESCU TULCEA, C., *Spaţii Hilbert.* Bucureşti, 1956.

Deux théorèmes concernant certains espaces de champs de vecteurs. Bull. Sci. Math., **79**, 106-111 (1955).

Sur certains classes de fonctions de type positif. Ann. Ec. Norm. Sup., **74**, 231-248 (1957).

KAKUTANI, S., *Concrete representation of abstract (L) -spaces and the mean ergodic theorem.* Annals of Math., (2), **42**. 523—537 (1941).
Concrete representation of abstract (M) -spaces (A characterisation of the space of continuous functions). Annals of Math. (2), **42**. 994—1024 (1941).
KOLMOGOROFF, A., *Grundbegriffe der Wahrscheinlichkeitsrechnung.* Berlin, 1933
КРАСНОСЕЛЬСКИ М. А., РУТИЦКИ Я. Б., *К теории пространств Орлича.* ДАН СССР, **81**, 497—500 (1951).
Линейные интегральные операторы в пространствах Орлича. ДАН СССР, **85**, 33—38 (1952).
Линейные функционалы в пространствах Орлича. ДАН СССР, **4**, 68—124 (1954).
Выпуклые функции и пространства Орлича. Москва, 1958.
LEBESGUE, H., *Leçons sur l'intégration et la recherche des fonctions primitives.* Paris, 1904.
LOOMIS, L.H., *An introduction to abstract harmonic analysis.* New York. 1953.
LORENTZ, G.G., *On the theory of spaces.* Λ Pacific J. Math., **1**, 411—429 (1951).
Some new functional spaces. Annals of Math., (2), **51**, 37—55 (1950).
LORENTZ, G.G., Wertheim, D.G., *Representation of linear functionals on Köthe spaces.* Canadian J. Math., **5**, 568—575 (1953).
LUXEMBURG, W.A.J., *Banach function spaces.* Thesis, Delft, 1955.
LUXEMBURG, W.A.J., ZAANEN, A.C., *Conjugate spaces of Orlicz spaces.* Indagationes Math., **18**, 217—228 (1956).
Some remarks on Banach function spaces. Indagationes Math., **18**, 110—119 (1956).
MAHARAM D., *On two theorems of Jessen.* Proc. Amer. Math. Soc., **9**, 995—999 (1958).
On a theorem of von Neumann. Proc. Amer. Math. Soc., **9**. 987—994 (1958).
MARCUS, S., *Atomic measures and Darboux property,* Revue math. pures et appl., **7**. 327—332 (1962).
La mesure de Jordan et l'intégrale de Riemann dans un espace mesuré topologique. Acta Sci. Math. Szeged, **20**, 156—163 (1959).
MARCZEWSKI E., *On compact measures.* Fund Math., **40**, 113—124 (1953).
MARINESCU, G., *Spații vectoriale normate,* București, 1956.
Spații vectoriale topologice și pseudotopologice. București, 1959.
Espaces vectoriels pseudotopologiques et théorie des distributions. Berlin. 1963.
MORSE, M., *Bilinear functionals over C × C.* Acta Sci. Math. Szeged, **12**, 41—48 (1950).
Bimeasures and their integral extensions. Annali di Mat. pura ed. appl., **39**. 345—356 (1955).
MORSE, M., TRANSUE, W., *The representation of a C -bimeasure on a general rectangle.* Proc. Nat. Acad. Sci., **42**, 89—95 (1956).
C-bimeasures and their integral extensions. Annals of Math., **64**, 480—504 (1956).
Semi-normed vector spaces with duals of integral type. J. d'Analyse Math. **4**, 149—186 (1954—1955).
*C-bimeasures Λ and their superior integrals Λ** Rendiconti Circolo Mat. Palermo, **4**, 270—300 (1955).
Products of a C-measure and a locally integrable mapping. Canad. J. Math., **9**. 475—486 (1957).
NAGY. B. VON SZ., *Spektraldarstellung linearer Transformationen des Hilbertschen Raumes.* Ergebnisse der Math., Berlin, 1942.
НАЙМАРК, М, А,. *Нормированные кольца.* Москва, 1956.
VON NEUMANN, J., *Zum Haarschen Mass in topologischen Gruppen.* Comp. Math., **1** 106—114 (1934).
Zur Operatorenmethode in der klassischen Mechanik. Annals of. Math., (2) **33**. 587—642 (1932).
Algebraische Repräsentanten der Funktionen bis auf eine Menge von Masse Null. J. Crelle, **165**. 109—115 (1931).
NICOLESCU, M., *Analiza matematică.* **I, II, III.** București, 1957, 1958, 1960.
Funcții reale și analiză funcțională. București, 1962.
Sur quelques propriétés élémentaires de la mesure de Jordan. Bul. Fac. st. Cernăuți, **6**, 222—224 (1932).
Sur les fonctions mesurables (J). Bull. Sci. Math. Paris. **57**. 276—281 (1933).
NIKODYM, O., *Sur une généralisation des intégrales de M. J. Radon.* Fund. Math., **15**. 131—179 (1930).

ONICESCU, O., *Asupra unei integrale şi aplicaţiile ei.* Analele Univ. Bucureşti, **13**, 9—10 (1957).
Fonctions somme sur une b-algèbre. Bull. Math. Soc. Sci. Math. Phys. R.P.R., **3 (51)**, 77—91 (1959).
Note asupra b-algebrelor. Analele Univ. Bucureşti, **22**, 17—22 (1959).

ONICESCU, O., MIHOC, G., IONESCU TULCEA, C., *Calculul probabilităţilor şi aplicaţii.* Bucureşti, 1956.

ORLICZ, W., *Über eine gewisse Klasse von Räumen von Typus B.* Bull. Int. Acad. Sci.Polon. Sci., Ser. A, 207—220 (1932).

PETTIS, B.J., *On integration in vector spaces.* Trans. Amer. Math. Soc. **44**, 277—304 (1938).
Linear functionals and completely additive set functions. Duke Math., J. **4**, 552—565 (1938).

PHILLIPS, R.S., *Integration in a convex linear topological space.* Trans. Amer. Math. Soc., **47**, 114—145 (1940).
On linear transformations, Trans. Amer. Math. Soc., **48**, 516—541 (1940).

PLANCHEREL, M., *Integraldarstellungen willkürlicher Funktionen.* Math. Ann. **67**, 519—534 (1909).

ПОНТРЯГИН Л. С., *Непрерывные группы.* Москва, 1954.

PRICE, G.B., *The theory of integration.* Trans. Amer. Math. Soc. **47**, 1—50 (1940).

RADON, J., *Theorie und Andwendungen der absolut additiven Mengenfunktionen.* S.-B. Akad. Wiss. Wien, **122**, 1295—1438 (1913).

RADU, E., *Măsuri Stieltjes vectoriale.* Bull. Soc. Sci. Math. Phys. R.P.R., *6* (**54**), 79—86, (1962).

РАЙКОВ Д. А., *О положительно определенных функциях.* ДАН ССР, **.26**, 857—862 (1940).
Гармонический анализ на коммутативных группах с мерой Хаара; теория характеров. Труды мат. института им. В.А. Стеклова, **14**, 1—86 (1945).

RICKART, C. E., *Integration in a convex linear topological space.* Trans. Amer. Math. Soc., **52**, 498—521 (1942).
An abstract Radon-Nikodym theorem. Trans. Amer. Math. Soc., **56**, 50—66 (1944).
Decomposition of additive set functions. Duke Math. J., **10**, 653—665 (1943).

RIESZ, F., *Sur les opérations fonctionelles linéaires.* C.R. Acad. Sci. Paris, **149**, 974—977 (1909).
Sur la représentation des opérations fonctionnelles linéaires par des intégrales de Stieltjes. Proc. Roy. Physiog. Soc. Lund., **21**, *16*, 145—151 (1952).
Sur la convergence en moyenne. I. II. Acta Sci. Math. Szeged, **4**, 58—64, 182—185 (1928—1929).

RIESZ, F., SZ-NAGY, B., *Léçons d'analyse fonctionnelle.* Budapest, 1952.

RYLL-NARDZEWSKI, C., *On quasi-compact measures.* Fund. Math., **40**, 125—130 (1953).

SAKS, S., *Theory of integral.* Warsaw, 1937.

SCHWARZ, L., *Théorie des distributions, I. II.* Paris, 1951.

SEGAL, I. E., *Invariant measures on locally compact spaces.* J. Indian Math. Soc., **13**, 105—130 (1949).
A non-commutative extension of abstract integration. Annals of math., **57**, 401—457 (1953).

SÎMBOAN, G., *Vectorial measures.* Revue math. pures et appl., **7**, 383—415 (1962).
Asupra măsurilor compacte. Com. Acad. R.P.R., **9**, 105—110 (1959).
Măsuri în spaţii topologice ordonate. Com. Acad. R.P.R., **9**, 237—243 (1959).

СИНГЕР, И., *Линейные функционалы на пространстве непрерывных отображений бикомпактного хаусдорфного пространства в пространстве Банаха* Revue math. pures et appl., **2**, 301—315 (1957).

SINGER, I., *Les duals de certains espaces de Banach de champs de vecteurs. I, II.* Bull. Sci. Math. **82**, 29—40 (1958); **83**, 73—96 (1959).
Sur les applications linéaires intégrals des espaces de fonctions continus. I. Revue math. pures et appl., **4**, 391—401 (1959).
Sur les applications linéairs majorées des espaces de fonctions continues. Rendiconti Acad. Naz. Lincei, **27**, 35—41 (1959).
Sur la représentation intégrale des applications linéaires continues des espaces L_F^p ($1 \leqslant p < \infty$). Rendiconti Accad. Naz. Lincei, **29**, 28—32 (1960).
Sur une classe d'applications linéaires continues des espaces L_F^p ($1 \leqslant p < +\infty$). Ann. Ecole. Norm. Sup., **77**, 235—256 (1960).
Sur les applications linéaires intégrales des espaces de fonctions continues à valeurs vectorielles. Acta Sci. Math. Acad. Sci. Hung., **11**, 3—13 (1960).

STIELTJES, *Recherches sur les fractions continues.* Ann. Fac. Sci. Toulouse, (1), **8**, 1—22 (1894).

STONE, M. H., *Applications of the theory of Boolean rings to general topology.* Trans. Amer. Math. Soc., **41**, 375—481 (1937).

The generalized Weierstrass approximation theorem. Math. Mag., **21**, 167—184, 237—254 (1947—1948).

Notes on integration. I—IV. Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A., **34**, 336—342, 447—455, 483—490 (1948); **35**, 50—58 (1949).

The theory of representation for Boolean algebras. Trans. Amer. Mat. Soc., **40**, 37—111 (1936).

On the foundations of harmonic analysis. Proc. Roy. Physiog. Soc. Lund., **21**, *17*, 152—172 (1952).

TAKAHASHI, T., *On the compactness of the function-set by the convergence in mean of general type.* Studia Math., **5**, 141—150 (1934).

TOPPING D. M., *Lebesgue spaces of summable functions.* Proc. Amer. Math. Soc., **12**, 773—777 (1961).

VASILIU, C., *Asupra teoremei de descompunere a lui Lebesgue.* Com. Acad. R.P.R., **13**, 863—869 (1936).

ВУЛИХ Б. З., *Введение в теорию полупорядоченных пространств.* Москва, 1961.

WEIL, A., *L'intégration dans les groupes topologiques et ses applications.* Paris, 1953.

Sur les groupes topologiques et les groupes de mesures. C. R. Acad. Sci. Paris, **202**, 1147—1149 (1936).

ZAANEN, A. C., *On a certain class of Banach spaces.* Annals of math., (2), **47**, 654—666 (1946).

Integral transformations and their resolvents in Orlicz and Lebesgue spaces. Compositio Math., **10**, 56—94 (1952).

Note on a certain class of Banach spaces. Nederl. Akad. Wetensch. Proc., **52**, 488—499 (1949).

Linear Analysis. New York — Amsterdam, 1953.

Redactor responsabil: MOCANU PETRE

Dat la culeș 03.09.1964. Bun de tipar 26.06.1965. Apărut 1965. Tiraj 2020 ex. Hîrtie semivelină de 63 g/m² 16/700×1000. Coli editoriale 39,69. Coli de tipar 37. A 11106/1965. C.Z. pentru bibliotecile mari 517.3:519.36. C.Z. pentru bibliotecile mici 517.3:519.

Întreprinderea Poligrafică Informația str. Brezoianu nr. 23–25
Bucureşti, R.P.R. comanda nr. 3638